

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені Володимира Даля

ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД УКООПСПІЛКИ
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»

Рамазанов С. К., Рогоза М. Є., Мусаєва Е. К.

НЕЛІНІЙНІ МОДЕЛІ ТА АНАЛІЗ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Рекомендовано Міністерством освіти
і науки України як навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів

Частина 1

3-є видання, зі змінами

Полтава
РВВ ПУЕТ
2011

УДК 330(075):519.8+658.5
ББК У 29

Р 2 1

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1/11–11913 від 23 грудня 2010 р.)

Схвалено вченою радою Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. Протокол № 11 від 29.05.2009 р. Схвалено вченою радою ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі». Протокол № 8 від 25.11.2009 р.

Колектив авторів:

М. Є. Рогоза, С. К. Рамазанов, Е. К. Мусасва

Рецензенти:

В. Я. Заруба, декан факультету економічної кібернетики и менеджменту Харківського національного університету (ХПУ), доктор економічних наук, професор; **В. М. Порохня**, директор інституту післядипломної освіти Класичного приватного університету (м. Запоріжжя), доктор економічних наук, професор; **О. О. Ємець**, завідувач кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі», лауреат Державної премії України

Нестійкість

Стійкість

Стійкість

Рис. А.3.
ітерується

Рис. А.2.
зростання
відображе

Рис. А.1.
зростання

б) Створіть

© М. Є. Рогоза, С. К. Рамазанов, Е. К. Мусасва, 2011 р.

© Східноукраїнський національний університет
імені Володимира Даля, 2011 р.

© Вищий навчальний заклад Укоопспілки «Полтавський
університет економіки і торгівлі», 2011 р.

ISBN 978-966-184-108-5

ЗМІСТ

ЧАСТИНА 1

ПЕРЕДМОВА.....	9
ВСТУП.....	11
РОЗДІЛ I. МОДЕЛЮВАННЯ ТА СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ.....	18
ГЛАВА 1. МОДЕЛЬ, МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ І УПРАВЛІННЯ	29
1.1. Поняття моделей і моделювання.....	29
1.2. Класифікація засобів моделювання	30
1.3. Поняття економічної системи і принципи її моделювання	32
1.4. Етапи економіко-математичного моделювання	36
1.5. Основні принципи опису виробничо-технологічного рівня економічних систем.....	40
1.6. Загальний вид математичних моделей та основні напрямки їхнього аналізу.....	42
1.7. Класифікація економіко-математичних моделей	47
1.8. Моделювання еколого-економічного управління виробничою системою в умовах нестабільності	50
1.9. Деякі принципи моделювання складних систем	59
1.10. Новий підхід до прогнозування поведінки складних систем і катастрофічних процесів (русла і джокери)	62
1.11. Моделювання та управління ризиком	69
Питання для самоперевірки.....	73
ГЛАВА 2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СИСТЕМ І СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ. СИНЕРГЕТИЧНИЙ ПІДХІД.	74
2.1. Історія розвитку теорії систем і системного аналізу.....	76
2.3. Наукові напрямки системного аналізу	80
2.4. Система, її структура і функціонування.....	92
2.5. Синергетичний підхід в аналізі складних систем.....	117

РОЗДІЛ II. МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ НЕЛІНІЙНОЇ

ДИНАМІКИ І АНАЛІЗУ СКЛАДНИХ СИСТЕМ.....	122
ГЛАВА 3. РІВНЯННЯ І АНАЛІЗ СКЛАДНИХ СИСТЕМ.....	122
3.1. Моделі і аналіз нелінійних динамічних систем.....	122
3.1.1. Системи звичайних диференціальних рівнянь.....	123
3.1.1.1. Основні визначення і теореми.....	123
3.1.1.2. Особливі точки та їхнє інваріантне різноманіття	130
3.1.1.3. Періодичні та неперіодичні розв'язки, граничні цикли та інваріантні тори.....	137
3.1.2. Аналіз нелінійної системи з дискретним часом	149
3.1.3. Використання теорії різницевих рівнянь для моделювання процесу мобілізації.....	158
3.1.4. Основи теорії диференціальних рівнянь.....	163
3.2. Нелінійні моделі складних систем з хаотичною динамікою (стислий огляд).....	169
ГЛАВА 4. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ СИСТЕМ	174
4.1. Аналіз нелінійних економічних систем, що розвиваються.....	174
4.1.1. Основні дослідження стійкості нелінійних динамічних систем.....	174
4.1.2. Якісний аналіз економічної системи, що знаходиться під впливом новітніх інформаційних технологій (НІТ).....	188
4.2. Елементи теорії структурної динаміки.....	192
4.2.1. Основи теорії катастроф	192
4.2.2. Біфуркації на фазовій площині.....	196
4.2.3. Дисипативні структури І. Пригожина	199
РОЗДІЛ ІІІ. МОДЕЛІ ТА АНАЛІЗ СКЛАДНИХ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ.....	202
ГЛАВА 5. МОДЕЛЮВАННЯ І АНАЛІЗ СОЦІАЛЬНО- ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ.....	202
5.1. Деякі базові математичні моделі та їхнє застосування в дослідженні соціально-економічних процесів.....	202
5.1.1. Модель Мальтуса.....	202
5.1.2. Логістична модель.....	203
5.1.3. Експоненціальна модель з відловом	205
5.1.4. Логістична модель з відловом.....	207
5.1.5. М'яка логістична модель з відловом	209

5.1.6. Модель Лотки–Вольтерра.....	210
5.2. Приклад моделювання і аналізу соціально-економічних процесів.....	212
5.2.1. Стійкість ринкових механізмів	212
5.2.2. Народження хаосу	216
5.3. Елементи теорії м'якого моделювання.....	221
5.3.1. Модель війни або битви.....	221
5.3.2. Оптимізація як шлях до катастрофи	224
5.3.3. Жорсткі моделі як шлях до помилкових передбачень.....	229
5.3.4. Небезпека багатоступеневого управління.....	231
5.3.5. Математичні моделі «перебудови» в СРСР	232
5.3.6. Математика і математична освіта у сучасному світі	234
5.4. Моделі нелінійної економічної динаміки з урахуванням швидкості встановлення змінних.....	237
5.4.1. Окремі моделі нелінійної економічної динаміки	238
5.4.2. Узагальнена модель динаміки економіки.....	239
ГЛАВА 6. СИНЕРГЕТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І УПРАВЛІННЯ СКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ	241
6.1. М'яке нелінійне управління: синергетичний підхід в управлінні.....	241
6.2. Глобальне моделювання і аналіз світової динаміки.....	244
6.2.1. Модель світової динаміки Форрестера.....	252
6.2.2. Глобальна модель динаміки Месаровіча-Пестеля (М-П-модель)	257
6.2.3. Феноменологічна макромодель світової динаміки і стійкого розвитку.....	265
ГЛАВА 7. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ХАОСУ І ХАОТИЧНОЇ ДИНАМІКИ. ФРАКТАЛИ	267
7.1. Теорія динамічного хаосу та її застосування.....	267
7.1.1. Динамічний хаос.....	269
7.1.2. Економічний хаос у детермінованих системах.....	270
7.1.2.1. Хаос у детермінованих системах	270
7.1.2.2. Економічний хаос у дискретній системі.....	273
7.1.2.3. Аперіодичне оптимальне економічне зростання.....	280
7.1.2.4. Динаміка міст – система Лоренца (приклад застосування)	285

7.1.2.5. Хаос у моделі міжнародної економіки	290
7.1.2.6. Хаос і економічне прогнозування	292
7.1.2.7. Деякі критерії класифікації атракторів.....	295
7.1.3. Дивні атрактори	301
7.1.4. Динамічний хаос і обмеження області прогнозу	309

ЧАСТИНА 2

РОЗДІЛ III. МОДЕЛІ ТА АНАЛІЗ СКЛАДНИХ ПРОЦЕСІВ

І СИСТЕМ	9
----------------	---

ГЛАВА 7. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ХАОСУ І ХАОТИЧНОЇ

ДИНАМІКИ. ФРАКТАЛИ	9
--------------------------	---

7.1.5. Парадигма складності і теорія самоорганізованої критичності	9
--	---

7.1.6. Застосування теорії хаосу	12
--	----

7.1.6.1. Динамічне моделювання фінансових часових рядів.....	12
--	----

7.1.6.2. Придушення хаосу і сердечна аритмія	15
--	----

7.1.6.3. Хаос і впорядкованість сучасних економічних форм.....	17
--	----

7.1.6.4. Двовимірні квантові критичні явища прибутковості.....	18
--	----

7.1.6.5. Метризований фазовий топологічний простір ціноутворення	21
--	----

7.1.6.6. Хаос і взаємодія в сучасних системах ринків	23
--	----

7.2. Дивний атрактор і його властивості	26
---	----

Завдання і вправи.....	33
------------------------	----

7.3. Методи управління хаосом у динамічних системах	35
---	----

7.3.1. Метод Отта-Гребоджі-Йорке. Метод Пірагаса	36
--	----

7.3.2. Метод Магницького (ММ).....	38
------------------------------------	----

7.3.2.1. Локалізація і стабілізація нестійких точок та циклів хаотичних відображень	39
---	----

7.3.2.2. Локалізація і стабілізація нестійких нерухомих точок (н.н.т.) хаотичних динамічних систем	43
--	----

7.3.2.3. Локалізація і стабілізація нестійких циклів (н.ц.) хаотичних динамічних систем.....	46
--	----

7.3.3. Реконструкція динамічної системи за траєкторією нерегулярного атрактора.....	47
---	----

7.4. Сценарій переходу складних систем до хаосу.....	51
7.5. Фрактали і фрактальний аналіз складних процесів.....	55
7.5.1. Регулярні фрактали	56
7.5.2. Мультифрактали.....	57
7.5.3. Фрактальна розмірність	57
7.5.4. Спектральна функція $f(w)$ мультифракталу. Спектр фрактальних розмірностей.....	63
7.5.5. Перетворення Лежандра (ПЛ).....	65
7.5.6. Фрактальний аналіз складних економічних процесів на основі статистики Херста.....	67

РОЗДІЛ IV. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В НЕЛІНІЙНОМУ АНАЛІЗІ СКЛАДНИХ СИСТЕМ..... 73

ГЛАВА 8. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В НЕЛІНІЙНОМУ АНАЛІЗІ..... 73

8.1. Технології аналізу інформації, синтезу і прийняття рішень у складних системах	73
8.2. Нечітка логіка і нечітке моделювання.....	80
8.3. Моделювання і прогнозування на основі штучних нейронних мереж. Генетичні алгоритми	83
8.3.1. Елементи нейронних мереж	84
8.3.2. Архітектура нейронних мереж	86
8.3.3. Навчання нейронних мереж	87
8.3.4. Моделі нейронних мереж	89
8.3.5. Програмне забезпечення для роботи з нейронними мережами	91
8.3.6. Генетичні алгоритми	91
8.4. Нейронечіткі системи.....	93
8.4.1. Способи інтеграції нечітких і нейронних систем.....	93
8.4.2. Нечіткі нейрони	98
8.4.3. Навчання методами спуску.....	99
8.4.4. Нечіткі схеми міркувань	101
8.4.5. Налаштування нечітких параметрів управління за допомогою нейронних мереж.....	106
8.4.6. Нейро-нечіткі класифікатори	109
8.5. Об'єктно-орієнтовані технології.....	115
8.5.1. Архітектура агента	119
8.5.2. Мультиагентні системи (МАС) і віртуальні	

організації.....	121
8.5.3. Прийняття рішення активним агентом на основі знань, одержаних узагальненням прецедентів.....	127
ГЛАВА 9. ІНСТРУМЕНТАЛЬНІ ЗАСОБИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ	131
9.1. Програмні пакети моделювання та дослідження НС (стилий опис)	131
9.2. Прикладні приклади комп'ютерного моделювання.....	131
9.2.1. Дослідження динамічної системи на основі пакета Excel	131
9.2.2. Дослідження динамічної системи на основі пакета Mathcad	144
9.2.3. Дослідження динамічної системи на основі пакета Matlab.....	167
9.2.4. Дослідження динамічної системи на основі пакета DIN	190
9.2.5. Аналіз роботи нелінійних систем за допомогою пакета Deductor	199
9.3. Інструментальний засіб економічної динаміки Anylogic	204
9.3.1. Елементи моделі	205
9.3.2. Спадкоємність активних об'єктів	210
9.3.3. Анімація реплікованого об'єкта.....	211
9.3.4. Типи параметрів.....	212
ВИСНОВКИ	240
ЛІТЕРАТУРА.....	255
ДОДАТКИ	263

ПЕРЕДМОВА

Ми живемо в період одного з найглибших і, поза сумнівом, найшвидших перетворень в історії людства. Нинішнє перетворення за глибиною не поступається тому, яке привело людство від Середньовіччя до сучасної індустріальної ери, але воно відбувається не протягом століть, а всього лише за десятиріччя. У новому тисячолітті всі аспекти людського життя і діяльності будуть пронизані та сформовані глобально циркулюючою інформацією, і зміни відбуватимуться у сфері глобальних взаємодій, глобальних ринків і глобально діючих технологій.

Умови, що створені глобалізацією та інформатизацією життя і суспільства, відрізняються від умов класичного індустріального століття. Щоб жити і діяти в нових умовах, необхідне інше мислення й інший спосіб дій. У зв'язку зі значною швидкістю впливу нинішнього століття на людство, сучасне його покоління просто не встигло виробити адекватну логіку, цінності та практичні навички. В основному ми намагаємося пристосуватися до умов ХХІ ст. володіючи мисленням і навичками індустріальної системи ХХ ст. Проте це те ж, що намагатися жити в мегаполісах 90-х рр. ХХ ст. з мисленням і світоглядом мешканця середньовічних феодальних сіл. Такий підхід неефективний, а з урахуванням уразливості наших соціальних і екологічних структур – ще й дуже небезпечний.

Ця небезпека стосується всіх нас. Через щодалі тісніші зв'язки і взаємозалежності, що виникають унаслідок глобальних ринків, технологій та інформації, відстале їх сприйняття і практика використання в одному сегменті суспільства стають загрозою для всіх інших, у тому числі для більш сучасних. Завдання, що стоїть перед нами сьогодні, полягає в тому, щоб навчитися жити і діяти відповідно до умов століття інформації, яке глобально поширюється і в яке ми нині вступаємо.

В епоху глобалізації умови безпечного і якісного життя людини стають усе більш складними і важкоохопними. Ми щодня стикаємося з нестійкими рівноважними станами в політиці, економіці та суспільстві. Нинішній світ знаходиться в зоні невизначеності, адже цивілізація вступила в область хаосу і підвищених ризиків. Як наслідок, зменшився горизонт прогнозу. Нам терміново потрібні моделі, що дають уявлення про основні тенденції (тобто розуміння того, що від-

бувається, що чекає світ і який коридор потенційних можливостей), які б дозволили будувати прогноз і, відповідно, давати рекомендації. Деякі країни побоюються втрати звичного рівня і устрою життя та настання хаосу. Інші вбачають можливості творчого оновлення і завоювання нових ринків. Хаос, порядок і самоорганізація, як у природі, так і в суспільстві, виникають згідно із законами складних динамічних систем. Складні динамічні системи вже успішно досліджуються в технічних і природних науках, починаючи з атомарних і молекулярних у фізиці та хімії, клітинних організмів і екологічних систем у біології, аж до нейронних мереж, що вивчаються теоріями мозку, і комп'ютерних мереж Інтернету.

Фахівцями широко обговорюються питання використання теорії складних систем і нелінійної динаміки в економічних і суспільних науках.

У зв'язку з цим виникає безліч проблемних питань: які уроки можна почерпнути з хаосу та виникнення порядку і самоорганізації в природі та суспільстві? до яких висновків можна прийти щодо управління складними системами на підприємствах, у фірмах і в адміністративних структурах? які перспективи відкриваються для таких країн і континентів, як Україна, Росія і нова Європа? та інші.

Тому важливо, щоб цілі та інтереси окремих людей, урядів, корпорацій, суспільних і приватних інститутів підпорядковувалися наступним принципам: *мислити глобально, діяти відповідально; створювати нову культуру підприємництва; підвищувати рівень розуміння насущних проблем політичними лідерами; поважати моральний кодекс збереження довкілля; створювати культуру гармонії та інтегресів.*

Світ сьогодні на межі катастрофи і колапсу. Розвиток економічних систем забезпечать новітні теорії управління.

Менеджмент різного рівня повинен опанувати і використовувати сучасні методи моделювання, аналізу та синтезу ефективних оперативних і стратегічних управлінських рішень у складних умовах ризиків і невизначеностей. Тому для майбутніх фахівців-кібернетиків актуальним є необхідність опанування новітніх засобів і технологій аналізу, прогнозування і управління діяльністю соціально-економічними системами, що стане підставою для становлення і розвитку креативних фахівців, які зможуть забезпечити конкурентоздатність суб'єктів в умовах інноваційних динамічних процесів на макро- та мезорівнях.

Запропонований навчальний посібник допомагає досягненню таких цілей.

Автори

ВСТУП

Сучасний етап розвитку всієї економічної науки характеризується всебічною її математизацією та інформатизацією, які проявляються в заміні економічного процесу, що досліджується адекватною математичною моделлю та у подальшому дослідженні (аналізі) властивостей цієї моделі або аналітичними методами, або на основі систем інформаційних технологій. Оскільки переважна більшість економічних систем і процесів відносяться до складних і протікають у часі – відповідні моделі є в принципі нелінійними і динамічними.

Динамічні математичні моделі добре зарекомендували себе у фізиці, а потім в біології та інших природничих науках, мають багато спільного, хоча і зберігають специфічні особливості кожної з цих наук. Зараз моделі цього класу все ширше застосовуються в соціально-економічних, екологічних, біомедичних та інших науках. В даний час сучасна методологія аналізу нелінійних динамічних систем і процесів оформилася в новий науковий напрям, який називається синергетикою (нелінійною динамікою, теорією хаосу). Ця міждисциплінарна наука націлена на виявленні загальних принципів еволюції та самоорганізації складних систем в різних областях знання на основі побудови та дослідження нелінійних динамічних математичних моделей. Важливими поняттями синергетики є «біфуркація», «катастрофа», «граничний цикл», «дивний атрактор», «хаос», «фрактал», «дисипативна структура» і т.д. Виникаючі при використанні порівняно простих нелінійних моделей, ці поняття дозволяють глибше проникнути в суть багатьох процесів і явищ.

Зауважимо, що будь-яка наукова світоглядна концепція може бути дієздатною і довготривалою, якщо вона динамічна, а не стаціонарна, статична.

Прикладом довгоживучих концепцій є *системний підхід* до дослідження об'єктів і процесів. Принципи системного підходу до досліджень сягають давнини (китайська філософія Дао-Цзи, філософія грецьких філософів Анаксагора, Платона, Сократа і т.д.); пронизують середньовічні навчання навіть в умовах жорсткої середньовічної інквізиції і відроджуються у все більш чітких формах в працях А.А. Богданова (Маліновського), А. Берталанфі і розвиваються в наш час у працях І.Р. Пригожина, Г. Хакена та інших дослідників.

Стародавні філософи фетишизували в системах універсальну, на їхню думку, тенденцію всього сушого до *рівноваги*. Рівноважна гіпотеза світу вимагала пояснення і доказів за допомогою поняття *оборотність*, тобто нерівновага може виникати і постійно виникає, але воно тимчасове і в остаточному підсумку відновлюється рівновага, яка розглядається як *Порядок*, а те, що виводить систему з рівноваги розглядається як *непорядок* або *Хаос*.

Сучасні версії системного підходу більш різноманітні і парадоксальні.

Зокрема, Брюссельська школа фізикохімії на чолі з І.Р. Пригожиным не вважає рівновагу і оборотність імперативами загального руху в об'єктивному світі. Більш того, вона стверджує, що світ влаштований так, що нерівновага, незворотність – джерела розвитку цього світу. Підхід Брюссельської школи отримав назву *теорія самоорганізації І.Р. Пригожина*.

Питання про співвідношення порядку і хаосу в світі, що навколо людства було головним питанням усвідомлення суті Природи, Людства і Взаємодії між ними з найдавніших часів до наших днів.

Існує два світоглядних підходу до сприйняття буття:

1. Світ створений за задумом (Богом, Всевишнім, надприродною силою ...?), він певним чином організований, упорядкований, в ньому діють встановлені кимось (чимось?) закони (коди, гени, алгоритми), і задача людини – їх розгадати, пізнати, освоїти і їм слідувати.

2. Світ – це активна субстанція (матерія, сутність), здатна до самоорганізації та самовдосконалення. У цій версії Світобудови символом може вважатися відповідь Лапласа на питання Наполеона, який прочитав «Трактат про небесну механіку» – Чому в книзі великий астроном не згадав Бога? – «Сір, я не потребую цієї гіпотези».

Робилися з давніх часів і робляться в даний час спроби об'єднати ці дві гіпотези Миру в одну – приписати Богові створення Світу, а далі розвиток Миру пустити по природним законам розвитку, тобто за законами самоорганізації.

Для задач даної роботи філософський, світоглядний аспект самоорганізації доречно винести за дужки і послатися на велику онтологічну бібліографію з цієї проблеми. Не повний, але досить представницький огляд з розвитку самоорганізаційних та синергетичних уявлень в минулому і сьогоденні зроблений автором у роботі «Введення в економічну синергетику».

На підтвердження того, що ідеї самоорганізації і синергетизму у Світі пустили глибоке коріння достатньо тільки перелічити найбільш

відомі наукові школи та імена, які брали участь у формуванні концепції самоорганізації.

Ідеї самоорганізації і синергетизму проглядаються в роботах старогрецьких мислителів *Анаксагора, Геракліта, Сократа, Платона, Аристотеля, Зенона* та інших відомих філософів.

В епоху Відродження у висловлюваннях *М. Монтеня* (1533 – 1592), *Д. Бруно* (1548 – 1600), *Г. Галілея* (1564 – 1642), *Р. Декарта* (1596 – 1650) висувалися такі твердження (наприклад, про нескінченний світ, про вічний рух і вічні перетворення і т.д.), які об'єктивно сприяли розвитку ідей самоорганізації. Серед мислителів пізнішої епохи, що сприяли розвитку концепції самоорганізації, – *Б. Спіноза* (1632 – 1677), *Г. Лейбніц* (1646 – 1716), *Ш. Монтеск* (1689 – 1755), *Х. Гольдбах* (1690 – 1764), *Д. Дідро* (1713 – 1784), *Е. де Кондільяк* (1715 – 1780), *Ж. Кондорсе* (1743 – 1794), *Сен-Симон* (1760 – 1825), *І. Фіхте* (1762 – 1814), *А. Гумбольдт* (1769 – 1859), *Ф. Шеллінг* (1775 – 1854), *Г. Спенсер* (1820 – 1903) та інші діячі науки XVII – XIX століть.

Найбільший внесок у розвиток концепції самоорганізації внесли *І. Кант* (1724 – 1804), *Г. Гегель* (1770 – 1831), *Ч. Дарвін* (1809 – 1882).

І. Кант розглянув самоорганізацію в еволюції космічних систем. У діалектиці Г. Гегеля самоорганізація отримала настільки потужний розвиток, що Г. Гегеля можна вважати одним з праотців теорії самоорганізації. Хоча в строгому сенсі ототожнювати діалектику і самоорганізацію можна. У еволюційній теорії Ч. Дарвіна розглянуті механізми самоорганізації у вигляді природного відбору, підбору, дивергенції, конвергенції та інших способів, механізмів, важелів еволюції.

Визначну роль у становленні концепції самоорганізації зіграв *А. А. Богданов* (1873 – 1928). У спробі об'єднати всі науки в одну універсальну науку про Природу, він вказав на самоорганізацію як на саму загальну закономірність в Природі. На відміну від положень класичної термодинаміки, що ставлять головною ідеєю оборотність, рівновагу і ентропійність як вищі імперативи Природи, він висунув гіпотезу, відповідно до якої у вищих формах руху матерії (біологічної, соціальної, економічної), необоротність, нерівновагу є загальним законом еволюції, розвитку, трансформації різних форм руху. Тенденцію до підвищення рівня складності, ієрархічності і організованості А. А. Богданов вважав вищим законом Природи: «Вона виступає перед нами як тканина, що безмежно розгортається у формах різних типів і ступенів організованості – від невідомих нам елементів ефіру до людських колективів і зоряних систем. Всі ці

форми – у їх взаємних сплетеннях і взаємній боротьбі, в їхніх постійних змінах – утворюють світовий організаційний процес, що необмежено дробляється у своїх частинах, безперервний і нерозривний в своєму цілому». У своїй «Тектології» А. А. Богданов передбачив три міждисциплінарні науки – загальну теорію систем, кібернетику і синергетику, що стали в другій половині ХХ століття універсальними, міждисциплінарними світоглядними науками.

А. Пуанкаре (1854 – 1906) в 1879 році у своїй дисертації ввів поняття «біфуркація», яким він позначив роздвоєння, що виникають в системах в станах крайньої нестійкості. Виникли поняття «критичні системи», «якісні переходи», «фазові», «структурні перетворення».

П. Кюрі (1859 – 1906) вказав на тенденцію до симетрії та асиметрії як на джерело та розвиток у фізичних системах, як вищий імператив Природи.

В.І. Вернадський (1863 – 1945) в теорії ноосфери пов'язав в єдину систему всі види трансформаційних процесів на Землі – геохімічних, біохімічних, біологічних, соціальних... Ось як оцінив внесок В.І. Вернадського в розвиток теорії самоорганізації Н.Н. Моїсеев: «Вчення про ноосферу виявилось якраз тією ланкою, що дозволило зв'язати картину, створену сучасною фізикою, з загальною панорамою розвитку життя – не тільки біологічної еволюції, а й суспільного прогресу. Об'єднання цих трьох начал в єдину систему особливо вражає в контексті ідей сучасного синергетизму... »

А. Л. Чижевський (1897 – 1964), зв'язав життя на планеті Земля з процесами на Сонці, показав взаємоперетворення геофізичних, геохімічних, біологічних, фізіологічних, соціальних, історичних процесів. Геліотараксія А. Л. Чижевського стала космічною версією механізмів еволюції, революції, стійкості, нестійкості, лабільності, якісних переходів, катастроф, активацій, релаксацій, заснованої не на здогадках, а на статистичних даних, фактах, дослідженнях у найрізноманітніших галузях знань.

Л. Берталанфі (1901 – 1972) обґрунтував комплекс положень, відповідно до яких всі явища в Світі взаємопов'язані, взаємозалежні, ієрархічні, впорядковані, еквіфінальні. Ці положення склали основу загальної теорії систем, – науки про єдність і взаємозалежність у Світі. Загальна теорія систем стала універсальною методологічною основою в операціях аналізу та синтезу в процесах розвитку всіх видів систем.

Н. Вінер (1894 – 1964), основоположник кібернетики, розробив алгоритми саморегуляції в системах різної природи і показав їх ізоморфізм на базі негативного зворотного зв'язку. Саморегуляція в

механізмах самоорганізації грає на окремих ділянках траєкторії розвитку (наприклад, на стаціонарних) вирішальну роль. Взаємоперетворення саморегуляції в самоорганізацію і зворотнє перетворення самоорганізації в саморегуляцію є універсальним явищем.

А. Ейнштейн в загальній теорії відносності спробував об'єднати в єдиному процесі, що самоорганізується Простір, час і всі форми фізичних полів.

У розвиток теорії самоорганізації видатний внесок внесли А. Ляпунов, А. Андронов, Р. Хохлов, Н. Семенов, Л. Ландау, С. Смейл, Д. Аносов, Я. Синай, які розробили універсальні теорії стійкості, автоволнових, ланцюгових реакцій, фазових переходів...

Але особливо видатну роль у розвиток теорії самоорганізації внесли *основположники нерівноважної термодинаміки* П. Гленсдорф та І. Р. Пригожин.

Основні положення теорії самоорганізації І. Р. Пригожина настільки радикальні, що за своєю суттю вони формують *нову світоглядну парадигму*, тобто нову систему поглядів.

Всесвіт, (Світ, все суще ...) складається з відкритих і закритих систем, тобто взаємопов'язаних груп елементів, що спілкуються (відкриті системи), або не спілкуються (закриті системи) оточенням масою, енергією, ентропією, інформацією і т. д.

До другої половини ХХ століття всі фундаментальні закони природи були сформульовані тільки для закритих систем (закони збереження енергії, руху, мас, що діють і т. д.). Оперувати відкритими системами вчені не вміли. Кількісно описувати операції з ними тим більше не могли. Точно також не було переконливих моделей для опису нерівноважних процесів.

Честь «розпечатати» цю проблему в науці належить лауреату Нобелівської премії І. Р. Пригожина і вченим Брюссельської школи - П. Гленсдорфа, Г. Ніколіс та іншим дослідникам.

Що стосується біологічних, соціальних, економічних систем, то вони всі належать до *відкритих систем*, а значить поширювати на них дію фундаментальних законів механіки і термодинаміки *не правомірно*.

Які основні положення теорії самоорганізації І.Р. Пригожина?

Ключовими поняттями в теорії самоорганізації І. Пригожина є *дисипація енергії, самоорганізація, детермінований хаос, ентропія, стріла часу*.

Процеси, що протікають з розсіюванням енергії, І. Пригожин назвав *дисипативних*. При дисипації енергії руйнується старий порядок і утворюється новий. Модель цього процесу заснована на

положеннях нерівноважної термодинаміки, розробленої І. Пригожиным, П. Гленсдорфа, Д. Ніколіс та іншими дослідниками Брюссельської школи.

Відповідно до положень нерівноважної термодинаміки у відкритих системах в сильно нерівноважних умовах виникають *градієнтні потенціали* (неоднорідність за складом, температурі, концентрації і т.д.). Нерівноважності і градієнтний потенціал обумовлюють нелінійний характер динамічних процесів і утворення нових структур. Структуризація відбувається в силу ентропійного фактора. Зміна ентропії в мікрооб'ємах $\Delta S = diS + deS$, визначатиметься зміною ентропії всередині системи diS і зміною ентропії за рахунок зовнішніх факторів deS . При певному рівні градієнтного потенціалу зміна ентропії може досягти значення $\Delta S < 0$. Це відбудеться у випадку, якщо виробництво ентропії всередині системи diS/dt стане менше dS/dt . Це може статися *флуктуаційно* і в результаті фазових перетворень, а також градієнтного фактора. В результаті стрибка ентропії в системі відбудеться перехід від «хаосу» до «порядку» (ентропія різко зменшилася). Якщо експорт (розсіяння) ентропії deS перевищить імпорт ентропії diS і при цьому буде перейдено поріг «нової структуризації», то це і буде призводити до утворення нових структур.

Концепцію самоорганізації І. Пригожина можна звести до наступних *основних положень*.

1. Матерія не є пасивною субстанцією. Їй властива спонтанна активність, викликана нестійкістю нерівноважних станів, в які рано чи пізно приходить будь-яка система в результаті взаємодії з навколишнім середовищем.

2. Обмежена область систем, об'єктів, процесів, в яких малий сигнал на вході в систему викликає рівномірно у всій області визначення малий відгук на виході. Це окремий випадок реальних систем, в яких внутрішня структура не обмінюється енергією і ентропією з зовнішнім середовищем. Тобто саморегуляція – це приватний обмежений у часі і просторі концептуально сконструйований випадок самоорганізації.

3. Всі системи містять підсистеми, які безперервно флуктуюють. Флуктуації служать причиною біфуркацій, тобто зміни, що в найбільшій мірі відповідає мінімуму вільної енергії в системі. У точці біфуркації можливий перехід в хаотичний стан або в інше більш впорядкований стан. Нова структура – дисипативна, тобто утворюється в результаті експорту або імпорту ентропії, може бути рівноважною, слабо нерівноважною, сильно нерівноважною і може утворюватися спонтанним, тобто мимовільним шляхом. У станах, далеких від рівноваги, відбуваються складні процеси перерозподілу

матерії у просторі та часі. Якщо в одновимірному просторі кількість нових станів обмежена, то в багатовимірному просторі число можливих типів дисипативних структур різко зростає, а самі структури можуть бути необмежено різноманітні. Таким чином стирається грань між Хаосом і Порядком. Це найважливіші положення теорії самоорганізації І. Пригожина.

4. У процесах фазових переходів велику роль відіграють процеси автокаталізу і автоколивань, обумовлених позитивними зворотними зв'язками.

5. У концепції І. Пригожина змінюється поняття часу. У ньютонівській картині світу будь-який момент часу в сьогоднішньому, минулому і майбутньому не відрізнявся від будь-якого іншого моменту часу. Вихідним кордоном подій служать початкові умови. Все матеріальне рухається по визначених траєкторіях.

6. Відкритість систем відмовляє рівновазі, стійкості, лінійності, оборотності в універсальності цих понять як властивостей матерії, притаманних їй за визначенням. У станах, далеких від рівноваги, відбуваються спонтанні перерозподіли матерії у часі і просторі.

7. І. Пригожин пов'язав симетрію, критичні, порогові, біфуркаційні, автокаталітичні, автоволнові процеси з ймовірнісною картиною світу в сильно нерівноважних системах та на базі цього синтезу запропонував механізм перетворення Хаосу до Порядку, Порядку – у Хаос, через каскад біфуркаційних переходів.

8. Дисипативні структури утворюються в сильно нерівноважних умовах. Тим не менш, рівняння реакцій з дифузиею містять параметри, допускають зсув в слабо нерівноважну область.

9. Еволюція в системі може носити прискорюваний характер або такий, що сповільнюється. Це буде визначатися еволюцією зворотного зв'язку в системі. У цьому сенсі еволюцію і самоорганізацію слід розглядати як еволюцію зворотного зв'язку, її вдосконалення, збільшення або зменшення її інформаційної потужності.

10. Світ процесів в системах і світ траєкторій співвідносяться через стрілу часу і ентропію. Ентропія – це механізм відбору щодо стійких станів у залежності від структури системи, її відкритості, її складності і як наслідок, рівня її ймовірності, асиметрії та інших факторів.

Концепція самоорганізації І. Пригожина є загальновизнаною найбільш загальною інтерпретацією динаміки, еволюції і перетворення в системах.

Виникає питання: чи всякий Хаос може (здатний) мимоволі переходити до Порядку?

Якби кожен Хаос був здатний переходити до Порядку, то за 20 млрд. років (час існування Всесвіту) настав би абсолютний Порядок і

з ним ентропійна смерть.

Логічно стверджувати, що не всякий Хаос здатний переходити до Порядку. А який? Якими властивостями повинен володіти Хаос, здатний «творити» Порядок?

На сьогоднішній день кількісних критеріїв здатності Хаосу «творити» Порядок немає. До речі, більшість процесів у світі не мають описів кількісних закономірностей. Можливі тільки якісні описи більшості процесів. Причому, чим складніше система, тим менш імовірна можливість її кількісного опису.

Критеріями віднесення Хаосу до креативного, тобто здатному створювати новий Порядок, є здатність хаотичного середовища до підвищення (зменшення) певних параметрів:

- у фізичних і хімічних системах – зниження рівня вільної енергії і збільшення «*параметра порядку*» (комбінація змінних величин, що змінюють рівень симетрії в системі), зміна ентропії (ентропійний градієнт);
- в біологічних системах – здатність до виживання в міжвидової і внутрішньовидової боротьби у ході підбору і природного відбору;
- в економічних системах – підвищення ефективності функціонування (хоча, що таке ефективність, вона не має однозначного визначення).

У системах має місце «*розвиток*», яке представляє собою зміну *параметрів стану* системи *в часі*. Системи в ході розвитку можуть перебувати в стані *лінійного* і *нелінійного* руху (зростання), в *біфуркаційному* стані, тобто в стані нестійкості. Системи можуть змінювати *фазовий портрет*, тобто набір і величину параметрів стану. Системи в ході розвитку можуть змінювати *структуру*, тобто *склад* (набір) *елементів* (фаз), що входять в систему, і *взаємодії* (відношення) між ними. У розвитку можуть бути *розриви*, *катастрофи*, *кризи*.

Розвиток можна описати за допомогою понять: *аттрактор* (дивний аттрактор) *розвиток*, *траєкторія розвитку*, *тренд розвитку*, *магістраль розвитку*.

Зміна конкретної системи в часі може відповідати *стрілі часу* і знаходитися в протиріччі із стрілою часу. Поняття «стріла часу» у науку ввів Т. Еддінгтон.

Час і простір – головні зовнішні параметри координації стану системи. Причому діє глобальна тенденція – *емерджентність* часу, «стиснення» часу. Час і простір можуть розглядатися тільки через відносні параметри. Відносність простору і часу – прояв нелінійності

в найглибшому сенсі слова «нелінійність». Емерджентність – ключове поняття теорії самоорганізації і воно означає, що ціле не є арифметична сума складових її частин. Вона може бути більше або менше цілого.

Синергетична парадигма. Наприкінці XX століття (70-і роки) в науці склалася нова світоглядна парадигма, яку зазвичай пов'язують з іменами лауреата Нобелівської премії Іллі Романовича Пригожина і професора Штутгартського університету Германа Хакена (нар. в 1928 році).

Термін «синергетика» в перекладі з грецького означає «співпраця», «кооперація», узгоджену дію. За смисловим змістом «синергетика» протилежна поняттю «конкуренція», яке означає «боротьба», «суперництво».

У синергетики як універсальної міждисциплінарної та синтетичної науці велика увага приділяється *граничним явищам*, тобто явища, що відбуваються при проходженні процесів через деякі критичні параметри. Порогові явища – універсальне явище Природи. К. Маркс вперше в економічній теорії ввів розгляд порогових явищ в теорію економічного розвитку. У XX столітті широкого поширення набула теорія зміни технологічних укладів, як першопричини великих економічних циклів. Ця теорія досить конгеніально кореспондується з марксовим уявленням про провідну роль засобів виробництва в економічному розвитку в поєднанні з проявом порогових ефектів як важливого елемента механізму розвитку.

Синергетика як наука визнає універсальність відкритих систем.

Синергетика, хоча виникла в ході рішення проблем самоорганізації в хімічних і фізичних системах, не прагне звести всі явища до фізичних і хімічних процесів, а є методологією відшукування ізоморфних законів у самих різних галузях знання.

Синергетика як наука, розглядаючи відкриті системи та їх окремих випадок – закриті системи, акцентує увагу на процесах когерентності, резонантності, узгодженості, кооперативності, що протікають у складних системах з різними по природі зв'язками в системах.

Синергетика розглядає системи складні, в яких ціле має властивості, не властивими складовим його частинам. Властивістю самоорганізовуватися володіє система в цілому, але не її частина.

Синергетика як наука має той же понятійний апарат, що і теорія самоорганізації І. Пригожина: ентропія, незворотність, відкритість, нерівноважності, стійкість, флуктуації, біфуркації, самоорганізація ...

Синергетика, як і теорія самоорганізації, визнає можливість виникнення дисипативних структур. У станах систем, близьких до

рівноваги, процеси протікають з мінімальним виробництвом ентропії, практично лінійно, реалізуючи функцію інерції, спадковості. З віддаленням від рівноваги система починає мати властивість для класичної науки.

Синергетика, використовуючи апарат загальної теорії систем, теорії самоорганізації І. Пригожина, велику увагу приділяє механізму фазових переходів в системах.

У синергетичній парадигмі Світ представляється як гіперскладна, нестационарна, нестабільна (детерміновано-хаотична) система з непередбачуваністю майбутніх станів. Таке уявлення про Світ не узгоджується з класичним, в якому Світ представляється як детермінована система, тобто та, що має причинність дій, подій, передбачуваність майбутніх подій.

Синергетичне уявлення не узгоджується з кібернетичним уявленням. Кібернетика допускає саморегуляцію систем, тобто можливість збереження якихось стійких станів під дією внутрішніх сил і механізмів, які в кібернетичних роботах називаються *негативний зворотний зв'язок*.

Синергетика такі стани не відкидає, але вважає короточасними в історичному масштабі часу, подібно до того, як робить зупинки поїзд далекого прямування на великих станціях. Особливістю синергетики як світоглядної парадигми є те, що вона відкидає одиничність і визначеності стаціонарних станів, єдиність правильних рішень (оптимальних), що вважалося задачею управлінської (і не тільки управлінської) науки ХХ століття.

Синергетика апелює як до головної діючої сили розвитку систем не до навколишнього середовища (хоча і не заперечує дії цього фактора), а внутрішньосистемні сили. У природних системах – це природна радіоактивність, флуктуації, асиметричність...

У штучних (громадських, економічних, організаційних) – це інститути, інновації, знання, уподобання, що змінюються, люди і т.д. Звідси нове уявлення про економіку, організації, управління, про менеджмент, маркетинг...

Синергетика як світоглядна парадигма заперечує лінійність як прийом, що не задовольняє вимогам коректності, точності, адекватності. Реальний світ складніше, багатогранніше. У синергетичній парадигмі випадковість, слабкі зміни на мікрорівні можуть викликати якісні структурні зміни, «запускати» нелінійні, нерівноважні, необоротні самоорганізаційні процеси фазових і структурообразних трансформацій з проявом вибухових синергетичних ефектів.

Визнання фазових і структурних трансформацій як головних

чинників руху, важливіших, ніж кількісні прирошення, є знаковою відзнакою синергетики від класики і кібернетики. Більше того, фазові і структурні трансформації всередині систем будь-якої природи є головною рушійною силою розвитку систем.

Синергетика як світоглядна парадигма розглядає нестійкість, нестаціонарність, хаос як причину розвитку. Порядок з Хаосу – формула теорії самоорганізації. Якщо кібернетика орієнтує на стабільність і стійкість як мета творчої діяльності, то синергетика вважає стабільність, стійкість, жорстку організованість причиною ентропійної смерті, припиненням розвитку.

У механізмі розвитку відповідно до положень синергетики велику роль відіграють *стани (точки) біфуркацій*, тобто таких станів, коли нестійкість досягає такого рівня (порога), коли система вже не може перебувати в колишньому стані (траєкторії руху, аттрактору, якості...).

Звідси практичне слідство. Якщо систему, що знаходиться в стані біфуркації «уколювати» слабкими імпульсами, але в потрібну больову точку, можна отримати неадекватний відгук у вигляді вибухового синергетичного ефекту.

Синергетика виходить з того, що матерія активна за визначенням. Активність – це іманентна властивість всього сущого. Чим внутрішньосистемна структура менш стабільна, нестійка, чим вона далі від рівноваги, тим активність, здатність до саморозвитку вище, і тим вище синергетичний потенціал системи.

У системі «Порядок – Хаос» немає чіткої межі між Порядком та Хаосом. Порядок і Хаос взаємооборотні. Хаос завжди певною мірою детермінований, в реальних системах абсолютного Порядку не буває. Хаос служить джерелом, «живильним середовищем» для Порядку, будь Порядок трансформується в «непорядок». Чим жорсткіше структура системи, тим менше вона здатна до саморозвитку.

Синергетична парадигма – нелінійна, неравновесна, необоротна, враховує високий рівень невизначеності реального світу, визнає рівноправність Порядку та Хаосу в умовах крайньої нестійкості, здатність до саморозвитку як іманентна властивість всіх видів матеріального світу. Реальний світ має властивість розвитку по множині векторів, різноманіттю форм і траєкторій – аттракторів.

У пропонованому навчальному посібнику розглядаються методологічні проблеми нелінійного моделювання і використання методів системного аналізу та математичного апарату (теорії диференціальних, різницевих рівнянь, теорії нечіткої логіки, штучних нейронних мереж, теорії нелінійної динаміки та ін.) для аналізу динаміки складних систем і процесів (соціально-економічних, екологічних тощо). Розгляда-

ються як моделі, що стали класичними, так і сучасні, іноді конкуруючі між собою, підходи до опису динаміки (теорія катастроф, системна динаміка, синергетика та ін.). Структура і склад посібника визначаються тим, що він призначений для студентів та аспірантів факультетів управління, інноваційної економіки і кібернетики, а також економічних та соціологічних факультетів, факультетів менеджменту та математики, які прослухали базові математичні дисципліни.

Зауважимо, що процесом побудови математичних моделей ми починаємо займатися ще в школі, розв'язуючи задачі на складання рівнянь. Моделювання починається з аналізу проблеми, сформульованої в тексті завдання. Вирішуючи завдання, ми намагаємося досягнути зміст окремих пропозицій, зрозуміти їхні взаємозв'язки. Потім ми записуємо завдання мовою математичних символів, визначаємо множини змінних і будуємо систему знакових співвідношень (рівнянь і нерівностей). Процес складання рівнянь корисний уже тим, що ми глибше вникаємо в задачі, виявляючи логічні взаємозв'язки. Для кожної задачі, як правило, можна скласти кілька різних систем рівнянь, тобто побудувати кілька моделей.

Вибираючи просту, лаконічну модель, ми аналізуємо її, застосовуючи математичний інструментарій (знання, накопичені в галузі дослідження систем лінійних чи нелінійних рівнянь і нерівностей). Отримавши рішення задачі, можна оцінити, як впливає на моделюючий процес та чи інша зміна вихідних факторів.

Побудована математична модель забезпечує істотне стиснення інформації, але при цьому певні аспекти досліджуваного процесу відкидаються як несуттєві. Модель є простішою, в певному сенсі «грубішою» за досліджуване явище, але зате одна й та ж модель може бути використана для опису широкого класу явищ.

Під моделлю (від лат. *modulus* – міра, зразок, норма) в широкому сенсі в науці прийнято розуміти аналог, «замінник» оригіналу (фрагмент дійсності), в якому за певних умов відтворення дослідника цікавлять властивості оригіналу.

М. Вартофскій розглядає моделі як «картини», що співвідносяться з чимось. «Ця референція завжди є співвідношення з чимось реальним, що знаходиться за межами зображення і репрезентації. Отже, виключається будь-яке самовідношення, оскільки ніщо не може бути моделлю самого себе. Таким чином, «картина» може «бути схожою» на об'єкт або мати «вигляд» об'єкта в різних сенсах, починаючи з найпростішого випадку послідовного відображення контурів карти і закінчуючи випадком «представника» нації, який може відображати, «репрезентувати» її – своїми поглядами, уподобаннями, поведінкою».

Інформаційний аспект підкреслюється у визначенні Н. Н. Моїсєєва.

«Під моделлю ми будемо розуміти спрощене, якщо хочете, упаковане знання, яке містить цілком визначену, обмежену інформацію про предмет (явище), що відображає ті чи інші його окремі властивості. Модель можна розглядати як спеціальну форму кодування інформації. На відміну від звичайного кодування, коли нам відома вся початкова інформація і ми лише перекладаємо її на іншу мову, модель, яку б мову вона не використовувала, кодує і ту інформацію, яку люди раніше не знали. Можна сказати, що модель містить потенційне знання, яке людина, досліджуючи її, може набути, зробити наочним і використовувати в своїх практичних життєвих потребах. Для цих цілей у рамках самих наук розвинено спеціальні методи аналізу. Саме цим і обумовлена передбачальна здатність модельного опису».

Слідуючи піфагорейській традиції, багато мислителів минулого відзначали важливу роль математики в пізнанні природи. Нагадаємо відоме висловлювання Галілея про книгу природи, написану мовою математики, відомий висновок Канта про математику як міру науковості природних наук, твердження Кеплера про те, що розум створений для «кількостей», без яких його доля – блукати в темряві, або тезу Декарта про те, що у природі все математично.

Якщо успіхи математики в природознавстві безперечні, то в гуманітарній сфері досягнення значно скромніші. Однак поява в ХХ ст. таких наукових напрямків, як кібернетика, теорія систем, інформатика, когнітологія, семіотика, синергетика, і стрімкий розвиток комп'ютерної техніки дозволили визначити нові підходи в математизації соціально-економічних та гуманітарних наук.

Так, математичне моделювання соціально-економічних процесів надає змогу досліднику ефективно використати можливості сучасної комп'ютерної техніки і розробленого математичного та програмного забезпечення для проведення обчислювальних експериментів, що є новою технологією в методології наукових досліджень.

В. І. Паніотто вважає, «що необхідність використання цієї технології в соціальних науках є особливо нагальною. Це пов'язано, по-перше, з більш високою складністю соціальних об'єктів порівняно з технічними або фізичними об'єктами, нелінійністю і багатофакторністю соціальних процесів, складними взаємозв'язками, що роблять практично неможливим створення достатньо повної вербальної моделі об'єкта. По-друге, це пов'язано зі складністю (а часто й неможливістю) проведення експериментів на реальних соціальних об'єктах, значними соціальними наслідками, які можуть мати такі експерименти».

Одним з основних заперечень проти вторгнення математичного моделювання в сферу суспільних наук є твердження про те, що соціальні процеси дуже складні, а математичні моделі часто виявляються надто

спрощеними. Однак основним обмежуючим фактором тут є не апарат прикладної математики, а можливості людського розуму осмислити і проаналізувати складну, багатофакторну модель. Використання комп'ютерних моделей та обчислювальних експериментів дозволить дослідникові зробити «моделювання інструментом практики, надасть можливість найбільш повно використати всю доступну йому інформацію. Такий підхід суттєво відрізняється від збору даних та статистичного аналізу, які забирають так багато часу в соціальних дослідженнях. Збір даних відіграє важливу роль, але він був би значно ефективнішим, якби спрямовувався моделлю системи, що допомагає знайти чутливі точки системи і необхідну для цього інформацію».

В. В. Налімов вважає, що всі суперечки про можливість або неможливість застосування математичних методів у соціальних науках зводяться тільки до розуміння значення слова «модель». «Якщо її розуміти як щось аналогічне закону природи, то нічого зробити не можна, якщо її розуміти як метафору, то всі заперечення відразу знімаються». «Математика в прикладних задачах використовується просто як певна мова, яка дозволяє швидко отримувати логічні висновки з вихідних посилок. Ця мова зручна своєю компактністю і точністю, і в умілих руках вона ніколи не буває надто жорсткою. Вона досить широко відома, тому немає потреби щоразу заново роз'яснювати і обґрунтовувати правила висновків. І нарешті, при використанні цієї універсальної мови виникають асоціації з іншими задачами, розв'язаними за допомогою такого ж ланцюжка суджень, і це додає переконливості новим побудовам».

Імітація математичних моделей і комп'ютерні експерименти дають змогу досліджувати складні системи, частини яких описані різними математичними мовами. Необхідність такого підходу була вперше усвідомлена фізиками.

Намагаючись осмислити суперечності в концепціях міковсесвіту, Бор сформулював принцип додатковості: для відтворення в знаковій системі цілісного явища необхідні взаємовиключні, додаткові класи понять («...цілісність живих організмів і характеристика людини, що має свідомість, а також людських культур представляють риси цілісності, відображення яких вимагає типово додаткового способу опису»). З принципу додатковості, зокрема, випливає, що логічні та математичні моделі діють як метафори, причому однієї логічної конструкції часто виявляється недостатньо для опису складних систем.

Незважаючи на значні труднощі та численні невдачі, кількість учених, які намагаються застосовувати математичні методи і моделі для пояснення та прогнозування соціально-економічних процесів, стрімко зростає. Стимулюючу роль тут відіграють успіхи, досягнені матема-

тикою в таких гуманітарних сферах, як економіка, лінгвістика і демографія. Слід зазначити, що це друга хвиля вторгнення математики в гуманітарну сферу. Перша хвиля припала на XVII і XVIII ст. і була викликана ейфорією від успіхів математичних методів у пізнанні законів механіки та фізики.

Останнім часом спостерігається помітна експансія математики в галузі гуманітарних наук. Кількість публікацій, присвячених математичному моделюванню соціально-економічних систем, щороку зростає. Однак ставлення економістів, соціологів, політологів та представників інших гуманітарних напрямків до математичного моделювання залишається скептичним.

Говорячи про закони соціуму, звичайно ж, слід спочатку переконатися в їхньому існуванні. Частина філософів може собі дозволити ставати в позицію повної непізнаності соціальної дійсності, абсолютної непередбачуваності подій та явищ соціального життя. Представники такої позиції роблять надмірний акцент на ролі суб'єктивного фактора в соціальних процесах, волі, бажань, мотивів, емоцій і примх у поведінці людей. Певною мірою послідовний соціальний агностицизм є реакцією на надмірні претензії детермінізму XIX ст., що «вигодував» цілий ряд філософських і політичних течій, представники яких виступили з «науково обґрунтованими» і остаточно «доведеними» прогнозами розвитку людства, розробками низки проектів побудови «щасливого суспільства». Сліпа віра в наукові докази спричинила у XX ст. багато жакхливих соціальних катастроф. І все ж, як вважає М. М. Моїсєєв, «трудова діяльність [людини], а пізніше виробнича діяльність, є джерелом стабільності роду людського і його прогресу. Прагнення зберегти власну стабільність, стабільність своєї національної групи, свого колективу, свого класу є однією з найважливіших пружин, які підтримують функціонування механізму суспільної еволюції. Отже, закони суспільного розвитку, тенденції його розвитку не випадкові. Вони строго мотивовані всією історією еволюції людського суспільства, мають об'єктивний характер і, таким чином, стають пізнаваними».

Нагадаємо твердження, що стало вже стереотипним: кожна наука в міру її вдосконалення математизується. А отже, сучасний економіст, соціолог, психолог, політолог та інші просто змушені застосовувати відшліфований століттями математичний інструментарій, логічні можливості сучасних інформаційно-комп'ютерних технологій для генерування гіпотез, перевірки їх несуперечності, отримання висновків із визначених постулатів, здійснення модельних експериментів і отримання прогнозів.

У математичному моделюванні можна виділити два взаємозв'язані

етапи: постановка завдання і побудова моделі; дослідження сформованої моделі засобами конкретної математичної теорії.

Очевидно, що обидва етапи є складними, але якщо для другого етапу необхідне вільне володіння певною математичною технікою, то перший етап значно менше формалізований.

Часто кажуть про мистецтво моделювання, що ґрунтується тільки на досвіді та інтуїції дослідника. Методи системного аналізу, які розглянуто у пропонованому посібнику, покликані допомогти дослідникові опанувати мистецтвом постановки і вирішення реальних практичних завдань сучасної економіки.

У цій роботі розглядаються складні системи, під якими розуміють не обов'язково великі системи, а системи з низкою важливих властивостей. По-перше, система – це сукупність процесів, тобто об'єкт, поведінка якого визначається набором властивостей (набором процесів), а процес, у свою чергу, – це певна змінна властивість (характеристика) об'єкта дослідження. По-друге, складні системи мають такі ознаки:

- емерджентність;
- ієрархічність і самоподібність структур (фрактальність);
- нелінійність взаємодії між елементами і з зовнішнім середовищем;
- наявність узагалі «НЕ-властивостей», тобто «НЕ-факторів» чи «НЕ-ефектів», а саме: нелінійність, нестійкість, нерівноважність, незамкнутість (відкритість), незворотність, нестационарність процесів, неперіодичність, нерегулярність (хаотичність), непрогнозованість (малий горизонт прогнозу), недетермінованість (стохастичність), невідзначеність (нечіткість, нестохастичність тощо), негауссовість тощо;
- наявність як негативних, так і позитивних зворотних зв'язків;
- цілісність системи та ін.

При цьому основними ключовими поняттями, термінами та словами у пропонованому навчальному посібнику є: складна система, моделі та моделювання, НЕ- і БАГАТОфакторні моделі (нелінійність, невідзначеність, нестійкість, незамкнутість тощо; багатовимірність, багатопараметричність, багатоцільність, багатокритерійність тощо), нелінійна динаміка, синергетика, управління та прийняття рішень, прогнозування, стохастичність, нечіткість, хаос і хаотичність, біфуркація, особливості, дивний аттрактор, фрактал і мультифрактал, криза, катастрофа, ризик, безпека, сталий розвиток і т. д.

У вступі посібника стисло викладено сучасні погляди на роль математичного апарату, методів кібернетики та синергетики, сучасних інформаційних технологій для моделювання та аналізу складних процесів і систем у науковому пізнанні, в управлінні та прогнозуванні.

У першій частині досить докладно висвітлено питання моделювання та системного аналізу динамічних процесів (поняття моделей і моделювання, класифікація засобів моделювання, поняття економічної системи та принципи її моделювання, етапи економіко-математичного моделювання, основні принципи опису виробничої-технологічного рівня економічних систем, загальний вигляд математичних моделей та основні напрямки їхнього аналізу, класифікації економіко-математичних моделей, моделювання еколого-економічного управління виробничою системою в умовах нестабільності, принципи моделювання складних систем, новий підхід до прогнозування поведінки складних систем і катастрофічних процесів (русла і джокер), моделювання та управління ризиком, а також елементи теорії систем і системний аналіз, історія розвитку теорії систем і системного аналізу, наукові напрямки системного аналізу, система, її будова і функціонування, класифікація систем, структура, синергетичний підхід в аналізі складних систем та ін. Основна увага приділяється постановці задач і використанні для цих цілей методів системного аналізу, в тому числі й нових його напрямів.

У другій частині посібника представлено математичні основи нелінійної динаміки та аналізу складних систем, а саме: рівняння і відображення; моделі та аналіз нелінійних динамічних систем; системи звичайних диференціальних рівнянь; аналіз нелінійної системи з дискретним часом; нелінійні моделі складних систем з хаотичною динамікою (короткий огляд); елементи теорії стійкості систем; дослідження нелінійних економічних систем, що розвиваються; основи дослідження стійкості нелінійних динамічних систем; елементи теорії структурної динаміки; основи теорії катастроф та біфуркацій; елементи теорії дисипативних структур І. Пригожина та ін.

Подана елементарна інформація є достатньою для моделювання та якісного аналізу поведінки процесів і систем різної природи.

Третя частина роботи є найбільш масштабною і містить детальний виклад відомих і нових моделей та методів аналізу складних процесів і систем. Це, в першу чергу, базові математичні моделі та приклади їх застосування в дослідженні соціально-економічних процесів, а також елементи теорії «м'якого» моделювання, питання моделювання нелінійної економічної динаміки при врахуванні швидкості встановлення змінних стану системи, синергетичного моделювання та управління складними системами, питання глобального моделювання та аналізу світової динаміки, елементи теорії хаосу і хаотичної динаміки, фрактали і мультифрактали та їх застосування для аналізу складних економічних процесів та ін.

Четверта частина навчального посібника присвячена сучасним ін-

формаційним технологіям і програмним засобам, які застосовуються для нелінійного моделювання та аналізу соціально-економічних систем, зокрема моделі нечіткої логіки, нейромережевого моделювання та прогнозу складних систем, генетичні алгоритми, об'єктно-орієнтовані технології, інструментальні засоби комп'ютерного моделювання нелінійних систем, прикладні пакети комп'ютерного моделювання та аналізу, тобто пакети: Excel, MathCAD, MathLab, Deductor, AnyLogic та ін.

Звичайно, короткий, як правило, якісний (без доказів) виклад матеріалу не надасть можливості читачеві достатньо глибоко проникнути в суть проблем, які знаходяться на стику цілої низки наукових напрямків. Однак у списку цитованої літератури та додатках можна знайти багато додаткової інформації з цієї та суміжних тем.

Додатковий матеріал представлений в електронній версії у вигляді навчально-методичного комплексу дисципліни «Нелінійний аналіз економічних систем», який розроблений на кафедрі економічної кібернетики Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля (*Додаток Є*).

Тим не менше, знайомство, зокрема, з основними поняттями теорії диференційних та різницевих рівнянь в умовах широкого розповсюдження персональних комп'ютерів і відповідного дедалі «дружнішого» програмного забезпечення дає змогу користувачеві, навіть без спеціальної математичної освіти, самостійно проводити досить складні дослідження, лише зрідка звертаючись за консультаціями математиків.

РОЗДІЛ I

МОДЕЛЮВАННЯ ТА СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

ГЛАВА 1. МОДЕЛЬ, МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ І УПРАВЛІННЯ

1.1. Поняття моделей і моделювання

Термін «модель» часто вживається як у науковій, так і в загальноживаній мові, причому в різних ситуаціях у нього вкладається різний зміст. Слово «модель» походить від латинського *modulus*, що означає «міра, мірило, норма, зразок». Ми обмежимося тим значенням цього слова, що застосовується в широко поширеному методі дослідження, який називається моделюванням, – тобто розглянемо такі моделі, що є інструментом отримання знань.

Під «моделлю» розуміється така представлена у думках або матеріально реалізована система, яка в процесі пізнання, аналізу заміняє реальний об'єкт (систему), зберігаючи деякі, найбільш важливі для дослідження, його риси, при чому її вивчення дає нам нову інформацію про об'єкт. Отже, *модель* можна визначити як умовний образ (спрощене зображення) реального об'єкта (процесу), що створюється для більш глибокого вивчення дійсності.

Метод дослідження, що базується на розробці та використанні моделей, називається *моделюванням*. Моделювання як спосіб наукового пізнання з'явилося в античну епоху, одночасно з виникненням наукового пізнання. Нині важко назвати галузь, де б воно не застосовувалося.

Якими є основні положення методу моделювання і які його переваги змушують постійно вдаватися до цього методу в наукових дослідженнях?

У загальнофілософському плані очевидно, що аналіз процесу моделювання має розпочинатися з визнання реальності існування об'єктів, які моделюються, тобто визнання об'єктивної реальності. Цей аналіз ґрунтується на таких основних засадах теорії відображення:

1. Модель є відображенням реально існуючого об'єкта, причому ґносеологічним відображенням.

2. Модель є гомоморфним відображенням об'єкта, наслідком чого є скорочення і спрощення структури оригіналу. Модель відтворює лише основні, найбільш істотні для дослідження сторони досліджу-

ваного об'єкта. (*Гомоморфізм* – коли кілька властивостей об'єкта відображаються в одну. *Ізоморфізм* – взаємооднозначна відповідність (одна в одну)).

3. Модель завжди припускає участь у її створенні, конструюванні, виборі суб'єкта, який пізнає.

Розвиток методів моделювання визначає розвиток будь-якої науки і має величезне практичне значення. Необхідність моделювання обумовлена складністю, а часом і неможливістю прямого вивчення реального об'єкта (процесу). Значно доступніше створювати і вивчати прообрази реальних об'єктів (процесів), тобто моделі. Можна сказати, що теоретичне знання про щось, як правило, є сукупністю різних моделей. Ці моделі відображають істотні властивості реального об'єкта (процесу), хоча насправді дійсність значно змістовніша і багатша.

Отже, практичне значення моделювання полягає в тому, що:

- моделі більш зручні для дослідження, ніж самі об'єкти, крім того, деякі об'єкти можна вивчити тільки на моделях;
- моделювання дозволяє виявити найбільш істотні фактори досліджуваного об'єкта або явища, тому воно є інструментом для більш глибокого вивчення реальності.

1.2. Класифікація засобів моделювання

Класифікація методів моделювання і моделей може здійснюватися за рівнем детальності моделей, за характером ознак, за сферою застосування і т. ін.

Розглянемо одну з поширених класифікацій моделей за засобами моделювання, саме цей аспект є найбільш важливим при аналізі різних явищ і систем (рис. 1.1).

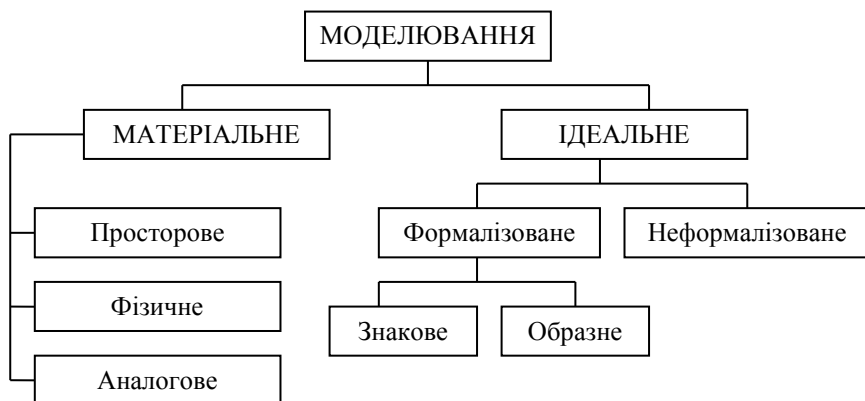


Рис. 1.1. Класифікація за засобами моделювання

За засобами моделювання методи моделювання поділяються на дві групи: методи матеріального і методи ідеального моделювання. Моделювання називається *матеріальним* тоді, коли дослідження здійснюється на моделях, зв'язок яких з досліджуванним об'єктом існує об'єктивно, має матеріальний характер. Моделі в цьому випадку будуються дослідником або вибираються ним із навколишнього світу. В свою чергу, в матеріальному моделюванні можна виділити: просторове, фізичне й аналогове моделювання.

У просторовому моделюванні використовуються моделі, призначені для того, щоб відтворити або відобразити просторові властивості досліджуваного об'єкта. Моделі в цьому випадку геометрично подібні до об'єктів дослідження (будь-які макети).

Моделі, які використовуються у фізичному моделюванні, призначені для відтворення динаміки процесів, що відбуваються в досліджуваному об'єкті. Причому спільність процесів в об'єкті дослідження і моделі заснована на подібності їхньої фізичної природи. Цей метод моделювання широко поширений у техніці при проектуванні технічних систем різних видів. Наприклад, дослідження літальних апаратів на основі експериментів в аеродинамічній трубі.

Аналогове моделювання пов'язане з використанням матеріальних моделей, які мають іншу фізичну природу, але описуються тими ж математичними співвідношеннями, що й досліджуваний об'єкт. Воно засноване на аналогії в математичному описі моделі та об'єкта (вивчення механічних коливань за допомогою електричної системи, яка описується тими ж диференціальними рівняннями, але більш зручна для проведення експериментів).

В усіх випадках матеріального моделювання модель – це матеріальне відображення вихідного об'єкта, а дослідження полягає в матеріальному впливі на модель, тобто в експерименті з моделлю. Матеріальне моделювання за своєю природою є експериментальним методом і в економічних дослідженнях не застосовується.

Від матеріального моделювання принципово відрізняється *ідеальне* моделювання, засноване на ідеальному, уявному зв'язку між об'єктом і моделлю. Методи ідеального моделювання широко застосовуються в економічних дослідженнях. Їх умовно можна розділити на дві групи: *формалізоване* і *неформалізоване*.

У формалізованому моделюванні моделлю служать системи знаків або образів, разом з якими задаються правила їхнього перетворення та інтерпретації. Якщо в якості моделей використовуються системи знаків, то моделювання називається *знаковим* (креслення, графіки, схеми, формули).

Важливим видом знакового моделювання є *математичне* моделювання, засноване на тому факті, що різні досліджувані об'єкти та яви-

ща можуть мати однаковий математичний опис у вигляді сукупності формул, рівнянь, перетворення яких здійснюється на основі правил логіки і математики.

Іншою формою формалізованого моделювання є *образне*, в якому моделі будуються на наочних елементах (пружні кулі, потоки рідини, траєкторії руху тіл). Аналіз образних моделей здійснюється подумки, тому вони можуть бути віднесені до формалізованого моделювання, коли правила взаємодії об'єктів, які використовуються в моделі, чітко фіксовані (наприклад, в ідеальному газі зіткнення двох молекул розглядається як зіткнення куль, причому результат зіткнення мислиться всіма однаково). Моделі такого типу широко застосовуються у фізиці, їх називають «уявними експериментами».

Неформалізоване моделювання. До нього можна віднести такий аналіз різних проблем, коли модель не формується, а замість неї використовується певне, чітко не зафіксоване, уявне відображення реальної дійсності, що служить основою для міркувань і прийняття рішення. Отже, будь-яке міркування, що не застосовує формальну модель, можна вважати неформалізованим моделюванням, коли мислячий індивідум має певний образ об'єкта дослідження, який можна інтерпретувати як неформалізовану модель реальності.

Дослідження економічних об'єктів протягом тривалого часу здійснювалося тільки на основі таких невизначених уявлень. Нині аналіз неформалізованих моделей залишається найбільш поширеним засобом економічного моделювання, коли будь-яка людина, яка приймає економічне рішення без використання математичних моделей, змушена керуватися тим чи іншим описом ситуації, заснованою на досвіді та інтуїції.

Основним недоліком цього підходу є те, що рішення може виявитися малоефективним або помилковим. Ще тривалий час, очевидно, ці методи залишатимуться основним засобом прийняття рішень не тільки в більшості повсякденних ситуацій, а й при прийнятті рішень в економіці.

1.3. Поняття економічної системи і принципи її моделювання

Система – множина взаємопов'язаних у єдину структуру цілеспрямовано функціонуючих елементів. Кожній системі властиві своя мета функціонування, структура, можливість відособленого від зовнішнього середовища розгляду й аналізу її частин.

Отже, для того щоб об'єкт був системою, необхідно:
сукупність елементів кількістю більше одного;

наявність взаємозв'язку між елементами, відносин, що з'єднують їх у єдине ціле;

наявність мети, для реалізації якої призначена сукупність, що розглядається;

наявність суб'єкта дослідження (спостерігача), що формує систему;

наявність зовнішнього середовища щодо системи і відображення його взаємозв'язків із системою.

Тому такі економічні об'єкти, як усе народне господарство в цілому, галузь, регіон, окреме підприємство і т. ін., можуть бути названі економічними системами.

Економічні системи – це керовані системи. У широкому розумінні під керуванням мається на увазі конкретна організація тих чи інших процесів для досягнення визначених цілей. Керована система має забезпечити цілеспрямоване функціонування при змінних внутрішніх або зовнішніх умовах.

В економічній системі вибір і формування як структури, так і способу функціонування є завданнями керування, що забезпечують динаміку соціально-економічного розвитку. Однак співвідношення типів завдань – формування виробничо-організаційної структури самої системи і способу її функціонування – різняться на різних рівнях ієрархії управління.

Розглянемо загальну принципову схему систем управління. Будь-яке управління передбачає наявність об'єкта управління (керованої системи), апарату, що безпосередньо здійснює процеси управління (керуючої системи), суб'єкта управління і зовнішнього середовища.

Об'єкт управління здійснює ті чи інші дії для реалізації визначених цілей. Складність об'єкта управління залежить від кількості елементів, які входять до його складу, і природи взаємозв'язків між ними. У процесі функціонування об'єкт управління піддається впливові зовнішнього середовища, що може сприяти або перешкоджати досягненню поставленої мети.

Основне призначення керуючої системи – підтримувати встановлений і за якимись властивостями визнаний нормальний режим роботи об'єкта управління, а також забезпечувати нормальне функціонування окремих елементів об'єктів управління в умовах впливу зовнішнього середовища.

Об'єкт управління у взаємодії з керуючою системою утворює замкнену систему управління (рис. 1.2).

Зв'язок, за допомогою якого система управління впливає на об'єкт управління, якщо він є, називається зворотним. Вхідним сигналом для зворотного зв'язку є вихідний сигнал системи Y . Якщо цей сигнал не відповідає цілям управління замкненою системою, то керуюча система виробляє вплив зворотного зв'язку ΔX , що разом з X надходить на вхід об'єкта управління (X , Y , ΔX – вектори відповідних вимірів). У

правильно працюючій, з погляду поставленої мети, системі сигнал $X + \Delta X$ повинен сприяти поліпшенню якості функціонування замкненої системи управління. Кількісні оцінки ступеня досягнення мети в моделі управління даються у вигляді значень цільової функції (функціонала), а умови, у рамках яких функціонує система, – у вигляді обмежень моделі. Ціль оптимального управління – знайти найкращий, з погляду прийнятої умови, критерій оптимізації. Для конкретних ситуацій при виборі способу управління, господарювання або ведення діяльності він реалізується у вигляді екстремального значення функціонала. Не в кожній системі управління здійснюється за допомогою зворотного зв'язку (наприклад, керування вуличним рухом за допомогою світлофора). Це залежить від цілей системи.

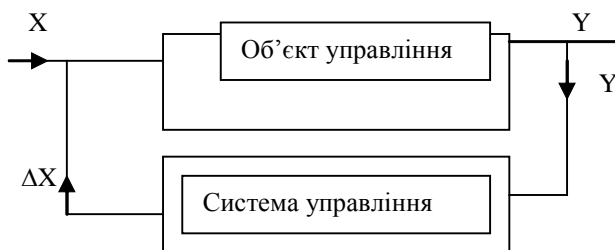


Рис. 1.2. Структура системи управління,
де X – це вплив зовнішнього середовища на об'єкт управління,
 Y – реакція системи на вплив X

Будь-яка економічна система є керованою системою зі зворотним зв'язком. У техніці вплив керуючих систем на об'єкти управління здійснюється через зворотний зв'язок за допомогою всіляких підсилювачів, кермових приводів та інших механізмів. В економіці це можуть бути, наприклад, додаткові фонди на сировинні та матеріальні ресурси, зміна планових показників та інші фактори управління виробничими процесами.

Отже, у структурі системи управління можна виділити:

об'єкт управління – безпосередній пристрій, агрегат, підсистема загальної системи, в якій реалізовується мета функціонування всієї системи;

керуюча система – орган управління (в економічній літературі його іноді називають суб'єктом управління, що фіксує параметри об'єкта управління і здійснює за необхідності керуючі впливи на об'єкт управління для приведення його функціонування в режим, який відповідно до мети управління прийнято вважати нормальним. Якщо досягнення такого режиму в умовах наявних ресурсів системи немож-

ливо, то в якості нормального може бути прийнято режим, що відхиляється від бажаного мінімально);

зворотний зв'язок – об'єкт, підсистема, за допомогою якої реалізовується вплив керуючої системи на керований об'єкт.

Ці елементи, що формують у сукупності замкнену систему управління, перебувають під впливом зовнішнього середовища, що може сприяти або перешкоджати досягненню цілей системи.

Представлений схематичний опис замкненої системи управління досить спрощений і відображає тільки принцип її побудови. В дійсності кожен із зазначених елементів, у свою чергу, може включати об'єкт, суб'єкт управління зі зворотним зв'язком або без нього; уся система буде мати, таким чином, ієрархічну структуру. Це взагалі є характерним для економічних систем. Наприклад, у системі управління галуззю в якості об'єкта управління варто розглядати підвідомчі міністерству підприємства, а в якості керуючого органу – апарат міністерства. Зворотний зв'язок при цьому здійснюється через систему обліку, контролю та оперативного управління стосовно підприємств з боку міністерства. Кожне підприємство, будучи, таким чином, об'єктом управління з боку міністерства, в свою чергу є замкненою системою управління з усіма необхідними структурними елементами. Об'єкти управління – цехи, виробничі ділянки; керуюча система – дирекція, заводоуправління; зворотний зв'язок здійснюється також через систему обліку, контролю та оперативного управління з боку керівництва підприємства.

Якщо спускатися цією ієрархічною градацією, то за аналогічною схемою можна розглянути систему управління цехом. У керуванні народним господарством такі ієрархічні побудови можуть бути багатовступневими.

Викладене вище стосується характеристики систем управління без врахування їхньої природи – фізичної, виробничо-технологічної, соціально-економічної. Однак економічні системи мають певні особливості.

Економічна система охоплює параметри і характеристики суспільного виробництва, розподілу, обміну і споживання матеріальних благ. У будь-якій економічній системі, від ділянки цеху до всього народного господарства, можна виділити два рівні: виробничо-технологічний і соціально-економічний, які тісно пов'язані між собою.

При дослідженні виробничо-технологічного рівня вивчаються виробничі можливості економічних систем. На соціально-економічному рівні визначається, яким чином реалізуються виробничі можливості, тобто розглядається взаємодія людей.

При моделюванні виробничих можливостей економічну систему

розбивають на окремі елементарні економічні одиниці, потім описують виробничі можливості кожної з них, а також обмін ресурсами і продуктами між ними. Використання добре розроблених принципів моделювання неживої природи дає змогу будувати моделі цього рівня порівняно легко. Незамкненість цих моделей, тобто наявність зовнішніх впливів на перебіг виробничих процесів, до яких можна віднести й соціально-економічний фактор, не є перешкодою для їхнього дослідження, особливо коли йдеться про вибір найбільш раціонального варіанта виробничого процесу. Саме при побудові й аналізі таких задач досягнуто найбільших успіхів у застосуванні методів економіко-математичного моделювання.

Задача моделювання соціально-економічних явищ є надзвичайно складною. Для побудови адекватних математичних моделей явищ цього типу необхідно правильно описувати цілі груп людей і окремих індивідуумів, а також фактори, що впливають на цю ціль, вміти аналізувати конфлікти, які виникають у людському суспільстві, та шляхи їхнього рішення. На сьогодні ще не створено достатньо гарних моделей соціально-економічного рівня.

Для того щоб обійти цю перешкоду при моделюванні економічних систем, застосовують такий методичний прийом: закономірності, що описують взаємодію людей з природою (виробничо-технологічний рівень), розглядаються окремо від взаємодії людей (соціально-економічний рівень). Соціальний фактор при цьому можна розглядати як зовнішній вплив на модель.

І все ж, незважаючи на нібито природний поділ економічних систем на два рівні, вивчення тільки виробничо-технологічного рівня пов'язане з труднощами при аналізі економічних проблем, бо і у вирішенні практичних завдань технологічні та соціальні проблеми тісно пов'язані між собою.

В наш час ці ж труднощі частково можуть виникати при застосуванні системного підходу в моделюванні, що знайшло своє втілення в людино-машинних імітаційних системах прийняття рішень.

1.4. Етапи економіко-математичного моделювання

В економіко-математичному моделюванні найскладніше – це побачити в економічній проблемі математичний зміст. Для цього потрібно добре розуміти економічну сутність проблеми і володіти необхідним математичним інструментарієм. Процес економіко-математичного моделювання можна розділити на кілька основних етапів.

1. Постановка економічної проблеми та її якісний аналіз.

Головне тут – чітко сформулювати сутність проблеми, прийняті

допущення і ті питання, на які потрібно отримати відповіді. Цей етап включає:

- виділення найістотніших рис і властивостей об'єкта, що моделюється, й абстрагування їх від другорядних;
- вивчення структури об'єкта й основних залежностей, що пов'язують його елементи;
- формулювання гіпотез (хоча б попередніх), що пояснюють поведінку і розвиток об'єкта.

2. Побудова математичної моделі.

Це етап формалізації економічної проблеми, формулювання її у вигляді конкретних математичних залежностей і відносин (функцій, рівнянь, нерівностей і т. ін.).

Математичною моделлю реального об'єкта (явища) називається її спрощена, ідеалізована схема, складена за допомогою математичних символів і операцій (співвідношень).

Отже, для отримання математичної моделі спочатку вводиться система літерних позначень елементів реального об'єкта, а потім, на основі вивчення існуючих взаємозв'язків між цими елементами, складаються їхні математичні співвідношення їх (рівняння, нерівності та ін.).

Зазвичай спочатку визначається основна конструкція (тип) математичної моделі, а потім уточнюються деталі цієї конструкції (конкретний перелік змінних і параметрів, форма зв'язків). Таким чином, побудова моделі підрозділяється, у свою чергу, на кілька стадій.

Найважливіша проблема моделювання – адекватність (відповідність, збіг) моделі оригіналові. До моделі пред'являються суперечливі вимоги:

- з одного боку, вона повинна за можливості якнайповніше збігатися з оригіналом; чим більший такий збіг, тим цінніше знання, отримане при дослідженні моделі;
- з іншого боку, неправильно вважати, що чим більше фактів враховує модель, тим вона краще «працює» і дає кращі результати. Те ж можна сказати і про такі характеристики складності моделі, як використані форми математичних залежностей (лінійні та нелінійні), облік факторів випадковості та невизначеності та ін.

Отже, модель повинна бути якомога простішою, щоб її було легше досліджувати. У розв'язанні цього протиріччя й полягає проблема адекватності моделі. Крім того, потрібно враховувати не тільки реальні можливості інформаційного і математичного забезпечення, а й зіставляти витрати на моделювання з отриманим ефектом (при зростанні складності моделі приріст витрат може перевищити приріст ефекту).

У зв'язку з цим, одним із головних принципів моделювання є

такий: модель повинна відповідати оригіналові тільки в головному, істотному, у тому, що цікавить дослідника; усе несуттєве повинно бути відкинуто.

Одна з важливих особливостей математичних моделей – потенційна можливість їхнього використання для вирішення різноякісних проблем. Тому, навіть зіштовхуючись із новою економічною задачею, не треба прагнути «винаходити» модель; спочатку необхідно спробувати застосувати для її вирішення вже відомі моделі. У процесі побудови моделі здійснюється взаємозіставлення двох систем наукових знань – економічних і математичних. Природно прагнути того, щоб одержати модель, що належить до добре вивченого класу математичних задач. Часто це вдається зробити шляхом певного спрощення тих вхідних передумов моделі, які не спотворюють істотних рис об'єкта, що моделюється. Однак можлива й така ситуація, коли формалізація економічної проблеми призводить до не відомої раніше математичної структури.

3. Математичний аналіз моделі.

Метою цього етапу є з'ясування загальних властивостей моделі. Тут застосовуються суто математичні прийоми дослідження. Найбільш важливий момент – доказ існування розв'язків у сформульованій моделі (теорема існування). Якщо вдається довести, що математична задача не має розв'язків, то необхідність у наступній роботі з первісним варіантом моделі відпадає; варто скорегувати або постановку економічної задачі, або способи її математичної формалізації. При аналітичному дослідженні моделі з'ясовуються такі питання: чи єдиним є розв'язок, які змінні (невідомі) може вмістити розв'язок, які будуть співвідношення між ними, в яких межах і залежно від яких вихідних умов вони змінюються, які тенденції їхньої зміни і т. д.

Аналітичне дослідження моделі порівняно з емпіричним (чисельним) має ту перевагу, що отримані висновки зберігають свою силу за різних конкретних значень зовнішніх і внутрішніх параметрів моделі. Знання загальних властивостей моделі має велике значення. Часто заради доказу цих властивостей дослідники свідомо йдуть на ідеалізацію первісної моделі. Однак моделі складних економічних об'єктів дуже важко піддаються аналітичному дослідженню. У тих випадках, коли аналітичними методами не вдається з'ясувати загальні властивості моделі, а спрощення моделі призводить до неприпустимих результатів, переходять до чисельних методів дослідження.

4. Підготовка вхідної інформації.

Моделювання висуває чіткі вимоги до системи інформації. Тим часом реальні можливості отримання інформації обмежують вибір моделей, що призначаються для практичного використання. При цьому

береться до уваги не тільки принципова можливість підготовки інформації (за визначені терміни), а й витрати на підготовку відповідних інформаційних масивів. Ці витрати не повинні перевищувати ефект від використання додаткової інформації. Під час підготовки інформації широко застосовуються методи теорії ймовірностей, теоретичної та математичної статистики. При системному економіко-математичному моделюванні вхідна інформація, що використовується в одних моделях, є результатом функціонування інших моделей.

5. Чисельний розв'язок.

Цей етап включає розробку алгоритмів для чисельного розв'язку задачі, складання програм на ЕОМ і безпосереднє здійснення розрахунків. Труднощі цього етапу обумовлені, насамперед, великою розмірністю економічних задач, необхідністю обробки значних масивів інформації. Зазвичай розрахунки за економіко-математичною моделлю мають багатоваріантний характер. Завдяки високій швидкодії сучасних ЕОМ вдасться проводити численні «модельні» експерименти, вивчаючи поведінку моделі при різних змінах певних умов. Дослідження, здійснене чисельними методами, може істотно доповнити результати аналітичного дослідження, а для багатьох моделей воно є єдино здійсненним. Клас економічних задач, які можна розв'язувати чисельними методами, значно ширший за клас задач, доступних аналітичному дослідженню.

6. Аналіз чисельних результатів та їхнє застосування.

На цьому, завершальному, етапі циклу постає питання про правильність і повноту результатів моделювання, про ступінь практичної застосовності останніх. Математичні методи перевірки можуть виявляти некоректність побудови моделі і тим самим звужувати клас потенційно правильних моделей. Неформальний аналіз теоретичних висновків і чисельних результатів, отриманих за допомогою моделі, зіставлення їх з наявними знаннями і фактами дійсності також дозволяють виявляти недоліки постановки економічної задачі, сконструйованої математичної моделі, її інформаційного і математичного забезпечення.

Взаємозв'язки етапів

Варто звернути увагу на зворотні зв'язки етапів, що виникають унаслідок того, що в процесі дослідження виявляються недоліки попередніх етапів моделювання. Вже на етапі побудови моделі може з'ясуватися, що постановка задачі суперечлива або приводить до занадто складної математичної моделі. Відповідно до цього вхідна постановка задачі коректується.

Далі математичний аналіз моделі (етап 3) може показати, що незначна модифікація постановки задачі або її формалізація дає цікавий аналітичний результат. Найчастіше необхідність повернення до попе-

редніх етапів моделювання виникає при підготовці вхідної інформації (етап 4). Може виявитися, що необхідна інформація відсутня або ж витрати на її підготовку занадто великі. Тоді доводиться повертатися до постановки задачі та її формалізації, змінюючи їх так, щоб пристосуватися до наявної інформації або наявних методів розв'язку.

У міру розвитку та ускладнення економіко-математичного моделювання його деякі етапи виокремлюються в спеціалізовані області досліджень, посилюються розходження між теоретико-аналітичними і прикладними моделями, відбувається диференціація моделей за рівнями абстракції та ідеалізації.

На етапі практичного використання моделей головну роль повинні відігравати фахівці у відповідній області економічного аналізу, планування, управління. Основною ділянкою роботи економістів-математиків залишається постановка і формалізація економічних задач та синтез процесу економіко-математичного моделювання.

1.5. Основні принципи опису виробничо-технологічного рівня економічних систем

Процес моделювання починається з аналізу проблеми, в результаті якого формулюється змістовна постановка задачі моделювання (етап 1).

Розглянемо основні принципи опису змістовної постановки задачі моделювання виробничо-технологічного рівня економічних систем.

1. Досліджувана економічна система (народне господарство, галузь, регіон і т. ін.) завжди моделюється у вигляді сукупності певної кількості елементарних економічних одиниць, кожна з яких має в економічній системі визначені функції, пов'язані з виробництвом, споживанням і розподілом матеріальних благ. Питання про те, в якій сукупності елементарних економічних одиниць представити досліджувану систему, вирішується залежно від цілей і завдань дослідження. Наприклад, народне господарство в цілому можна описати як сукупність виробничих галузей, кожна з яких виробляє єдиний продукт, що відображає сумарну вартість продукції галузі. В інших випадках народне господарство можна представити як сукупність економічних регіонів. Нарешті, народне господарство часто описують як єдину економічну одиницю, в якій виробляється єдиний продукт, що використовується як для створення нових виробничих фондів, так і для споживання.

Отже, та сама економічна система залежно від цілей може моделюватися як елементарна або розглядатися як складна система, що складається з елементарних економічних одиниць.

2. При описі будь-якої економічної системи виробничо-технологічний рівень цієї системи моделюється на основі матеріальних закономірностей виробництва, розподілу і споживання матеріальних благ.

Тому при побудові ЕММ насамперед необхідно сформулювати список матеріальних благ, що будуть фігурувати в моделі. Часто матеріальні блага називають продуктами, включаючи сюди сировину, матеріали та інші ресурси. Питання про виділення списку продукції є складною проблемою і залежить від мети дослідження та типу досліджуваної системи. Якщо розглядається ділянка цеху, то список продуктів може включати деталі, які він випускає, перелік сировини, що використовується, і т. ін. В якості одиниць виміру можуть бути обрані натуральні (штуки, кілограми, метри тощо).

Якщо розглядати модель галузі, то описувати виробництво в докладній номенклатурі трудомістко і недоцільно. Тому в таких моделях використовується агрегована номенклатура продуктів, а в якості одиниць виміру завжди беруться вартісні. А отже, при моделюванні дуже важливо вибрати рівень агрегування, тобто сформулювати список продуктів так, щоб побудована модель могла стати основою для вивчення явищ, що цікавлять дослідника.

Виробництво не можливе без участі людей. Трудові ресурси описуються на основі чисельності працівників різних спеціальностей або кількості людино-годин, які працівники можуть відробити за визначений період часу. Часто всі трудові ресурси агрегуються в єдиний показник – загальну кількість трудових ресурсів.

Після вибору елементарних економічних одиниць і списку продуктів необхідно описати потоки ресурсів і продуктів між цими економічними одиницями. Потоки матеріальних благ повинні задовольняти закони збереження речовини, що виражаються у вигляді балансових співвідношень. Загальний принцип побудови балансових співвідношень можна сформулювати так: сумарне споживання будь-якого продукту не перевищує (або дорівнює) суму його вхідних запасів, виробництва в системі та зовнішніх поставок:

$$P + Y < = U + V + X ,$$

де U – запаси;

V – постачання зовні,

Y – кінцевий продукт (вихід),

X – виробництво в системі,

P – постачання до іншої системи.

Принцип балансу поширюється на опис трудових ресурсів. Крім балансових співвідношень, в опис потоків продуктів включаються також різні обмеження на величину цих потоків (наприклад, $X \leq D$).

Важливим елементом моделювання є встановлення і формулювання в математичній формулі закономірностей перетворення продуктів і ресурсів у системі. Співвідношення, що відображає закон випуску

продукції, прийнято називати виробничими функціями.

Отже, для побудови ЕММ необхідно:

- здійснити декомпозицію системи на елементарні економічні одиниці;
- сформулювати перелік матеріальних ресурсів і вибрати їхні одиниці виміру;
- сформулювати обмеження на потоки продуктів і ресурсів;
- описати потоки матеріальних ресурсів на основі балансових співвідношень;
- описати закони перетворення ресурсів і продуктів на основі виробничих функцій.

1.6. Загальний вид математичних моделей та основні напрямки їхнього аналізу

Наступним кроком моделювання є формалізація задачі моделювання (побудова математичної моделі – етап 2).

Процес побудови математичної моделі для різних економічних явищ і процесів має деякі загальні риси:

вибір змінних, тобто набору нефіксованих заздалегідь величин, що описують той чи інший бік явища, що моделюється. При цьому необхідно вказати, які значення можуть приймати змінні та які перетворення можна робити з ними. Відомі параметри задачі щодо її математичної моделі вважаються зовнішніми (заданими апріорі, тобто до побудови моделі). В економічній літературі їх називають екзогенними змінними. Значення ж змінних, які невідомі спочатку, обчислюються в результаті дослідження моделі, тому стосовно моделі вони вважаються внутрішніми. В економічній літературі їх називають ендегенними змінними;

формулювання обмежень моделі. Обмеженнями є математичний опис за допомогою рівнянь, нерівностей, функцій та інших відносин взаємозв'язків між елементами моделі (параметрами, змінними), з огляду на зміст задачі, яка розглядається.

Сукупність обмежень, що накладаються на змінні або поєднують їх, і є математичною моделлю досліджуваної системи. У найбільш загальному вигляді модель можна записати так:

$$z \in G(z) \subset Z,$$

де z – змінні моделі,

Z – простір усіх змінних;

$G(z)$ – множина припустимих значень змінних, обумовлена обмеженнями моделі.

Розглянемо основні напрямки аналізу ЕММ (етап 3).

За призначенням можна виділити *моделі опису* і *моделі прийняття рішення*.

Моделі опису відображають зміст і основні властивості економічних об'єктів як таких. З їхньою допомогою обчислюються числові значення економічних факторів і показників. До таких моделей можна віднести економіко-статистичні, або економетричні моделі. Як правило, ці моделі дають загальні уявлення про об'єкт, процеси в об'єкті, що моделюється, відображаються в агрегованому вигляді, максимально узагальнено. Але, незважаючи на це, значимість цих моделей велика, тому що вони дають можливість вивчати явища цілком, комплексно і дозволяють знайти фундаментальні властивості об'єктів і процесів. Методами дослідження та побудови цих моделей є методи і критерії математичної статистики (кореляційний, регресійний аналіз та ін.). Інформаційною базою, як правило, є статистичні вибірки і часові ряди. Галузь застосування цих моделей досить велика: моделі економіки країни, моделі розширеного відтворення, моделі попиту та пропозиції, виробничі функції.

Моделі прийняття рішень допомагають знайти найкращі варіанти планових показників або управлінських рішень. Серед них найменш складними є балансові та оптимізаційні моделі, за допомогою яких описуються (моделюються) задачі типу планування, а найбільш складними – ігрові моделі, що описують задачі конфліктного характеру з урахуванням перетинання різних інтересів. Ці моделі відрізняються від моделей опису тим, що в них передбачена можливість вибору значень керуючих параметрів (чого немає в описових моделях).

Якщо $G(z)$, обумовлена системою рівнянь, має єдине рішення $z_0 \in G(z)$, то завдання полягає в знаходженні z_0 та його дослідженні. До цього класу моделей належать, наприклад, міжгалузеві балансові моделі народного господарства.

Якщо є множина $\{z\} \subset G(z)$, то постає задача вибору найкращого рішення з цієї множини $\{z\}$. Для вибору найкращого рішення необхідно вказати систему величин, що характеризують якість кожного з можливих рішень, тобто систему показників якості $f_i(z)$. До таких показників якості належать прибуток, рентабельність, собівартість та інші економічні показники. Значення цих показників є основою для вибору рішення. В наш час у рамках цього підходу існують два напрямки: оптимізаційний підхід і багатокритерійна оптимізація.

Оптимізаційний підхід заснований на формулюванні єдиного показника (цільової функції), величина якого є критерієм для вибору рішення.

Залежно від виду цільової функції та системи обмежень (виду моделі: лінійна, нелінійна, динамічна, стохастична та ін.) розроблені та

застосовуються різні методи розв'язку, а саме:

- а) лінійного програмування,
- б) нелінійного програмування,
- в) динамічного програмування,
- г) параметричного програмування (модель залежить від параметрів),
- д) стохастичного програмування (змінні є випадковими величинами).

Багатокритерійна оптимізація (векторна оптимізація)

Цілеспрямоване функціонування економічної системи, за винятком найпростіших окремих випадків, за своєю природою багатокритерійне. Це означає, що в процесі функціонування, наприклад, підприємства одночасно прагнуть мети: отримати максимально можливі прибутки і випустити продукцію в натуральному або вартісному вираженні, одночасно з цим витримати встановлені показники за номенклатурою або асортиментом, знизити собівартість, досягти визначеного рівня якості та рентабельності виробленої продукції і т. ін.

У цьому випадку для оцінки розв'язку вибирається кілька показників (критеріїв якості) – вектор критеріїв:

$$\bar{F} = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_k(z)).$$

Методи прийняття рішень при декількох критеріях у 70-х р. ХХ ст. перетворилися в самостійну область досліджень. У задачах багатокритерійної оптимізації для кожного $z \in G(z)$ маємо вектор критеріїв $\bar{F} = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_k(z)) \subset G_F(z)$, де $G_F(z)$ – множина тих значень показників, що досяжні за всіх припустимих значень z . Для вибору оптимального розв'язку в цих задачах розробляються спеціальні методи, засновані на залученні до дослідження людини або групи осіб, відповідальних за прийняття рішень (ОПР). Можна виділити дві групи методів:

1. *Методи, засновані на виборі та розробці дозвільного правила, тобто формалізованого опису принципів, якими керується людина при прийнятті рішень.*

2. *Методи, що дозволяють представити всю множину рішень у цілому для того, щоб дослідник міг вибрати те рішення, яке більше його влаштовує.*

Розглянемо деякі методи першої групи.

Принцип згортки. Окремим випадком такого правила є представлення інтересів людини у вигляді оптимізації єдиного критерію, одержуваного як згортка заданих критеріїв оптимізації: для кожного z кри-

теріїв (цільових функцій) $\overline{F} = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_k(z))$ експертним шляхом призначаються «ваги» (числа) $a_1, \dots, a_n : a_i \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i = 1$, причому a_i показує «важливість або значимість» критерію $f_i(z)$. Далі розв'язок z^* з множини припустимих розв'язків Z вибирається так, щоб максимізувати (або мінімізувати) згортку критеріїв: $\max \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(z^*)$.

Принцип лексикографічної переваги. Це ще один принцип оптимальності в задачах багатокритерійної оптимізації. Спочатку критерії ранжуються за «важливістю». Нехай таке ранжування складене:

$$f_1(z), \dots, f_n(z).$$

Розв'язок $z^* \in Z$ «кращий» за розв'язок $z \in Z$ за змістом лексикографічної переваги, якщо виконано одну з n умов:

$$1) f_1(z^*) > f_1(z);$$

$$2) f_1(z^*) = f_1(z), f_2(z^*) > f_2(z);$$

$$3) f_1(z^*) = f_1(z), f_2(z^*) = f_2(z), f_3(z^*) > f_3(z);$$

.....

$$n) f_i(z^*) = f_i(z) \quad i = 1, (n-1), f_n(z^*) > f_n(z).$$

Принцип оптимальності за Парето. Цей принцип припускає в якості оптимальних такі розв'язки z^* , для яких поліпшення значення будь-якого критерію неможливе без погіршення інших. Інакше кажучи: вектор значень показників $\overline{F^*}(f_i) \in G_F(z)$ називається ефективним (непокрашуваним, оптимальним за Парето), якщо не знайдеться іншої такої точки, що належить $G_F(z)$, але була б не гіршою $\overline{F^*}(f_i)$ за всіма показниками і перевершувала його хоча б за одним. Множина всіх ефективних точок $G_F(z)$ називається ефективною множиною (або множиною Парето). Ті припустимі значення z , для яких $\overline{F}(f_i)$ належить ефективній множині, теж називаються ефективними.

На рисунку 1.3 точка $A0$ не є ефективною, тому що є точка $A1$, в якій значення за обома критеріями переважніше ($f_1(A0) < f_1(A1)$, $f_2(A0) < f_2(A1)$).

Імітаційні системи. Достатньо адекватні моделі економічних явищ можуть виявитися такими складними, що їх не вдається розв'язати за

допомогою оптимізаційних методів і методів багатокритерійної оптимізації. У цих випадках останнім часом (з 60–70-х рр. XX ст.) почали широко застосовуватися імітаційні експерименти.

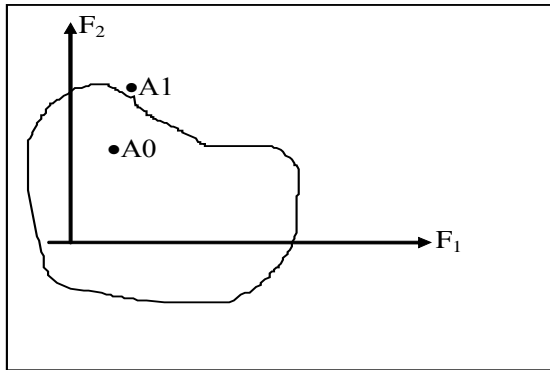


Рис. 1.3. Множина ефективних точок за Парето

Ідея імітаційних експериментів полягає в наступному: задаються параметри системи і знаходиться один з можливих розв’язків $z_0 \in G(z)$, для чого обчислюються значення обраних критеріїв $f_i(z_0)$. На цьому дослідження одного варіанта завершується. Потім змінюються параметри системи і знаходиться інший розв’язок, і т. д. Переглянувши результати великої кількості варіантів, можна скласти загальне уявлення про можливості системи і вибрати найкраще управління. Для достатньо повного вивчення можливостей системи необхідно переглянути величезну кількість варіантів управління, що часто виявляється практично нездійсненним навіть за допомогою ЕОМ. Тому в імітаційних експериментах доцільно досліджувати лише найцікавіші варіанти, для вибору яких варто використовувати оптимізаційні методи і методи багатокритерійної оптимізації, що застосовуються до спрощених моделей. При цьому дослідження виходить за рамки звичайного імітаційного експерименту. У ньому використовується сукупність різних методів і моделей, об’єднаних у так звану *імітаційну модель*, або *імітаційну систему*.

Імітаційна модель поряд з машинними розв’язками містить блоки, де рішення приймаються людиною (експертом). Замість особистої участі людини в прийнятті рішень може виступати база знань. У цьому випадку ЕОМ, спеціалізоване програмне забезпечення, база даних і база знань утворюють експертну систему. Експертна система призначена для розв’язання однієї або низки задач методом імітації дій людини – експерта в цій галузі.

1.7. Класифікація економіко-математичних моделей

Математичні моделі економічних процесів і явищ більш коротко можна назвати економіко-математичними моделями. Для класифікації цих моделей використовуються різні критерії.

За *цільовим призначенням* економіко-математичні моделі поділяються на: *теоретико-аналітичні*, що використовуються в дослідженнях загальних властивостей і закономірностей економічних процесів, і *прикладні*, які застосовуються для розв'язання конкретних економічних задач (моделі економічного аналізу, прогнозування, управління).

Економіко-математичні моделі можуть застосовуватися для дослідження різних аспектів народного господарства (зокрема його виробничо-технологічної, соціальної, територіальної структури) та його окремих частин.

За *економічними процесами, що досліджуються*, можна виділити: *моделі народного господарства в цілому і моделі його підсистем* – галузей, регіонів і т. ін.

За *змістовною проблематикою: комплекси моделей виробництва, споживання, формування і розподілу прибутків, трудових ресурсів, ціноутворення, фінансових зв'язків* і т. ін.

Зупинимося більш докладно на характеристиці таких класів економіко-математичних моделей, з якими пов'язані найбільші особливості методології та техніки моделювання.

Відповідно до загальної класифікації математичних моделей, вони підрозділяються на *функціональні* і *структурні*, а також включають проміжні форми (*структурно-функціональні*). У дослідженнях на народногосподарському рівні частіше застосовуються структурні моделі, оскільки для планування та управління велике значення мають взаємозв'язки підсистем. Типовими структурними моделями є моделі міжгалузевих зв'язків. Функціональні моделі широко використовуються в економічному регулюванні, коли на поведінку об'єкта («вихід») впливають шляхом зміни «входу». Прикладом може служити модель поведінки споживачів в умовах товарно-грошових відносин. Той самий об'єкт може описуватися одночасно і структурною, і функціональною моделлю. Так, наприклад, для планування окремої галузевої системи використовується структурна модель, а на народногосподарському рівні кожна галузь може бути представлена функціональною моделлю.

Вище вже наводилися відмінності між моделями *deskriptivними* і *normativними*. *Deskriptivні моделі* відповідають на запитання «Як це відбувається?» або «Як це найімовірніше може розвиватися далі?», тобто вони тільки пояснюють факти, що спостерігаються, або дають імовірний прогноз.

Нормативні моделі відповідають на запитання «Як це повинно бути?», тобто передбачають цілеспрямовану діяльність. Типовим прикладом нормативних моделей є моделі оптимального планування, що формалізують тим чи іншим способом мету економічного розвитку, можливості та засоби її досягнення. Застосування дескриптивного підходу в моделюванні економіки пояснюється необхідністю емпіричного виявлення різних залежностей в економіці, встановлення статистичних закономірностей економічної поведінки соціальних груп, вивчення ймовірних шляхів розвитку якихось процесів за умов, що не змінюються або відбуваються без зовнішніх впливів.

Прикладами дескриптивних моделей є виробничі функції та функції купівельного попиту, побудовані на основі обробки статистичних даних. Чи є економіко-математична модель дескриптивною чи нормативною, залежить не тільки від її математичної структури, а й від контексту використання цієї моделі. Наприклад, модель міжгалузевого балансу є дескриптивною, якщо вона застосовується для аналізу пропорцій минулого періоду. Але ця ж математична модель стає нормативною, коли використовується для розрахунків збалансованих варіантів розвитку народного господарства, що задовольняють кінцеву потребу суспільства при планових нормативах виробничих витрат. Багато економіко-математичних моделей поєднують ознаки дескриптивних і нормативних моделей.

Типовою є ситуація, коли нормативна модель складної структури поєднує окремі блоки, які є приватними дескриптивними моделями. Наприклад, міжгалузева модель може містити функції купівельного попиту, що описують поведінку споживачів при зміні доходів. Схожі приклади характеризують тенденцію ефективного поєднання дескриптивного і нормативного підходів до моделювання економічних процесів. Дескриптивний підхід широко застосовується в імітаційному моделюванні.

За характером відображення причинно-наслідкових зв'язків розрізняють моделі жорстко детерміновані та моделі, що враховують випадковість і невизначеність. Необхідно розрізняти невизначеність, що описується ймовірнісними законами, і невизначеність, для опису якої закони теорії ймовірностей не застосовуються. Другий тип невизначеності значно складніший для моделювання (теорія ігор).

За способами відображення фактора часу економіко-математичні моделі поділяються на статичні та динамічні. У статичних моделях усі залежності належать до одного моменту або періоду часу. Динамічні моделі характеризують зміни економічних процесів у часі.

За тривалістю розглянутого періоду часу розрізняються моделі ко-

роткострокового (до року), *середньострокового* (до 5-ти років), *довгострокового* (10–15 і більше років) *прогнозування і планування*. Сам час в економіко-математичних моделях може змінюватись або безупинно, або дискретно.

Моделі економічних процесів надзвичайно різноманітні *за формою математичних залежностей*. Особливо важливо виділити клас *лінійних моделей*, які найбільш зручні для аналізу та обчислень і отримали внаслідок цього велике поширення. Відмінності між лінійними і нелінійними моделями істотні не тільки з математичної точки зору, а й у теоретико-економічному плані, оскільки багато залежностей в економіці мають принципово нелінійний характер, а саме:

- ефективність використання ресурсів при збільшенні виробництва;
- зміна попиту і споживання населення при збільшенні виробництва;
- зміна попиту і споживання населення при зростанні доходів і т. ін.

Теорія «лінійної економіки» істотно відрізняється від теорії «нелінійної економіки». Від того, чи передбачаються множини виробничих можливостей підсистем (галузей, підприємств) опуклими або ж неопуклими, істотно залежать висновки про можливості поєднання централізованого планування і господарської самостійності економічних підсистем.

За співвідношенням екзогенних і ендегенних змінних, що включаються в моделі, останні можуть розподілятися на *відкриті* і *закриті*. Цілком відкритих моделей не існує; модель повинна містити хоча б одну ендегенну змінну. Цілком закриті економіко-математичні моделі, тобто ті, які не включають екзогенних змінних, трапляються винятково рідко; їхня побудова вимагає повного абстрагування від «середовища», тобто серйозного «огрубіння» реальних економічних систем, що завжди мають зовнішні зв'язки. Переважна більшість економіко-математичних моделей посідає проміжне положення і розрізняється за ступенем відкритості (закритості).

Для моделей народногосподарського рівня важливий розподіл на *агреговані* і *деталізовані*.

Залежно від того, чи містять народногосподарські моделі просторові фактори та умови, розрізняють моделі *просторові* і *точкові*.

Отже, загальна класифікація економіко-математичних моделей включає більше десяти основних ознак. З розвитком економіко-математичних досліджень проблема класифікації моделей, що застосовуються, ускладнюється. Поряд з появою нових типів моделей (особливо змішаних типів) і нових ознак їхньої класифікації здійснюється процес інтеграції моделей різних типів у більш складні модельні конструкції.

1.8. Моделювання еколого-економічного управління виробничою системою в умовах нестабільності

Концептуальна модель. Теоретико-множинну модель еколого-економічного управління виробничою системою (ЕЕУ ВС) можна навести у вигляді кортежу:

$$\langle X, Y, F, H, G, K, \Omega, R, U, E \rangle, \quad (1.1)$$

де $Y = \langle Y^{екн}, Y^{екл} \rangle$ – загальний вихід ВС, причому $Y^{екн}$ – продуктивна множина (тобто «корисний вихід»), а $Y^{екл}$ – множина забруднень (тобто «шкідливий вихід»);

X – множина можливих станів ВС;

$F = \langle F^{екн}, F^{екл} \rangle$ – модельне відображення ВС;

$H = \langle H^{екн}, H^{екл} \rangle$ – загальний оператор спостережень (вимірів);

G – цільова множина;

K – узагальнений ЕЕК;

Ω – множина обмежень;

R – ресурсна множина (тобто основний контрольований вхід ВС);

$U = \langle U^{екн}, U^{екл} \rangle$ – множина ЕЕУ (управлінських впливів);

E – множина невизначених збурень (як зовнішніх, так і внутрішніх, тобто як адитивних, так і мультиплікативних), зокрема це множина стохастична, нечітка множина або змішана невизначеність в моделі ЕЕУ;

T – часовий інтервал функціонування і розвитку ВС. Позначення «екн» і «екл» означають, відповідно, економічну й екологічну змінну.

Отже, задача ЕЕУ ВС полягає у визначенні ефективного узагальненого вектора управління $U = \langle U^{екн}, U^{екл} \rangle$ на підставі динамічної еколого-економічної моделі ВС, що забезпечує досягнення мети G за заданого узагальненого еколого-економічного критерію K та обмеженнях Ω з урахуванням умов невизначеностей і ризиків.

Синергетичну керовану модель динаміки нелінійної еколого-економічної системи (ЕЕС) з урахуванням стохастичності та хаотичності поведінки в загальному вигляді можна записати так:

$$\begin{aligned} \dot{X}_i = & \left[\lambda_i \xi_i(t) x_i(t) \left[X^0 \pm \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \prod_{k=1}^j x_k(t) \right] + \sum_{l=1}^3 d_{il} \frac{\partial^2 x_i}{\partial r_l^2} + w_i \right] + \\ & + b_l u_i(t), \quad i = \overline{1, n} \quad \overline{x_i}(0) = x_{i0}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де $\langle \xi_i, w_i \rangle$ – стохастичні збурюючі складові моделі (як внутрішні, так

і зовнішні, тобто мультиплікативно-адитивна суміш збурювань);

$\{a_{ij}(t)\}$ – нестационарні складові моделі;

$\{d_{il}\}$ – дифузійні (розподільчі) коефіцієнти;

X^0 – гранична величина;

λ_i – параметри, що обумовлюють хаотичність поведінки системи.

Така узагальнена модель дозволяє також врахувати й те, що як ризик, так і рівень безпеки мають свою динаміку і є стохастичними процесами, а не одномиттєвими величинами. Наприклад, динамічну модель системи можна записати у вигляді рівнянь: $\dot{x} = F(x, u, v, \xi)$; $\dot{z} = g(x, z, t, \lambda)$, а рівняння спостережень (вимірів) – так: $Y_x = h_x(x, \zeta_x, t)$, $Y_z = h_z(x, z, \zeta_z, t)$; аналогічно можуть бути записані й інші моделі вимірів / спостережень, причому систему рівнянь узагальненої еколого-економічної моделі можна навести так:

$$\begin{aligned}\dot{k} &= g^k(k, m, I, \tau, z, pr, \lambda), \quad \dot{m} = g^m(k, m, I, \tau, z, pr, \lambda), \\ \dot{N} &= g^N(k, m, I, \tau, z, pr, \lambda), \quad \dot{\tau} = g^\tau(k, m, I, \tau, z, pr, \lambda), \\ \dot{z} &= g^z(k, m, I, \tau, z, pr, \lambda),\end{aligned}\quad (1.3)$$

де $x(t)$ – вектор стану ВС, причому $x = (x_1, \dots, x_n)$;

$y = y(t)$ – вектор виходу (продукція – корисний вихід);

$u = u(t)$ – вектор керуючих впливів (змінних);

$v = (k, m, I, pr, \tau)$ – вектор вхідних змінних;

$k = k(t)$ – вектор кількісних змінних;

$m = m(t)$ – вектор монетарних змінних (фінанси);

$I = I(t)$ – інформаційний потік;

$\tau = \tau(t)$ – вектор технологій (знань);

$z = z(t)$ – вектор забруднень (шкідливий вихід);

$pr = pr(t)$ – природні ресурси.

Структура інтегрованої інтелектуальної системи еколого-економічного управління підприємством містить такі підсистеми і блоки: СІУ – система інтелектуального управління, СППР – система підтримки прийняття рішень, СОІ – система обробки інформації, СЕЕМ – система економіко-екологічного моніторингу, СУЕЕБ – система управління

еколого-економічною безпекою, С/В – спостерігач/вимірювач та ін. При цьому враховується наявність такої сукупності потоків змінних: змінні ресурсів (ЗР), змінні інформації (ЗІ), управлінські змінні (УЗ), стохастичні збурюючі змінні (СЗ), змінні загроз і небезпек (ЗН) (як зовнішніх, так і внутрішніх), тобто $\{e'_1, e''_1, e'_2, e''_2\}$ – змінні забруднення (ЗЗ), змінні поведінки (ЗП) та ін. (рис. 1.4).

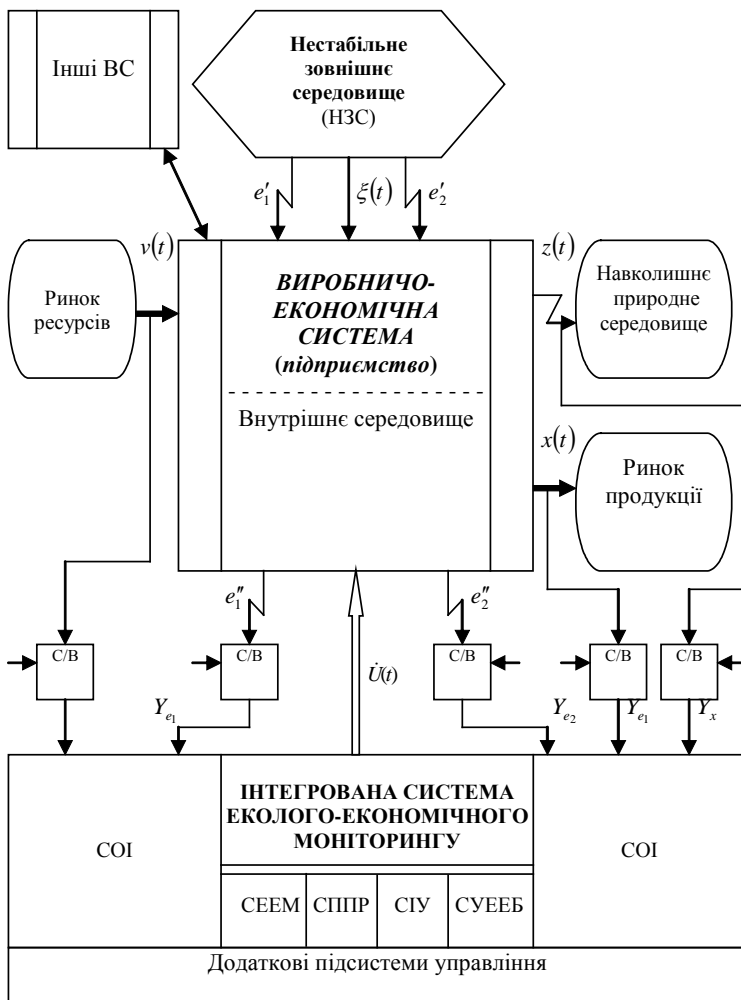


Рис. 1.4. Узагальнена структура інтегрованого еколого-економічного управління виробничим середовищем

Схему розподілу i -го кінцевого продукту підприємства (або продукту i -го підприємства) у спрощеній формі можна навести як функцію вигляду: $Y_i(t) = I_i(t) + C_i(t) + Z_i(t) + Z_{io}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, де Y_i – загальний обсяг випуску (у грошовому вираженні), I_i – інвестиційний потік, C_i – потік споживання, Z_i – обсяг витрат на моніторинг забруднень і природоохоронні заходи, Z_{io} – обсяг витрат на систему забезпечення безпеки ВС (рис. 1.4).

Узагальненою стохастичною виробничою функцією підприємства є оператор: $Y_i(t) = F_i[K_i, L_i, I_{ih}, \tau_i, U_{is}, \xi_i]$, а для інтегральної моделі динаміки ВС в якості координат вектора стану і факторів впливу можна використати наступні змінні: K_i – обсяг фондів, L_i – праця, I_{ih} – потік інвестицій, Z_i – потік забруднень, S_i – потік загроз, небезпек і ризиків (зовнішніх S_i^1 і внутрішніх S_i^2), τ_i – банк технологій (знань), C_i – потік соціальних факторів, U_{is} – потік управлінських рішень, а ξ_i – стохастичні впливи зовнішнього середовища, які збурюють.

Відповідну динамічну модель підприємства можна подати як систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\dot{K}_i &= f_{iK}(K_i, L_i, I_{ih}, \tau_i, U_{is}, \xi_i) \\ \dot{L}_i &= f_{iL}(K_i, L_i, I_{ih}, \tau_i, U_{is}, \xi_i), \quad \dot{I}_{ih} = f_{iI}(K_i, L_i, I_{ih}, \tau_i, U_{is}, \xi_i), \\ \dot{Z}_i &= f_{iZ}(K_i, L_i, I_{ih}, \tau_i, U_{is}, \xi_i), \quad \dot{S}_i = f_{iS}(K_i, L_i, I_{ih}, \tau_i, U_{is}, \xi_i), \\ \dot{\tau}_i &= f_{i\tau}(K_i, L_i, I_{ih}, \tau_i, U_{is}, \xi_i).\end{aligned}\quad (1.4)$$

При цьому для основних техніко-економічних змінних вектора стану можна записати: $\dot{K}_i = -\mu_i(\tau_i, u_{is})K_i + v_{ih}$, де μ_i – коефіцієнт амортизації, що залежить від технологій, які використовуються, і прийнятих рішень; $v_{ih} = H_i(I_{ih}, \chi_i, S_i, C_i, L_i, K_i, \xi_i)$ – темпи впровадження нових фондів, що визначаються оператором H_i , який залежить від рангу виділених інвестицій I_{ih} , функції розподілу виділених інвестицій за часом впровадження χ_i і сформованої соціально-економічної ситуації на підприємстві. При цьому для опису динаміки розвитку робочого потенціалу можна скористатися рівнянням: $\dot{L}_i = a_{li}MS_i - b_{li}T + \xi_i + u_i$, де M_{si} – темпи зміни масштабу виробництва при сформованій технології та соціально-економічного стану підприємства: $MS_i = MS_i(\bar{K}_i, \tau_i, C_i)$, T – темпи вдосконалювання технології, що ви-

значаються використанням банку технологій знань і темпами інвестицій, тобто: $T = T(\tau_i, I_{ih})$.

Динаміку зміни потоку інвестицій можна представити так:

$$\dot{I}_{ih} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d\sigma}{dt} \phi_i(K_i, L_i) + \sigma \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial K_i} \dot{K}_i - \frac{\partial \phi_i}{\partial L_i} \dot{L}_i \right) \right],$$

де $\sigma = \sigma(U_{is}, S_i, C_i)$ – нормативні координати відрахувань капіталу на інвестиції, що визначаються не тільки керуючими впливами, а й потоком загроз, небезпек і ризиків;

$\phi_i = \phi_i(K_i, L_i)$ – виробничі функції, значення яких визначаються обсягом задіяних виробничих ресурсів (K_i, L_i) .

Для формування рівняння, що описує динаміку потоку забруднень, необхідно у фондах виділити ту їхню частину, яка працює на зниження забруднення, – K_{zi} . Тоді можна записати, що: $\dot{Z}_i = a_{zi} \dot{K} - b_{zi} I_{ih} + \xi_i$, де $a_{zi} = a_{zi}(K_i, K_{zi}, I_z)$ – коефіцієнт, що враховує фізико-хімічні можливості зниження обсягів забруднень існуючими технологіями. Слід зазначити, що a_{zi} має суто нелінійний характер, а при досягненні критичних співвідношень між параметрами K_i і K_{zi} , які є біфуркаційними параметрами, $I_{ih} = I_{ih}(\dot{I}_z, T, \tau_i)$ – темпи впровадження новітніх технологій, що залежать від інвестиційних процесів в охорону технології, впровадження нових виробничих процесів і потоку нових технологій і знань, коефіцієнт $b_{zi} > 0$.

Відзначимо, що в аналізованих рівняннях велика частина коефіцієнтів, функцій і операторів є принципово нелінійними типу стрибка (які звичайно можуть привести до невірноваженого або хаотичного характеру).

Варіант еколого-економічної моделі ВС. Оскільки збільшення (ріст) забруднення дорівнює різниці між обсягом здійсненого забруднення та обсягом ліквідованого забруднення завдяки як безпосередній боротьбі з ним (охороні), так і внаслідок природного збитку (асиміляції), динаміку забруднення в загальному вигляді можна описати таким диференціальним рівнянням:

$$\dot{Z} = Z^+ - Z^-, \quad (1.5)$$

де для однієї ВС $Z^+ = \gamma f(k)$, $Z^- = \lambda(1 - \alpha - \beta) f(k) + \delta z$, а для регіональної економіки в цілому (у випадку взаємної незалежності ВС) –

$$Z^+ = \sum_1^n \gamma_i f_i(k_i), \quad Z^- = \lambda \sum_1^n (1 - \alpha_i - \beta_i) f_i(k_i) + \delta z.$$

Варіант задачі оптимального управління ВС. Нехай норма накопичення $\rho = \alpha = \alpha(t)$ – змінна величина. Тоді питоме споживання є:

$$c(t) = (1 - \alpha(t))(1 - a)f(k) = (1 - a)f(k) - \alpha(t)(1 - a)f(k),$$

або
$$\alpha(1 - a)f(k) = (1 - a)f(k) - c(t).$$

Отже, рівняння динаміки фондів набуде вигляду:

$$\dot{k} = -(\mu + \nu)k + \alpha(1 - a)f(k) = -(\mu + \nu)k + f(k) - c,$$

або
$$\dot{k} = f(k) - (\mu + \nu)k - c(t), \quad k(0) = k_0 \quad (1.6)$$

Зокрема, якщо $Y = F(K, L)$, $Y = I + C$, то динамічна модель зміни фондів з урахуванням запізнення інвестиційних потоків (з розподіле-ним лагом і коли функції ядра $h(t - \tau) = h_0 \exp(-r(t - \tau))$, тобто для стаціонарного випадку) набуде такого вигляду (1.7). При цьому від-значимо, що потік інвестицій також є стохастичним процесом.

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + I_h(t), & K(0) = K_0, \\ \dot{L} = \nu L \quad \text{или} \quad L = L_0 e^{\nu t}, & L(0) = L_0, \\ \dot{I}_h = -r I_h + h_0 I, & I_h(t_0) = h_0 I(t_0). \end{cases}$$

Або:

$$\begin{cases} \dot{k} = -(\mu + \nu)k + i_h(t), & k(0) = k_0, \\ (i_h)' = -(r + \mu + \nu)i_h + h_0 \rho f(k), & i_h(0) = i_{h0}, \\ c = (1 - \rho)f(k), & (\rho \equiv \alpha). \end{cases} \quad (1.7)$$

Рівняння (1.6) є основою динамічної моделі керованої ВС і в якості керуючої змінної можна взяти питоме споживання $c(t) = C(t)/L(t)$ або норму накопичення, а змінної стану – $k(t)$ – фондоозбросність, тобто $k(t) = K(t)/L(t)$.

Як наведено у працях одного з авторів цього посібника, нелінійна динамічна модель системи при логістичному характері змінної L має такий вигляд:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = \alpha f(k) - n_0(1 - \eta(t))k(t), & k(t_0) = k_0, \\ c(t) = (1 - \alpha)f(k), \\ \dot{\eta}(t) = n_0\eta(t)(1 - \eta(t)), & \eta(t) \equiv L(t) / L_{\max}, \\ \eta(t_0) = L_0 / L_{\max}. \end{cases}$$

Для ВС в якості еколого-економічної моделі динаміки можна розглянути рівняння (1.5) і (1.6) (або (1.7) з вектором стану $x = (k, z)$ і керуючим вектором параметрів (змінних) $u = (\alpha, \beta)$. Тепер задача оптимального управління ВС може бути наведена в такій постановці. Нехай інтегральна модель динаміки ВС описується формулами (1.5), (1.6). В якості функції корисності можна розглядати функцію $U(q) \equiv U(k, z, \alpha, \beta) \equiv U(x, u)$, а функціонал ефективності –

$$J(q) = \int_{t_0}^T \exp(-\delta t) U(q(t)) dt \text{ і критерій оптимального управління –}$$

$$J(q) \rightarrow \max_{q \in Q} (opt) \text{ при множині обмежень:}$$

$$Q = \{(\alpha, \beta, k, z) \mid 0 \leq \alpha, \beta \leq 1; \alpha + \beta \leq 1, k(t_0) = k_0, z(t_0) = z_0\},$$

$$\text{або } Q = \{(\alpha, \beta, k, z) \mid k(t_0) \in K_0, k(T) \in K_T, z(t_0) \in Z_0, z(T) \in Z_T\}.$$

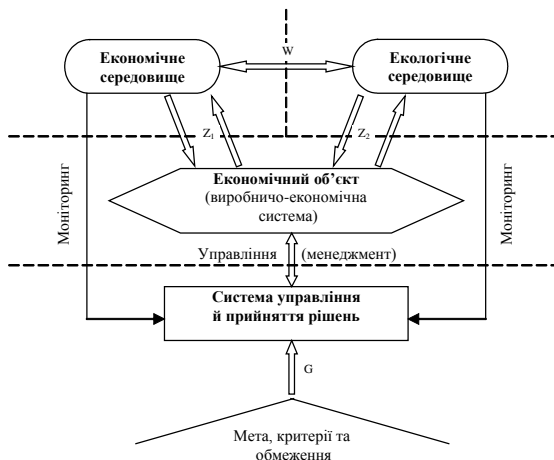


Рис. 1.5. Узагальнена структура інтегральної ЕЕС

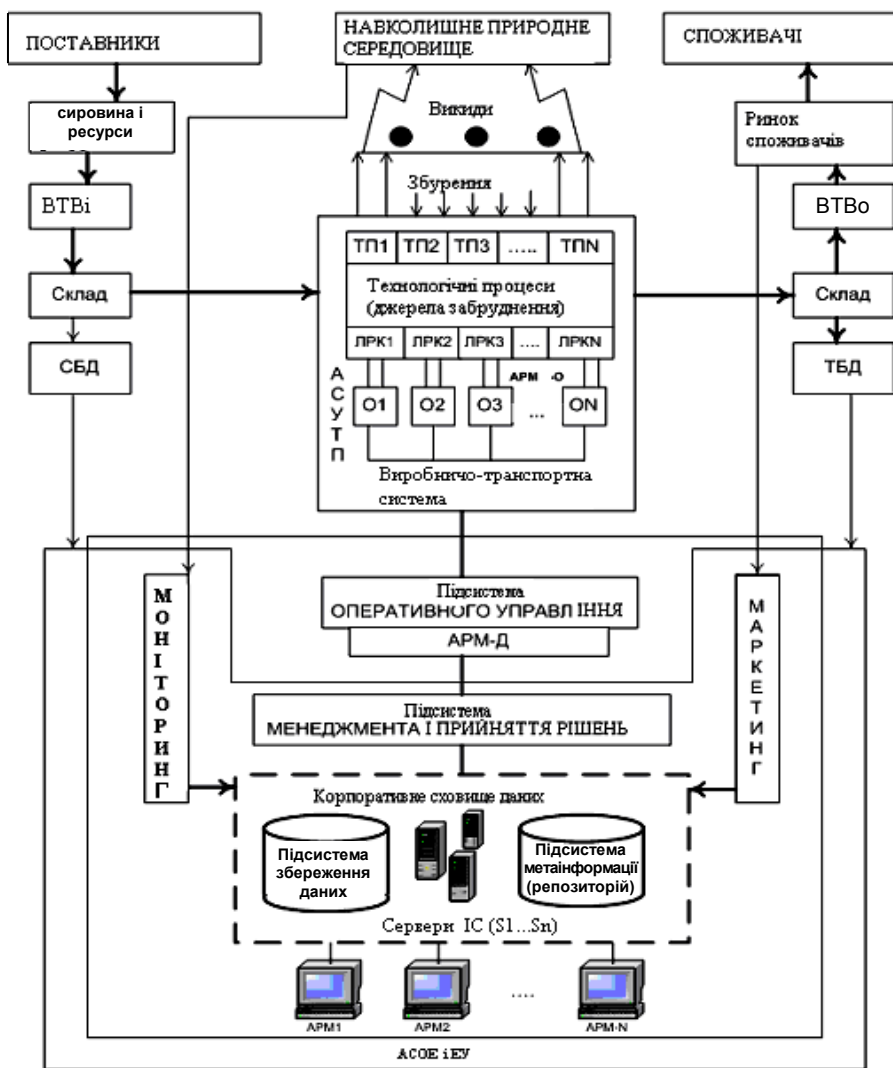


Рис. 1.6. Логістична інтегрована система ЕЕМУ ВС:

ТП – технологічний процес, *ЛРК* – локальне регулювання і контроль, *О* – оператор/технолог, *АРМ* – автоматизоване робоче місце, *S* – сервер, *СБД* – сировинна база даних, *ТБД* – товарна база даних, *ВТВі* – виробничий транспорт вхідного потоку, *ВТВо* – виробничий транспорт виходу, матеріальний та інформаційно-управляючі потоки

Інтегрована еколого-економічна система управління і прийняття рішень наведена на рис. 1.7.

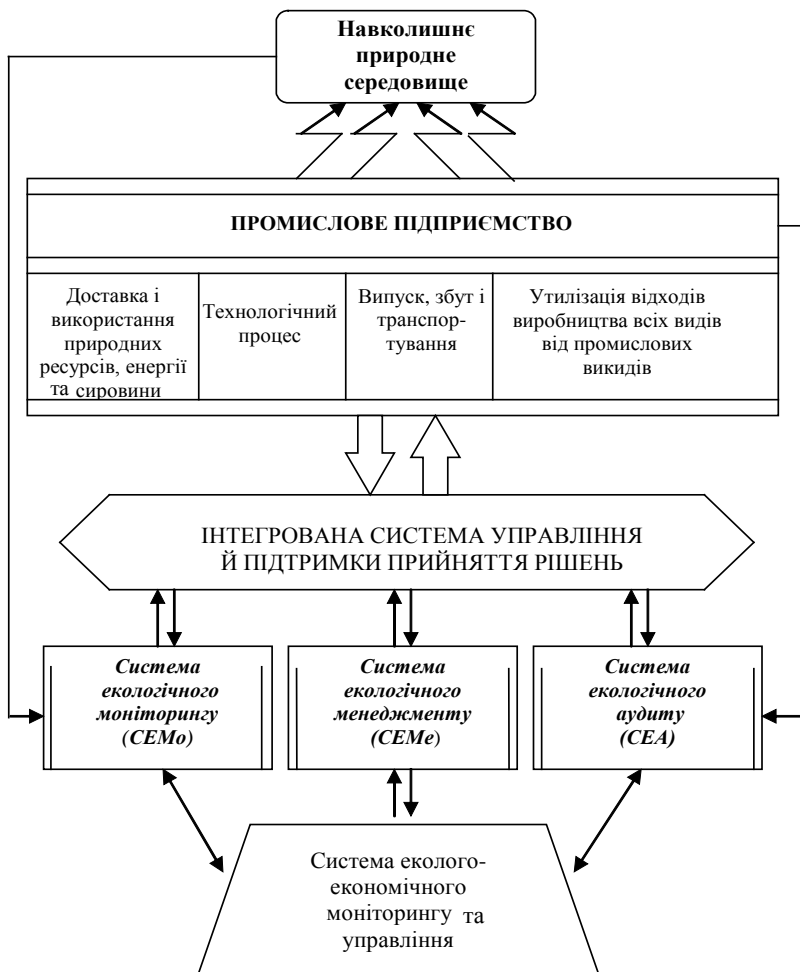


Рис. 1.7. Інтегрована еколого-економічна система управління і прийняття рішень

Наведена інтегрована система і стратегія управління екологічним природокористуванням в умовах перехідної економіки і ринкових відносин базується на екологічному моніторингу і менеджменті та включає такі елементи інфраструктури, як екологічний маркетинг і екологічний аудит.

1.9. Деякі принципи моделювання складних систем

Принципи відіграють важливу роль. Їх природно обговорювати, уточнювати, конкретизувати в процесі роботи. Як початковий набір таких принципів, імовірно, можуть бути запропоновані наступні твердження (які ми супроводимо стислими коментарями).

1. *Принцип синергії («когерентність»)* – (метод головних пропорцій – МГП):

$$\dot{X} = \alpha F_1 F_2 \quad \text{або} \quad \dot{X} = \alpha F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_k.$$

2. *Принцип балансу – (метод системної динаміки – МСД).*

Принцип, або метод системної динаміки – це метод вивчення складних систем з нелінійними зворотними зв'язками. МСД передбачає, що для основних фазових змінних (так званих системних рівнів) складаються диференціальні рівняння за таким типом:

$$\dot{X} = \alpha X^+ - \beta X^-, \quad \alpha, \beta > 0,$$

де X^+ – позитивний темп швидкості змінної X , що включає всі фактори, які викликають збільшення змінної X ;

X^- – негативний темп швидкості, що включає всі фактори, які викликають зменшення змінної X .

3. *Принцип насичення:*

$$\dot{X} = \alpha X (X^0 - X) / X^0,$$

де X^0, X – максимально (гранично) можливе і поточне значення досліджуваної величини, причому X^0 не залежить від часу, тобто X^0 – максимальний ресурс.

4. *Принцип підлеглості Хакена («маломодовість»).*

Динамічна модель розвитку складної системи S , що складається з n підсистем, з певною точністю можна навести у вигляді такої системи диференціальних рівнянь: $dX_i / dt = \alpha_i X_i + \gamma_{i2} X_i X_2 + \dots + \gamma_{in} X_i X_n + \beta_i X_i^2$.
Всі підсистеми, визначені диференціальними рівняннями, можна розділити на дві групи: $i = 1, 2, \dots, m$ – стійкі (згасаючі) моди; $i = m + 1, m + 2, \dots, n$ – нестійкі (незгасаючі) моди. При тривалому спостереженні за системою модами $i = 1, 2, \dots, m$ можна нехтувати і зберегти лише $i = m + 1, m + 2, \dots, n$. Тоді можна говорити про підпорядкування мод з індексами $i = 1, 2, \dots, m$ модам з індексами $i = m + 1, m + 2, \dots, n$. Отже, змінні X_1, \dots, X_m – «швидкі» змінні, а

X_{m+1}, \dots, X_n – «повільні» змінні. У цьому випадку параметри $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$ можна вважати управляючими параметрами – параметрами порядку.

5. *Принцип навчання (адаптації) – метод нейросітьового моделювання (ННСМ).*

Штучні нейронні мережі (ШНМ) є потужним інструментом для адекватного моделювання і прогнозування складних процесів.

6. *Принцип гібридного моделювання: метод НСМ + метод нелінійної динаміки (НД); моделювання в умовах змішаної невизначеності та ін.*

Цей принцип і метод гібридного моделювання заснований на ідеї підвищення адекватності за рахунок об'єднання позитивних властивостей відомих методів і з урахуванням різних факторів, а саме:

1) урахування когнитивності для повноти моделей самоорганізації в соціумі;

2) НД у рамках нейросітьового моделювання в СЕС;

3) новий підхід до прогнозування поведінки складних систем і процесів. («Русла і джокери» – «Джокерологія»).

Однією з основних проблем у нейронауці є обробка великих обсягів інформації, причому швидка обробка – найважливіший фактор. Це необхідно для того щоб: швидко змінювати стратегію поведінки і приймати правильні рішення (тобто знаходити в складних ситуаціях «параметри порядку»); навчитися шляхом тренування здорового глузду, інтуїції, тобто «внутрішньої системи підказок» («відображаючим відображенням», як кажуть психологи); реагувати швидко, тобто швидко «забувати» несуттєві деталі або відправляти їх до довгострокової пам'яті, залишаючи швидко короточасну пам'ять тільки для найважливішої інформації.

У НД одними з ключових є проблеми передбачення майбутньої поведінки динамічної системи за масивами попередніх спостережень. На сьогодні запропоновано кілька методик обробки часових рядів, що дозволяють визначати найважливіші характеристики динамічних систем, – такі як фрактальні розмірності, ентропії, ляпуновські показники, а також екстраполювати майбутню поведінку. Однак усі запропоновані методи прогнозу ефективні тільки для маломодових систем, тобто кількість найбільш істотних змінних складає $5 \div 7$. Проте за допомогою нейронних мереж іноді можливо робити передбачення в ситуаціях, що є безнадійними з погляду методів НД, наприклад, у фінансових часових рядах.

Схему представлення складної динаміки як комбінацію русел і джокерів наведено нижче.

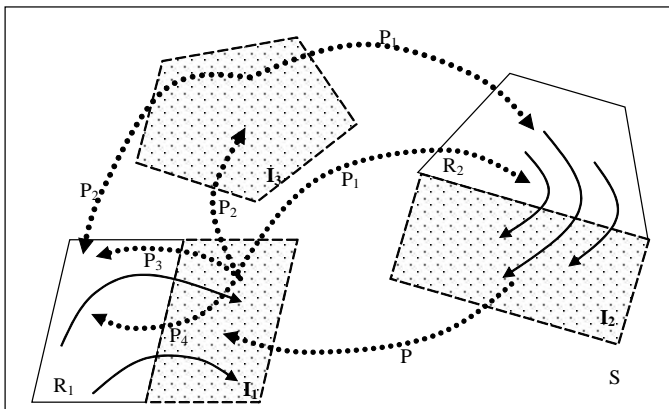


Рис. 1.8. Схема представлення складної динаміки як комбінація русел і джокерів

Основна ідея полягає в тому, що фазовий простір ДС неоднорідний. Тому в ньому можуть бути місця, де для опису динаміки необхідна менша кількість змінних, ніж у загальному випадку або для повного, глобального опису. Коли траєкторія пролягає через такі ділянки, то протягом певного часу її поведінку можна приблизно описати за допомогою маломодової моделі. Ідеї нейронауки дозволяють прийти до висновку, що можливим шляхом дослідження складних динамічних систем є пошук таких локальних маломодових русел.

7. *Принцип стійкого розвитку.*

8. *Принципи прогнозування технологічного розвитку.*

Найважливішими дослідженнями сьогодення є вивчення проблеми відпрацювання сценаріїв переходу від нинішньої «економіки» до **економіки, заснованої на знаннях** (або, як її називають, **інноваційної економіки**). При цьому проблеми прогнозу технологічного розвитку країни будуть виникати знову й знову. По-перше, тому що технологічна криза, яку переживає країна, є загрозою для самого існування країни не тільки в довгостроковій, а й уже в середньостроковій перспективі її розвитку.

Основні принципи розвитку:

- принцип глобального технологічного імператива;
- принцип пріоритету цивілізаційних задач;
- принцип співвідношення;
- принцип виділення параметрів порядку;
- принцип орієнтації на результат, а не на врегулювання процесу;
- принцип створення кільцевих структур;

- принцип підтримки різноманітності в науково-технологічному просторі;
- принцип стратегічного суб'єкта;
- принцип спостереження і соціальної рефлексії;
- принцип науковості.

9. *Принцип фрактальності (ієрархічності).*

10. *Принцип коеволюції складних систем (інтегральне моделювання).*

Відзначимо також важливі принципи синергетики, що перегукуються з вищевказаними (тобто з авторськими).

У синергетиці досить розвинені універсальні методи і мова моделювання, але варто визначити основні принципи і підходи. У найпростішому варіанті можна запропонувати сім основних принципів синергетики:

два принципи Буття і п'ять принципів Становлення.

Два принципи Буття – це: 1-й – гомеостатичність, 2-й – ієрархічність. Вони характеризують фазу «порядку», стабільного функціонування системи, її жорстку онтологію, прозорість і простоту опису.

Гомеостатичність. Гомеостаз – це підтримка програми функціонування системи в певних рамках, які дозволяють їй досягати своєї мети. Цей принцип поєднує багато ідей кібернетики, системного аналізу і синергетики.

Ієрархічність. Наш світ є ієрархізованим за багатьма ознаками.

Далі слідують *п'ять принципів Становлення*, а саме: 3-й – нелінійність, 4-й – нестійкість, 5-й – незамкнутість, 6-й – динамічна ієрархічність (емерджентність) і 7-й – спостереженість.

Перші три «*НЕ*»-принципи всіляко уникала класична методологія, але вони дозволяють увійти системі в хаотичну креативну фазу. Зазвичай це відбувається за рахунок позитивних зворотних зв'язків, що підсилюють у системі зовнішні збурювання. Виконання цих принципів є необхідним і достатнім для становлення системи.

1.10. Новий підхід до прогнозування поведінки складних систем і катастрофічних процесів (русла і джокери)

Однією з основних проблем у нейронауці є обробка великих обсягів інформації. Всі методи прогнозу, що пропонувалися раніше, ефективні тільки для маломодових систем. Відзначимо, що фазовий простір динамічної системи (ДС) неоднорідний, тому в ньому може бути місце, де для опису динаміки необхідна менша кількість змінних. Коли траєкторія пролягає через такі ділянки, то протягом певного часу її поведінку можна приблизно описати за допомогою маломодової моделі.

Отже, ДС можна характеризувати за допомогою її проекції незначної розмірності. Такі проекції називаються *руслами*. Якщо траєкторія пролягла руслом достатню кількість разів, то за часовими рядами у принципі можна знайти цю проекцію (русло). Це означає, що з'являється можливість прогнозування. Але багаточарові НМ виконують операції, що дуже нагадують проєціювання, – в них обчислюється зважена сума вхідних сигналів.

Таким чином, якщо необхідна проекція (русло) малої розмірності існує, тоді НМ могла б її знайти. Відзначимо, що проєціювання є необхідним елементом більшості систем, що передбачають, – предикторів.

Отже, ідеї нейронауки дозволяють прийти до висновку, що можливим шляхом дослідження складних ДС є пошук таких локальних маломодових русел. Тоді в якихось місцях фазового простору русла втрачають здатність прогнозування, тобто існують об'єкти, де начебто детермінована поведінка швидко змінюється майже непередбачуваною, яка здається випадковою. Такі області ймовірного опису називаються *областями джокерів*, а правила (алгоритми), які діють у таких областях, – *джокерами*. Тому важливою проблемою є дослідження властивостей маломодових ДС із джокерами.

Задачі прогнозу часових рядів (ЧР). Нехай $X(t) = \{x(t) | t \in [t_0, T]\}$ – процес, що досліджується, де $x(t)$ – реалізація випадкового процесу $X(t)$, тобто одна з траєкторій, є ЧР: $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$. Задача прогнозування (передбачення) полягає в оцінці майбутніх значень x_{N+1}, x_{N+2}, \dots .

У наш час існує кілька підходів до вирішення цієї проблеми.

У прикладній статистиці постулюється, що щільність розподілу x_i залежить від m попередніх членів, і тому для прогнозування можна використовувати умовне середнє

$$\hat{x}_i = E(x_i | x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-m}).$$

Нелінійна динаміка (НД) дозволила пояснити виникнення зазначеної залежності та дати оцінку величини m (тобто обсяг вибірки).

Теорема Такенса. Припустимо, що існує динамічна система (тобто вимірювані величини є функціями стану певної динамічної системи):

$$x(t + \tau) = f_\tau(x(t)), \quad x \in R^n. \quad (1.8)$$

Зазначимо, що така форма дозволяє з єдиних позицій розглядати як відображення $x_{t+1} = F(x_t)$, так і системи диференціальних рівнянь виду $\dot{x} = F(x)$.

Нехай вимірювана величина є функцією стану системи, тобто:

$$x_i = h(x(t_i)) \equiv h(x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_n(t_i)). \quad (1.9)$$

Тоді майже для всіх τ, h, f і $m \geq 2n + 1$ має існувати функційне серед $\{x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-m}\}$ і x_i , тобто $\{x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-m}\} \xrightarrow{\Phi} x_i, i = m + 1, m + 2, \dots$

У літературі описано ряд методів апроксимації відображення Φ за таблицею пар $\langle z, \Phi(z) \rangle$, де $z_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1})$ або $z_{i-m} = (x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-m})$, $z \in R^m \dots$

1. Локально-лінійні та нелінійні апроксимації:

$$\Phi(z) = \Phi(z_0) + A_1(\Delta z) + A_2(\Delta z, \Delta z) + \dots, \Delta z = z - z_0,$$

де A_k – поліном ступеня k від своїх аргументів;

2. Глобальні поліноміальні апроксимації:

$$\Phi(z) = \Phi_0 + A_1(z) + A_2(z, z) + \dots$$

3. Метод радіальних функцій: $\Phi(z) = \sum_i \alpha_i \varphi(\|z - z_i\|)$.

4. Багат шарові нейронні мережі.

Далі відзначимо, що довжина ЧР і розмірність атрактора d пов'язані співвідношенням: $N \geq 10^d$. Наголосимо, що тришарові мережі фактично втілюють основну вимогу теореми Такенса: *проектування + апроксимація*. Це дозволяє пояснити ще один факт, відомий з літератури: *збільшення числа шарів, як правило, не поліпшує ситуацію*. Тому можна чекати, що основні властивості багат шарових НМ можна одержати і на тришарових – за відповідного вибору кількості прихованих нейронів і сигмоїдальної передатної функції.

5. Предиктори і тришарові НМ.

$$x_i \rightarrow y_j = \sum_{i=1}^m a_{ji} x_i + \omega_{1j} \rightarrow \phi_j = \sigma(y_j) \rightarrow X_k = \sum_{j=1}^q b_{kj} \phi_j + \omega_{2k} \rightarrow \psi_k = \sigma(X_k).$$

$$\xrightarrow{\text{входи}} \xrightarrow{\text{проеційов}} \xrightarrow{\text{апрок}} \xrightarrow{\text{проеційов}} \xrightarrow{\text{виходи}}$$

Тут $\sigma(\cdot)$ – сигмоїдальна функція (наприклад, $\sigma(x) = \tanh x$); m, q – кількість нейронів у 1-му і 2-му шарі, відповідно. Оскільки нас цікавить прогноз наступних членів ЧР за m попередніх, припустимо таку архітектуру мережі: m входних нейронів, певна кількість нейронів у прихованому шарі та єдиний вихідний нейрон, тобто на вхід мережі подаються m попередніх значень x_{i-1}, \dots, x_{i-m} або $z_{i-m} = (x_{i-1}, \dots, x_{i-m}) \dots$

Лінійні комбінації вигляду

$$y_j = \sum_{k=1}^m a_{jk} x_{i-k} + \omega_j$$

можна розглядати як одночасне обчислення компонентів для декількох проекцій. Потім обчислюється сигмоїдальна функція $\phi_j = \sigma(y_j)$.

За допомогою складових ω_j робочий інтервал можна зсунути, домагаючись того, щоб для даного набору вхідних параметрів значення y_j або потрапляло всередину нього («компонент активний») або поза ним («компонент неактивний»). На наступних двох етапах обчислюється функція $X = \sigma\left(\sum_j B_j \sigma(y_j)\right)$ – це і є локальна лінійна апроксимація невідомої функції Φ . Причому всі ці локальні апроксимації виявляються погодженими («зшитими») між собою, як сплайни.

Отже, тришарові НМ фактично втілюють основну вимогу теореми Такенса: *проеціювання + апроксимація*.

6. Передбачуваність складної динаміки системи з джокерами.

Нагадаємо, що складну динамічну систему можна представити в просторі станів у вигляді:

$$x(t + \tau) = f_\tau(x(t)), \quad x \in R^n, \quad (1.10)$$

тобто або як $\dot{x} = F(x)$, або $x_{t+1} = F(x_t)$, а в m -вимірному просторі – в « z -представленні» як

$$z_{i+1} = \Psi(z_i), \quad z_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}), \quad z \in R^m. \quad (1.11)$$

Питання щодо «глобальної» передбачуваності складної динаміки, тобто можливості відновити повну динамічну систему, в z -представленні зіштовхується з деякими обмеженнями (за горизонтом і точністю).

Для складної системи ця задача в загальному вигляді є нерозв'язною. Але, можливо, є здійсненними локальні прогнози?

На користь цієї ідеї свідчить здатність НМ до побудови таких прогнозів. Оскільки НМ мають високі «здібності щодо проєціювання», доцільно розглянути питання про передбачуваність у проекції малої розмірності.

Припустимо, що локальна в деякій області Ω n -вимірному фазового простору поведінка складної системи приблизно, але з «гарною» точністю може бути описана маломодовою моделлю з розмірністю $r < n$. Тоді якщо ця траєкторія протягом часу спостереження достатню кількість разів пролягла через область Ω , цього може бути недостатньо

для того, щоб відновити повну вхідну n -вимірну систему, але достатньо для відновлення r -вимірної функції, що дає можливість здійснювати *локальний* прогноз.

Відзначимо ще раз, що НМ формує велику кількість проєкцій вхідного фазового простору, і якщо для прогнозування достатньо $r < n$ параметрів, то в принципі можна виявити існування області Ω і сформувати відповідний маломодовий предиктор.

Отже, ми знову прийшли до концепції русел і джокерів, тобто до спроби використати ідеї маломодової НД для аналізу динаміки складних систем великої розмірності.

Як можуть виникати русла? Припустимо, що для динамічної системи (1.10), тобто $x(t + \tau) = f_\tau(x(t))$ або $\dot{x} = f(x)$, існує область Ω , де функція $f(x)$ має такий вигляд:

$$f(x) = f_1(x_n) + \varepsilon \cdot f_2(x) \equiv f_1(P_r x) + \varepsilon \cdot f_2(x), \quad x \in \Omega \subset R^n,$$

де $\alpha \ll 1$, а P_r – проєктор на підпростір $P \subset R^n$ розмірності $r < n$.

Цю проєкцію можна розглядати як площину (у загальному випадку – поверхню) P , що проходить через якусь точку $x^0 \in \Omega$, а оператор P_r – як проєктор на неї.

Позначимо r координат на P як $y^1 = P_r x$, а інші $(n - r)$ координат – через $y^2 = (I - P_r)x$.

Тоді $f(x) = f_1(y^1) + \varepsilon \cdot f_2(y^1, y^2)$, і на поверхні P ми будемо мати наступне відображення: $y_{i+1}^1 = P_r \left[f_1(y_i^1) \right] + \varepsilon \cdot P_r \left[f_2(y_i^1, y_i^2) \right]$, $y_i^1, y_i^2 \in P$.

Якщо точність необхідного прогнозу дозволяє відкинути другий член, наприклад, якщо $\varepsilon \approx 0$, то динаміку системи можна приблизно звести до r -вимірної моделі:

$$y_{i+1}^1 = P_r f_1(y_i^1). \quad (1.12)$$

Отже, компонент y^1 можна передбачати проєктором P_r , а прогнозування компонента y^2 також іноді можливо, якщо їхня залежність від самих себе несуттєва або має дуже простий вид. Формула (1.12) є рівнянням русла, пов'язаного з областю Ω .

Яким чином ідею русел можна застосувати для прогнозування ЧР?

Розглянемо в цьому випадку динамічну систему в z -представленні:

$$z_{i+1} = \Psi(z_i), \quad z_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}),$$

а також відповідно до теореми Такенса врахуємо залежність:

$$x_i = \Phi(x_{i-1}, \dots, x_{i-m}) \equiv \Phi(z_{i-m}).$$

Припустимо, що повна система має велику розмірність, але десь у реконструйованому просторі R^m (тобто в z -представленні) існує область R_k , де можна використовувати підхід маломодових русел. Розмірність русла можна приблизно обчислити.

Приміром, нехай необхідна точність $\varepsilon = 0.01$, тобто 1 %, і припустимо, що $\|D \cdot \Phi(z_0)\| \approx \|D^2 \Phi(z_0)\| \approx 1$ і $N = 10^3$. Тоді для методу апроксимації Φ 1-го порядку $\varepsilon_1 \approx N^{-2/d}$, або $d \cong -2 \frac{\lg N}{\lg \varepsilon_1} = 3$.

Отже, необхідно шукати область, де динаміку можна передбачати за 3÷6 найбільш важливими компонентами вектора z , або, іншими словами, визначити проектор P_r . Зауважимо, що вектор z може або навіть повинен мати велику розмірність, тобто довгі ЧР.

Нагадаємо, що $y^1_{i+1} = g(y^1_i)$. Можна довести, що оцінка прогнозу (в руслі) для 1-го компоненту вектора z_i є такою:

$$\hat{X} = g(y^1_i) + (p, z),$$

де p – обчислений (за визначеною схемою) вектор.

Це співвідношення дає загальний вигляд предиктора, що використовує підхід русел, – це є сума нелінійної функції від координат русла y^1 і лінійної функції попереднього стану z .

Отже, використання русел може дозволити спростити структури предикторів, а тому дає можливість робити прогнози для систем великої розмірності, що у загальному випадку знаходяться поза межами методів маломодової НД.

Як шукати русла? Пошук русел є складною задачею. Задача ця тісно пов'язана з іншими методами, що раніше пропонувалися в НД і статистиці. Можна згадати методику *помилкових найближчих сусідів* (FNN), пошук залежних змінних або спробу використати ідеї аналізу головних компонентів. Однак усі ці методи мають глобальний характер, тоді як русла вимагають локальних підходів. Тому необхідно розвивати нові способи аналізу.

Очевидно, найбільш перспективним є стандартний підхід пошуку функціональної залежності між послідовними реконструйованими векторами, що зазвичай використовується для визначення правильної розмірності.

Ідея методу є досить простою: якщо існує функціональна залежність між z_i і z_{i+1} , то якщо $\|z_i - z_j\|$ мале, тоді $\|z_{i+1} - z_{j+1}\|$ теж має бути малим.

Інший шлях використання тієї ж ідеї полягає в порівнянні відстаней у реконструкціях для розмірності ЧР m і $m+1$.

Таким чином, ми підходимо до наступної задачі: для реконструкції великої розмірності (m може бути великим) слід знайти проекцію малої розмірності, тобто $r = 3 \div 6$ ортогональних векторів a_k , що визначають проектор:

$$P_r x = \sum_{k=1}^r (x, a_k) a_k \equiv \sum_{k=1}^r \gamma_k a_k = \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_r a_r,$$

де $\gamma_k = \sum_{j=1}^n x_j a_{kj}$, а також область Ω , де природно очікувати функціональну залежність між $P_r z_i$ і $P_r z_{i+1}$.

Одним з можливих підходів може бути дослідження співвідношення між $\|P_r(z_i - z_j)\|$ і $\|P_r(z_{i+1} - z_{j+1})\|$, аналіз розподілу потенційно залежних пар у проекції та підбір векторів a_k .

Ця задача вимагає величезних обчислювальних витрат і, можливо, необхідно спочатку побудувати ефективні чисельні алгоритми для цієї мети, щоб досягти продуктивності, порівнянної з НС.

Що знаходиться на межі русла? Як було сказано вище, всередині русла може бути отримано простий маломодовий опис складної системи. А що відбудеться, коли русло закінчиться (тобто траєкторія системи потрапить до області Ω), тоді як нам хотілося б залишатися в рамках маломодового опису реальної системи?

Прості моделі були нездатні давати детермінований прогноз, і єдиний спосіб певною мірою залишитися в рамках парадигми маломодової НД – це припустити ймовірнісну поведінку (опис) моделі системи. Тобто ми припускаємо, що існують області J_k (джокери), де траєкторія стає випадковою.

Зауважимо, що присутність джокера може різко змінити біфуркаційну діаграму і навіть пригальмувати виникнення хаосу.

Висновки та гіпотези. Отже, для складної системи великої розмірності може виявитися корисним опис у термінах джокерів і русел. У певному значенні їх можна розглядати як узагальнення символічної динаміки, в інших аспектах – як систему сполучених простих моделей. У природничих науках такий опис не надто поширений, але він може виявитися дуже корисним у біологічних і соціальних науках, у завданнях управління ризиками, де зазвичай застосовується безліч моделей для опису різних сторін складного об'єкта. Ймовірно, такі моделі можна розглядати як різні русла.

Тоді, наприклад, динаміка суспільства може розглядатися як послідовність русел (стабільний розвиток) і джокерів. Такий погляд міг

би бути корисним і при перевірці правильності різних моделей: кілька моделей можуть співіснувати як різні можливі русла. Завдання полягає в тому, щоб зрозуміти, які з них відповідають поточній ситуації, як близько знаходиться найближчий джокер, чи можна його уникнути і т. ін.

Такий підхід здатний допомогти й у задачах опису (ідентифікації) складних систем. Загалом русла не мусять бути саме математичними моделями, це можуть бути просто певні типові ситуації, комбінації ознак, найбільш істотних деталей. Тобто об'єкт може бути охарактеризований як «альбом» таких типових ситуацій з найбільш імовірними наслідками.

Цікаво, що мозок має величезні можливості для пошуку таких важливих деталей, побудови русел і вироблення прогнозів. Якщо набір істотних параметрів виявиться неповним, виникатиме багато помилок, тому попередній досвід може відповідати здатності створювати правильні проєкції реальності. Очевидно, ця здатність частково успадкована і НМ та слугує однією з причин їх успішного застосування. Можна очікувати, що запропонований підхід русел і джокерів буде корисним і в розв'язанні низки задач управління ризиком, прогнозування небезпечних ситуацій.

1.11. Моделювання та управління ризиком

Усвідомлення того, що ризик є *мірою небезпеки*, – найважливіший крок у розв'язуванні проблеми управління ситуацією, в якій наявні потенційні фактори, здатні несприятливо впливати на людину, суспільство і природу.

Варто відрізнити міру об'єктивної можливості появи якихось подій – *імовірність* – від більш загальної міри небезпеки – *ризик*. Ризик сполучає в собі ймовірність несприятливої події та «обсяг» цієї події (втрати, збитки). Ці дві нібито елементарні міри взаємозв'язано фігурують у мозку суб'єкта при його діях в умовах невизначеності, в умовах небезпеки. Будуючи комбінації цих елементарних мір, що є адекватними сформованій ситуації, особа, приймаюча рішення, (ОПР) оцінює рівень небезпеки і приймає рішення (тобто керує ризиком).

Отже, ризик – це комбінація (кортеж) $R = \langle P, Z \rangle$, де P – імовірна міра невизначеності, а Z – обсяг (міра) збитку (витрат, пов'язаних з небезпекою).

Можливі наступні реальні ситуації:

1) імовірність можливої події P дуже велика, але збиток Z суб'єкту, пов'язаний з цією подією, дорівнює нулеві (тобто $P \rightarrow \infty, z \rightarrow 0$). У цьому випадку суб'єкт чітко розуміє, що він не зазнає небезпеки, тобто $R \approx 0$.

2) $z \approx \infty$, $P \approx 0$, тобто збиток великий, але ймовірність настання ситуації дорівнює нулеві. Отже, небезпеки немає, тобто $R \approx 0$.

3) $z \approx 0$, $P \approx 0$. Ситуація абсолютної безпеки (очевидно, $R = 0$).

В усіх інших випадках, коли ймовірність P і збиток z набувають кінцевих значень, суб'єкт оцінює сформовану ситуацію як небезпечну, що характеризується відповідним ризиком.

Ризик – одна з найважливіших категорій, що відображає міру небезпеки ситуацій, в яких є потенційні фактори, здатні несприятливо впливати на людину, суспільство і природу (рис.1.9).

«Ризик» у сучасній науці та культурі – це така ж широка й узагальнююча категорія, як «сенси», «цінність», «справедливість», «гріх» і т. ін.

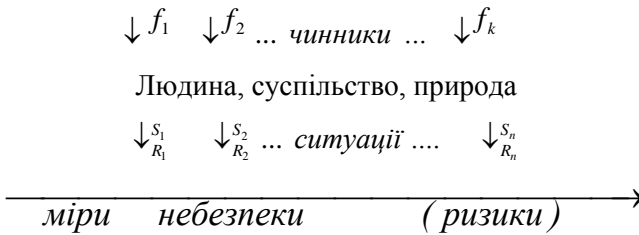


Рис. 1.9. Риск как мера опасности ситуаций.

Поняття «ризик» використовується в багатьох суспільних і природничих науках. Кожна з них має свій предмет, свою спрямованість у дослідженні ризику і використовує для цього власні методи.

Різноманітність думок про сутність ризику пояснюється, зокрема, багатоаспектністю цього явища, недостатнім і неадекватним використанням цієї важливої категорії в реальній економічній практиці та управлінській діяльності. Крім того, ризик – це складне явище, що має безліч суб'єктивних, а іноді й реальних основ. Це обумовлює можливість співіснування множинності визначень ризику.

1. *Об'єктивна основа ризику.* Об'єктивне існування ризику пов'язують з імовірнісною природою багатьох процесів («випадковий світ»), багатоваріантністю матеріальних та ідеологічних відносин, у які вступають суб'єкти соціального життя. Функціонування і розвиток складних систем описується за допомогою статистичних знаків. Звідси й неможливість однозначного прогнозування поведінки систем. Нелінійна динаміка (НД) показала, що випадковість виникає найчастіше не внаслідок дій великої кількості різних причин або складності системи. Вона може бути результатом того, що система має *чутливість до початкових умов*. Це означає, що *нестійкість* є невід'ємною ознакою багатьох систем, починаючи з найпростіших. Стійкість системи

визначається тим, як поведуться близькі траєкторії, що визначають її поведінку.

Чутливість до початкових даних означає, що в середньому ці траєкторії експоненційно розбігаються. Швидкість їхнього розбігання визначається величиною λ , яку називають показником Ляпунова (ПЛ) (рис. 1.10):

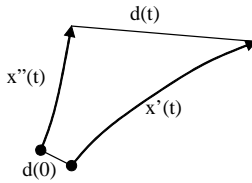
а) $\lambda > 0$: «нестійкість»;

б) $\lambda < 0$: «стійкість».

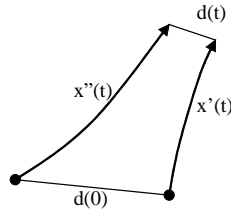
Чутливість до початкових даних свідчить про нестійкість досліджуваної системи, про те, що малі причини в ній, швидше за все, будуть мати великі наслідки. З цією властивістю систем пов'язане поняття «хаос» (у детермінованих системах).

а) $\lambda > 0$:

«Нестійкість»



б) $\lambda < 0$: «Стійкість»



$$d(0) \approx \varepsilon \approx 0 \quad d(t) \approx \exp(\lambda t) \quad d(t) = |x'(t) - x''(t)|$$

Рис. 1.10. Показатели Ляпунова.

Математичний образ детермінованих неперіодичних процесів, щодо яких неможливий довгостроковий прогноз і тому доводиться звертатися до ймовірнісних характеристик, назвали «дивним аттрактором». Для цих процесів існує визначений горизонт прогнозу.

2. *Суб'єктивна основа ризику*. Наведене вище поняття ризику виступало синонімом поняття «небезпека», до того ж, вплив людини виключався. У багатьох випадках це виправдано. Однак існує безліч інших ситуацій, в яких людина є головною діючою особою. У цьому аспекті об'єктивній категорії «небезпека» протистоїть суб'єктивна категорія «ризик».

Цей аспект, пов'язаний з прийняттям рішень, невід'ємний від сприйняття ризику, від його психології. Однак психологічне сприйняття ризику, яке досліджено далеко не повною мірою, за своєю суттю парадоксальне. Воно є відображенням нашої культури, нашого ставлення до себе і до світу.

Суб'єктивні алгоритми (оцінки) визначення ризику значно складні-

ші й ефективніші, ніж здаються на перший погляд. І перш ніж вводити формалізовані «штучні» правила оцінки ризику, корисно зрозуміти «природні».

Багатокритерійні задачі за невизначеності (БЗН):

$$\langle X, Y, f(x, y) \rangle, \quad (1.13)$$

де альтернативи (розв'язки) – $x \in X \subset R^n$, невизначеності – $y \in Y \subset R^m$, $f_i(x, y)$, ($i \in N = \{1, \dots, N\}$) – компоненти векторного критерію $f(x, y)$.

У задачі (1.13) особа, приймаюча рішення, (ОПР) прагне вибрати альтернативу $\hat{X} \in X$ таким чином, щоб досягти одночасно якомога більших значень компонента вектора $f(x, y)$. При цьому ОПР враховує можливість реалізації будь-якої невизначеності $y \in Y$.

1. Векторна функція ризику (ВФР) за принципом (критерієм) Севіджа:

$$\phi_i(x, y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) - f_i(x, y), i \in N, \quad (1.14)$$

де $\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \dots, \phi_n(x, y))$.

2. ВФР на основі «векторного» підходу:

$$\phi_i(x, y) = f_i(\varphi(y), y) - f_i(x, y), i \in N, \quad (1.15)$$

де функція $\varphi(y)$ визначена на множині Y значень невизначеностей y і при кожному $y \in Y$ значення функції $\varphi(y)$ є максимальним за Слейтером (малоефективним) розв'язком багатокритерійної задачі.

$$\langle X, \{f_i(x, y)\} i \in N \rangle. \quad (1.16)$$

Тоді ВФР є вектором $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$, що визначений у (1.15).

Зауважимо, що (1.16) для кожного $y \in Y$ є N -критерійною задачею.

Нагадаємо, що альтернатива $x^* = \varphi(y)$ називається максимальною за Слейтером (малоефективною) для задачі (1.16), якщо $\forall y \in Y$ – несумісна система нерівностей:

$$f_i(x^*, y) < f_i(x, y), \forall x \in X, i \in N.$$

3. Модель конкуренції.

Нехай X_n, Y – множини альтернатив (розв'язків) двох економічних систем, а порівняння якості функціонування цих систем відбувається

за тими ж критеріями $(F_1, F_2, \dots, F_n) = F$.

Тоді математичну модель конкуренції можна подати у вигляді:

$$\langle X, Y, F(x) - F(y) \rangle,$$

причому перша система за рахунок вибору $\hat{X} \in X$ прагне збільшення всіх компонентів вектора:

$$F(x) - F(y) = (F_1(x) - F_1(y), \dots, F_n(x) - F_n(y)),$$

а друга за рахунок вибору $\hat{Y} \in X$ прагне їхнього зменшення.

4. Динамічна модель БЗН (однобічний випадок):

$$\langle S, U, Z, J(U, Z, t_0, x_0) \rangle,$$

де S – керована система:

$$S: \dot{x} = f(x, u, z), \quad x(t_0) = x_0,$$

зокрема

$$S: \dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)z, \quad x(t_0) = x_0.$$

Існує множина стратегій U у ОНР; Z – безліч невизначеностей Z ; $J_i(U, Z, t_0, x_0)$ – i -й компонент векторного критерію $J = (J_1, \dots, J_n)$, зокрема:

$$j_i(U, Z, t_0, x_0) = \Gamma_i(t_\kappa, x(t_\kappa)) + \int_{t_0}^{t_\kappa} F_i(t, x(t), u[t], z[t]) dt \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

5. Прийняття рішень в умовах невизначеності та динаміки ризиків.

$$\langle X, Y, F(x, y) \rangle,$$

де $x \in X \subset R^n$; $y \in Y \subset R^m$; $F = (f_i, \dots, f_\kappa)$; $X \cdot Y \rightarrow R, i = \overline{1, \kappa}$,

причому:

$$\begin{cases} \dot{x} = Y_x(x, a) \\ \dot{y} = Y_y(y, b) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dot{x} = \varphi_x(x, y, a) \\ \dot{y} = \varphi_y(x, y, b) \end{cases}$$

Функція ризику:

$$\phi_i(x, y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) - f_i(x, y) \quad \text{і} \quad \phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \dots, \phi_\kappa(x, y)) -$$

Векторна функція ризику. Зокрема, функціонал критерію може бути квадратичним або лінійно-квадратичним.

Питання для самоперевірки

- 1) Що означають поняття «модель» і «моделювання»?
- 2) Практичне значення моделювання.

- 3) Основні положення теорії моделювання.
- 4) Класифікація за засобами моделювання.
- 5) Чим відрізняється матеріальне моделювання від ідеального, формалізоване від неформалізованого?
- 6) Сутність економіко-математичного моделювання. Поняття математичної моделі.
- 7) В якому випадку об'єкт можна розглядати як систему?
- 8) Поняття економічної системи.
- 9) Поняття виробничо-технологічного рівня економічних систем.
- 10) Основні етапи економіко-математичного моделювання і зміст кожного з них.
- 11) Основні напрямки аналізу економіко-математичних моделей.
- 12) Моделі опису і моделі прийняття рішень.
- 13) Багатокритерійна оптимізація. Основні напрямки дослідження багатокритерійних моделей.
- 14) Поняття імітаційної системи.
- 15) Основні ознаки класифікації економіко-математичних моделей.

ГЛАВА 2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СИСТЕМ І СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ. СИНЕРГЕТИЧНИЙ ПІДХІД

Перші уявлення про систему як сукупність елементів, що перебувають у структурному взаємозв'язку один з одним і утворюють певну цілісність, виникли в античній філософії (Платон, Аристотель).

Отримані від античності принципи системності розвивалися в концепціях Кузанського, Спінози. В німецькій класичній філософії принципи системної природи знання розроблялися Кантом, Шеллінгом, Гегелем. Принцип системності відігравав значну роль у працях К. Маркса: «Подібно до того, як сила нападу ескадрону кавалерії або сила опору полку піхоти значно відрізняються від суми тих сил нападу й опору, які здатні розвинути окремі кавалеристи та піхотинці, так само й механічна сума сил окремих працівників відмінна від тієї суспільної сили, що розвивається, коли багато рук беруть участь одночасно у виконанні однієї й тієї ж нероздільної операції...».

Ідеї системності природи знаходять ще більше поширення в природознавстві в другій половині XIX ст. Однією з перших праць, присвячених цим питанням, було дослідження Є. С. Федорова (1853–1919), академіка, відомого фахівця в галузі кристалографії. Він показав, що для будь-якої речовини, здатної мати форму кристала, існує визначена, досить невелика кількість геометричних форм, яких можуть набувати виникаючі кристали. Дослідження Федорова довели, що утво-

рення різних організаційних форм улягає певним загальним законам, які керують нашим світом.

Принцип системності, поширення якого було підготовлене історією природознавства і філософії, знаходить у ХХ ст. все більше прихильників у різних галузях знання. У 30–40-і роки австрійський вчений Людвіг фон Берталанфі успішно застосував системний підхід до вивчення біологічних процесів, а після Другої світової війни він же запропонував концепцію розробки загальної теорії систем.

У програмі створення загальної теорії систем Берталанфі вказував, що її основними задачами є:

- 1) виявлення загальних принципів і законів поведінки систем незалежно від природи їхніх складових елементів та відносин між ними;
- 2) встановлення в результаті системного підходу до біологічних і соціальних об'єктів законів, аналогічних законам природознавства;
- 3) створення синтезу сучасного наукового знання на основі виявлення ізоморфізму законів різних галузей діяльності.

Родоначальником теорії систем прийнято вважати Берталанфі, хоча багато початкових положень цієї теорії є в праці О. О. Богданова, виданій німецькою мовою 1931 р. у Берліні, де тоді працював Берталанфі. Богданов (Маліновський) закінчив 1899 р. медичний факультет Харківського університету і займався медициною, фізіологією, біологією, філософією. Найважливішу свою працю – «Загальна організаційна наука (тектологія)» – він почав публікувати в 1911-му. Другий том виходить у 1925-му, а третій побачив світ у 1929-му, вже після смерті вченого. О. О. Богданов був організатором і директором першого у світі інституту переливання крові, він неодноразово проводив експерименти на самому собі, і в 1928 р. один з таких експериментів закінчився трагічно.

Як відзначає М. М. Моїсєєв, починаючи з другої половини ХІХ століття, російській науці було притаманне прагнення до створення узагальнюючих теорій і вчень. Такі дослідження відігравали і відіграють важливу роль у науці, тому що дозволяють з єдиних позицій побачити і вивчити широкі класи явищ і в калейдоскопі дослідних факторів побачити струнки будівлі, в яких кожен з них, як цеглина, лягає на своє місце. Таблиця Д. І. Менделєєва, біогеохімія В. І. Вернадського, біогеоценологія В. М. Сукачова і М. В. Тимофєєва-Ресовського – всі ці універсальні системи є гордістю російської та радянської науки. Теорія організації О. О. Богданова може бути поставлена в один ряд зі схожими вченнями. Всі вони підсумовували і поєднували величезний емпіричний матеріал і створювали те, що В. І. Вернадський називав «емпіричним спілкуванням, тобто системою поглядів, на основі якої могли розвиватися далі прикладні науки».

У «Тектології» Богданова було передбачено ідеї кібернетики

(принцип зворотного зв'язку, роль моделювання). Він одним з перших зрозумів, що суспільним і політичним системам властива певна організмічність. О. О. Богданов увів поняття відкритої системи, тобто системи, активно взаємодіючої з навколишнім середовищем, що обмінюється з ним енергією і речовиною. Слід сказати, що введення цього поняття вважається однією з головних заслуг Берталанфі.

Загальна теорія систем, за задумом Берталанфі, який запропонував першу програму створення такої теорії, мала стати певною загальною наукою про системи будь-яких типів. Однак конкретна реалізація цієї та схожих амбіційних програм зіштовхнулися з дуже серйозними труднощами, головною з яких є те, що загальність поняття системи призводить до втрати конкретного змісту. Нині побудовано кілька математичних теорій систем, що застосовують апарат теорій множин, алгебри. Однак прикладні досягнення цих теорій поки що досить скромні. З іншого боку, системне мислення все частіше використовують представники практично всіх наук (географії, політології, психології та ін.). Системний підхід знаходить дедалі ширше застосування і при аналізі соціальних систем.

Застосування понять системного підходу до аналізу конкретних прикладних проблем отримало назву системного аналізу.

2.1. Історія розвитку теорії систем і системного аналізу

Системний аналіз – наука порівняно молода, проте нині важко сказати, коли фактично мав місце початок системного аналізу.

Найчастіше початок формування апарату системних досліджень відносять до 50-х рр. XX ст. і пов'язують з працями відомого австрійського біолога Людвіга фон Берталанфі. Саме цим ученим була запропонована теорія, застосована до систем будь-якої природи. Один із засобів реалізації цієї ідеї Берталанфі вбачав у тому, щоб відшукувати структурну подібність законів, установлених у різноманітних дисциплінах, і, узагальнюючи їх, виводити загальносистемні закономірності.

Проте процес формування апарату системних досліджень має більш глибокі історичні корені. Історію розвитку філософських, суспільствознавчих і природничо-наукових системних уявлень можна простежити від їхніх первинних і розрізнених форм, які зустрічаються навіть у древніх мислителів, до фундаментальних системних теорій XIX і XX століть.

В одних літературних джерелах початок системного аналізу датується 50-ми рр., в інших – серединою 40-х рр. XX ст. Так, в одній із перших згадок про системний аналіз зазначається, що «ось уже більше десяти років (тобто, з середини 40-х рр.) інженери і керівники підприємств стали свідками виникнення все більш широкого підходу до

проблеми проектування технологічного устаткування. Це явище було недостатньо зрозумілим і описувалося нечітко. Його називали системотехнікою (*system engineering*), системним аналізом (*system analysis*) і, часто, системним підходом (*system approach*)».

У ті часи в СРСР вважалося, що планування та управління в соціалістичних країнах «практично завжди здійснювалося з використанням принципів і прийомів системного аналізу, оскільки соціалістичному засобові господарювання за своєю природою притаманний системний підхід». Неперевершеним взірцем системного аналізу для радянських учених тоді залишався ленінський план ГОЕЛРО, розроблений у перші роки радянської влади для взаємної «ув'язки» програми електрифікації із загальною програмою підйому продуктивних сил як у країні в цілому, так і в окремих її галузях та районах. Тоді говорилося, що «нам і не був потрібний спеціальний термін, і історію системного аналізу як наукового напрямку звичайно розглядають на прикладах зарубіжних праць».

У той час в одній з американських газет [Оптнер С. Пилеггі Н. Академия бизнеса // За рубежом. – 1968. – № 432] вказувалося, що «командування ВПС США невдовзі після початку другої світової війни запропонувало Гарвардським курсам ділової адміністрації знайти спосіб збільшення протягом року існуючого складу ВПС із 4 тис. бойових літаків і 300 тис. чоловік до 80 тис. літаків і 2,5 млн чоловік, але так, щоб це обійшлося не дорожче 10 млрд доларів. Щоб упоратися з цим завданням, при курсах була створена так звана секція статистичного контролю. Під кінець року проблема, поставлена військово-повітряними силами, була вирішена і арсенал військового командування збагатився методом системного аналізу» [Оптнер С.].

Вважається, що розробка, широке застосування і популяризація системного аналізу – заслуга знаменитої американської корпорації *RAND* [Оптнер С.]. І дійсно, теоретики та спеціалісти цієї корпорації виконали низку основних робіт із системного аналізу, а також висунули зі свого середовища багатьох осіб, яким довелося практично застосовувати цю методологію в Міністерстві оборони та інших відомствах і компаніях США. Також вважається, що «найбільше значення серед усіх досліджень, які коли-небудь здійснювала корпорація *RAND*, мають її роботи в галузі аналізу систем».

Корпорацію *RAND* було створено в 1947 р. У 1948-му в складі Міністерства ВПС США організували групу з оцінювання систем зброї (*WSEG*), яка відіграла дуже важливу роль у розвитку і використанні системного аналізу. В 1950 р. у складі *RAND* було створено Відділ аналізу вартості зброї, що вів розробки і широко застосовував вартісні варіанти системного аналізу. На початку 50-х рр. поняття «системи

зброї» і практика «системного керівництва» стають загальноновживаними. Розробка надзвукового бомбардувальника В-58, яка почалась у 1952 р., була першою розробкою, що була поставлена як «система». Великий вплив на формування ідей системного аналізу в 50-х рр. здійснила розробка американськими спеціалістами стратегічних систем і систем протиповітряної оборони [Оптнер С.].

У міру того як окремі спеціалісти і дослідницькі організації здійснювали дедалі більше досліджень із застосуванням методології системного аналізу, ставало зрозумілим, що ефективне використання цієї методології може бути здійснене тільки в рамках офіційно визначеної організаційної структури, яка узаконила б її застосування. Сама методологія була вже детально розроблена і викладена в книзі групи спеціалістів корпорації *RAND* «Військова економіка в ядерний вік», яка вийшла у світ 1960 року [Хитч Ч. Маккин Р. Военная экономика в ядерный век / Пер. с англ. – М.: Воениздат, 1964].

Прихід у 1961 р. до влади президента Кеннеді, призначення на деякі важливі посади професорів Гарварда, а Роберта Макнамарі – одного з тих спеціалістів, хто стояв біля витоків розвитку системного аналізу, – міністром оборони США, створили сприятливі умови для виконання цієї роботи [Оптнер С.].

Так на початку 60-х рр. XX ст. було створено постійно діючу систему планування та фінансування озброєнь (*PPBS*), і військовий бюджет США 1963 року був підготовлений на основі широкого застосування методології системного аналізу [Оптнер С. Хитч Ч. Руководство обороной. – М: Сов. радио, 1968].

У 1964 р. процедури, які реалізовували вимоги системного аналізу в Міністерстві оборони США, були вже настільки відпрацьованими, що з багатьох із них видали посібники та інструкції. Таку ж регламентацію здійснили і в управліннях НАСА [Оптнер С.].

У серпні 1965 р. президент США Джонсон своїм наказом поширив принципи програмного керівництва і системного аналізу на більшість федеральних відомств, у тому числі й на Державний департамент.

З деяким відставанням від військової галузі системний аналіз застосовувався і в американській промисловості та інших сферах життя суспільства. Початок використання ідей системного аналізу для розв'язання проблем у цивільній сфері може бути віднесене до середини 50-х рр. XX ст. Однією з перших була праця з розробки політики уряду в сфері водних ресурсів [Оптнер С. McKean R. N. Efficiency in government through systems analysis. – N.Y. Wiley, Inc., 1958].

У 1959 р. було здійснено роботи з аналізу застосування електронної обробки даних у міському плануванні. Починаючи з 1960-го, ведуться дослідження надзвукової транспортної авіації як системи.

Багато робіт з використанням методології системного аналізу виконала група *ТЕМПО* з компанії *General electric* [Jantsch E. *Technological Forecasting in Perspective*. – OECD, 1967]. Вона застосувала системний аналіз для розробки стратегії фірми на тривалий період. Пізніше група здійснила дослідження розвитку атомного торгового флоту до 1985 р., причому було розглянуто п'ять альтернатив – з урахуванням політичної та соціальної ситуації. *ТЕМПО* також здійснила оцінювання комерційних систем зв'язку на штучних супутниках, досліджувала потреби Північної Америки у водних ресурсах та енергії, розвиток золотодобувної промисловості США, проблеми розвитку міст.

У 1966 р. *General electric* проаналізувала стратегію будівництва атомних електростанцій на плутонієвих реакторах у Європі [Оптнер С.].

Починаючи з 60-х рр. минулого століття, багато корпорацій і організацій почало використовувати методологію системного аналізу. Так корпорація *RAND* застосувала системний аналіз для дослідження наземного транспорту 1990 року. *System Development Corporation* досліджувала проблеми удосконалення планування освіти. Станфордський дослідний інститут запропонував використовувати системний аналіз при розв'язанні проблем взаємодії між наукою, технікою і суспільством [Оптнер С.].

У США перебудова організації відповідно до вимог системного аналізу була виконана на складальному заводі, у хіміко-фармацевтичній компанії, в лікарні, відділі збуту компанії, конструкторському відділі, відділі електроніки [Оптнер С. *Young S. Management: a Systems Analysis*. Glenview. – Illinois, 1966].

У той час системний аналіз зачепив такі сфери, як соціологія, політика, ідеологія, забезпечення людства продовольством, індустріалізація країн, що розвиваються, удосконалення техніки політичних переворотів та ін.

Услід за США і під впливом робіт, виконаних у Штатах, із відставанням на декілька років, системний аналіз почали використовувати в різних, насамперед військових, галузях державні установи та приватні компанії Англії, Франції, Німеччини, Японії і т. д.

Викладання дисципліни «Системний аналіз» тоді стало правилом у багатьох навчальних закладах США та інших країн [Оптнер С.].

Особливо цікавим є питання про зв'язок розвитку системного аналізу та розвитку систем управління. Створення і використання систем управління в США – дуже значне явище. Усього за 6–8 років було створено так багато різних машинних систем управління, що доречніше говорити про «вибух» у цій галузі. Так список 1964 р. містить перелік 133-х систем у 98-ми авіакосмічних компаніях США [Оптнер С. *Frambes R. Management Systems // Aerospace Management*. – 1964. – March]. У списку 1965-го наведено 65 систем лише в одному Міні-

стерстві військово-морських сил США [Оптнер С. Information Systems Acronyms // Navy Management Review. – V. X. – № 9. – 1965. – September].

У радянській літературі системний аналіз одержав досить широке поширення значно пізніше, у 1969 році, – після перекладу книги Станфорда Л. Оптнера «Системний аналіз при вирішенні ділових і промислових проблем» [Оптнер С.].

За визначенням одного з творців системного аналізу, Ч. Хітча, системний аналіз *«пройшов у своєму розвитку такий же етап, як медицина наприкінці XIX століття, після чого став приносити більше користі, ніж шкоди»* [Бешелев С. Д., Гурвич Ф. Г. Экспертные оценки. – М.: Наука, 1973. – 158 с.].

2.3. Наукові напрямки системного аналізу

Науково-технічний прогрес характеризується розвитком складних систем дедалі більшої розмірності. До складу таких систем входять об'єкти дуже різноманітної природи. Постійно зростаюча складність систем і пристроїв, що забезпечують ефективне функціонування народного господарства на сучасному етапі, вимагає удосконалення методів вивчення, проектування та експлуатації цих систем.

Сучасне виробництво є не просто набором машин різного призначення, а системою цих машин, злагоджена взаємодія яких визначає ефективну роботу підприємства. В наш час отримати уявлення про таку складну систему, якою є технологічна система, про взаємодію підсистем і задач у ній, про вплив цієї системи на організаційну структуру всього підприємства, роль системи в підготовці та прийнятті управлінських рішень, місце і роль конкретного цеху, дільниці, окремого спеціаліста в процесі випуску продукції практично неможливо без знання основних закономірностей функціонування і розвитку складних систем, без застосування методів і моделей системних досліджень.

Темпи науково-технічного прогресу, розвиток різних галузей промисловості, посилення їхнього взаємного впливу призводять до різкого збільшення кількості можливих альтернатив, які розглядаються при прийнятті рішень як у сфері технічного проектування, так і в сфері планування розвитку галузі в цілому та окремих її підприємств і організацій. Виникає необхідність залучення спеціалістів різноманітних сфер знань до аналізу цих варіантів, а допомогти організувати їхню ефективну взаємодію і встановити взаємопорозуміння може тільки системне бачення.

Системні дослідження – як методологія і як апарат дослідження – щодалі більше поширюються й усе глибше проникають у різні науки і сфери діяльності. Нині зростає кількість публікацій, присвячених роз-

робці та застосуванню методів системних досліджень. Проте науку про системи ще не можна назвати сформованою: на сьогодні існує багато напрямків системних досліджень, немає єдності в термінології. Як правило, у працях, які публікуються, розглядається один із підходів або методів системних досліджень, одна з точок зору, немає робіт, у яких були б об'єднані підходи і концепції різних авторів, наведені узагальнені уявлення про методи і моделі системних досліджень, що застосовуються, рекомендації до вибору підходу і методу в конкретних умовах.

Досі ще відсутня звичайна класифікація методів системних досліджень. Часто схожі методи розвиваються в рамках різних системних напрямків і мають різні назви. Питаннями застосування системних представлень для аналізу складних об'єктів і процесів прийняття рішень займаються системні напрямки, які називаються *системним підходом*, *системними дослідженнями*, *системним аналізом*, *системологією*, *системотехнікою* і т. ін. За винятком *системотехніки*, сфера якої обмежена технічними системами, всі інші терміни часто вживаються як синоніми.

Для кращої орієнтації в назвах праць при подальшому розвитку системних представлень наведемо стислу характеристику деяких із цих напрямків.

Системний підхід. Термін «*системний підхід*» почав застосовуватися в перших працях, у яких елементи загальної теорії систем використовувалися для практичного застосування.

Системний підхід відрізняється від традиційного підходу припущенням, що ціле має такі властивості, яких не мають його частини. Наявністю цих якостей ціле, власне, і відрізняється від своїх частин.

Застосовуючи цей термін, швидше за все, просто хотіли підкреслити необхідність дослідження об'єкта з різних сторін, комплексно, на відміну від раніше прийнятого поділу досліджень на фізичні, хімічні та ін. Демонструвалося, що за допомогою багатоаспектних досліджень можна отримати більш правильне уявлення про реальні об'єкти, виявити їхні нові властивості, краще визначити взаємозв'язки об'єкта з навколишнім середовищем, з іншими об'єктами. Запозичені при цьому поняття з теорії систем не вводилися жорстко, не досліджувалися питання, яким класом систем краще відобразити об'єкт, які властивості та закономірності цього класу варто враховувати при конкретних дослідженнях, і т. ін. Іншими словами, цей термін застосовувався практично замість термінів «*комплексний підхід*», «*комплексні дослідження*».

Нині системний підхід є одним із загальноновизнаних методів розв'язання різноманітних складних задач у ситуаціях, що характеризуються

спільною дією великого числа факторів різної природи. Так наприклад, навіть при розв'язанні суто виробничих задач, крім питань про технічне обладнання (устаткування, енергія, сировина, допоміжні матеріали), необхідно враховувати низку факторів соціального характеру, пов'язаних із забезпеченням підприємства робочою силою, а також питання підбору, розстановки, навчання і використання виробничого й управлінського персоналу. При цьому, одночасно з виробничим навчанням, доводиться вирішувати завдання з організації ідалень, дитячих ясел, будинків відпочинку, транспорту і багато інших. Особливо гостро ці питання постають під час організації виробництва в новоосвоюваних промислових районах. Очевидно, що ще більше різноманітних за своєю природою факторів доводиться враховувати при будівництві нових міст і організації життя в них. Не менші труднощі викликає організація праці в сучасному сільському господарстві, де необхідно зважати на безліч кліматичних умов, які змінюються випадково. Нарешті, майже неосяжна кількість факторів впливає на екологічну сферу, більшість із яких усе ж доводиться враховувати при розв'язанні гострої проблеми охорони довкілля і раціонального природокористування.

Очевидно, що розв'язувати ці завдання можна тільки з позицій аналізу зв'язків і взаємопроникнення різноманітних явищ, чіткого розуміння причинно-наслідкових зв'язків, розуміння головної ланки в ланцюзі явищ – позицій, на яких засновували свої дослідження всі видатні вчені.

Першими роботами в цій царині, як уже згадувалося, варто вважати праці О. О. Богданова (Богданов – це псевдонім, справжнє прізвище вченого – Маліновський), які, проте, не отримали широкого поширення. Більший резонанс викликали праці таких зарубіжних учених, як Людвіг фон Берталанфі, Месарович, Акоф, Оптнер та ін. Значний внесок у теорію і практику системних досліджень внесли радянські дослідники – Бусленко, Сетров, Блауберг, Юдін, Марчук, Афанасьєв, Глушков, Моїсеєв, Уйюмов і багато інших.

Системний підхід до дослідження будь-яких складних явищ має здійснюватися з урахуванням усієї цілісності цього явища і його зв'язків із навколишнім середовищем. При аналізі явища дуже важливо визначити, закономірне воно чи випадкове, стійке чи нестійке, тобто чи є воно результатом функціонування якоїсь системи чи результатом прояву випадкових, не пов'язаних між собою факторів.

Під час розв'язання задачі синтезу системний підхід повинен давати можливість створювати такі сукупності певних елементів, які забезпечували б їхнє стійке, гарантоване функціонування, тобто забезпечували б створення системи. Отже, при розгляді системного під-

ходу насамперед слід зупинитися на якомусь понятті системи, що відповідає поставленій цілі, і прийнятій методиці дослідження.

Системний підхід ґрунтується на принципах діалектики: взаємозв'язок і розвиток, залежність (зв'язаність) і незалежність (автономність), якісна різниця частини і цілого. Проте цей підхід у реалізації названих принципів вужчий за діалектику. Можна вказати, зокрема, на принцип розвитку, який у системному підході представлений лише через рух і зміну, при цьому принцип заперечення в розвитку в останній конструктивно не включений.

Як відносно самостійна частина методології дослідження систем, системний підхід містить і низку специфічних ознак, до яких насамперед належить *принцип системності*. У цьому плані системний підхід є однією з форм методологічного знання, пов'язаною з дослідженням і створенням об'єктів систем, і відноситься тільки до систем.

Другим принципом є *принцип ієрархічності пізнання*, який вимагає трьох рівнів вивчення предмета: вивчення самого предмета – «власний» рівень, вивчення цього ж предмета як елемента більш загальної системи – «вищий» рівень і, нарешті, вивчення предмета у співвідношенні з компонентами, які складають цей предмет, – «нижчий» рівень.

Третій принцип – *принцип формалізації* – показує, що системний підхід спрямований на отримання кількісних характеристик, створення методів, що звужують неоднозначність понять, визначень, оцінок і т. ін. Весь розвиток «системного руху» показує наполегливе прагнення до розробки конструктивних методів опису, аналізу і синтезу систем. Доказом може слугувати значне поширення *системного аналізу*, який образно називають «*технологією системного підходу*».

Основні проблеми системного підходу пов'язані з розвитком методів практичної реалізації вказаних принципів і, зокрема, з виявленням законів об'єднання частин у ціле і законів, що визначають характер структури, функціонування, руху і розвитку, зв'язку з умовами і середовищем існування, граничних характеристик систем, із розробкою змістовних і формальних засобів представлення досліджуваних об'єктів як систем, із дослідженням методологічних основ різноманітних системних теорій і т. д.

Системний підхід до аналізу і розробки систем знаходить застосування в тому чи іншому аспекті багатьма науками (*дослідження операцій, системотехніка, системний аналіз*). Між цими науками немає чітких меж, дуже часто в них використовуються однакові математичні методи. Тому нині зусилля спеціалістів спрямовані на розробку загальної теорії систем, що використовує *ізоморфізм* (аналогічність) процесів, які відбуваються в системах різних типів (біологічних, технічних, соціальних, економічних).

У роботах, здійснених під назвою «*системні дослідження*», поняття теорії систем застосовуються більш конструктивно: визначається клас систем, вводиться поняття структури, а іноді й правила її формування і т. ін. Системні дослідження – наступний крок після системного підходу в дослідженні систем. У пошуках конструктивних рекомендацій з'явилися системні напрямки з різними назвами: *системологія*, *системотехніка* та інші, і для їхнього узагальнення почав застосовуватися термін «*системні дослідження*». Часто в роботах під такою назвою використовувався апарат дослідження операцій, який більш розвинений, ніж методи конкретних системних досліджень.

Системологія. Взагалі вважається, що предметом вивчення системології є організація складних систем, їхній структурний і алгоритмічний опис. До системології належить низка специфічних проблем, зокрема:

- визначення значення, цінності, змісту інформаційного відображення різноманітних форм і конкретних проявів організації;
- формулювання цілей, вивчення шляхів їхнього виникнення і формування;
- дослідження зв'язків і взаємовідносин між внутрішньою природою об'єкта і її зовнішніми проявами;
- вивчення процесів відображення організації, появи інформації, зв'язку інформації з організацією;
- дослідження процесів і форм прямування від змістовного до формального, утворення й аналізу евристичних відомостей, які не піддаються повній формалізації [Кулик В. Т. Алгоритмизация объектов управления : справочник. – К.: Наукова думка, 1968. – 363 с.].

Результати і методи системології зможуть застосовуватися не тільки для вирішення різнорідних проблем, але й позитивно впливати на інтеграцію наук у таких напрямках [Дружинин В. В., Конторов Д. С. Проблемы системологии. – М.: Сов. радио, 1976. – 295 с.]:

- розробка концептуальної основи для однотипної постановки і розв'язання задач, що належать до різноманітних галузей знання і діяльності;
- розробка спільної методології дослідження проблем, постановка яких характеризується великою входною невизначеністю;
- розробка і формалізація таких загальних категорій, як ситуація, взаємодія, цілеспрямовання, складність, розвиток;
- розробка апарату кількісного представлення факторів, категорій і проблем у цілому;
- розробка техніки розв'язання недовизначених великорозмірних задач і цілеспрямованої поведінки в невизначених умовах.

Системотехніка. Системотехніка – це науковий напрямок, який вивчає загальносистемні властивості системотехнічних комплексів, процеси їхнього створення, удосконалювання, використання і ліквідації з метою одержання максимального соціального ефекту. Основним методом системотехніки є системний підхід.

Термін «системотехніка» (від англ. System Engineering) уперше був уведений Поворовим – редактором відомої книги Гуда і Макола «Системотехніка. Введення в проектування великих систем».

Попри те що системотехніка – наука порівняно молода, нині вона є достатньо сформованим науковим напрямком. Певним підтвердженням цього є введення ще в 1977 р. кваліфікації «інженер-системотехнік», яка присвоюється спеціалістам у галузі проектування автоматизованих систем управління і ЕОМ, де системотехніка посіла провідне місце. Ще 1969 р. в Московському енергетичному інституті професором Ф. Є. Темніковим була створена перша в СРСР кафедра системотехніки.

Основні проблеми, навколо яких розгортається теоретична і практична робота в системотехніці, природно, багато в чому збігаються із загальною проблематикою системних досліджень, але мають і свою специфіку. Цей факт визначається насамперед тим, що дослідження в системотехніці дуже «заземлені», націлені на практичні результати створення або використання складних технічних комплексів. Друга особливість системотехніки пов'язана з існуючою неоднорідністю об'єкта дослідження за його компонентним складом.

Значне місце в системотехніці посідають роботи з питань оптимізації функціонування та оцінювання ефективності систем. Інше широке коло досліджень систем присвячене проблемам проектування, з якими, у свою чергу, тісно пов'язані питання моделювання складних технічних комплексів [Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1968. – 247 с.; Вильсон А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 248 с.], зокрема імітаційних моделей [Бусленко В. Н. Автоматизация имитационного моделирования сложных систем. – М.: Наука, 1977. – 239 с.; Клыков Ю. И. Ситуационное управление большими системами. – М.: Энергия, 1974. – 135 с.; Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. – М.: Мир, 1978. – 418 с.]. Ці ж проблеми відіграють помітну роль при формуванні процедур випробувань систем [Динамическое моделирование и испытания технических систем / Под ред. проф. И. Д. Кочубиевского. – М.: Энергия, 1978. – 302 с.; Мозгалеvский А. В., Гаспаров Д. В. Техническая диагностика. – М.: Высшая школа, 1975. – 208 с.]. Значного прогресу досягнуто в розвитку тієї групи питань, які пов'язані із завданнями використання систем: планування і керування [Дружинин В. В., Конторов Д. С. Вопросы военной системотехники. –

М.: Воениздат, 1976. – 295 с.; Поспелов Г. С., Ириков В. А. Программно-целевое планирование и управление (введение). – М.: Сов. радио, 1976. – 440 с.], обслуговування і забезпечення функціонування [Дружинин Г. В. Процессы технического обслуживания автоматизированных систем. – М.: Энергия, 1973. – 272 с.; Мозгалеvский А. В., Гаспаров Д. В. Техническая диагностика. – М.: Высшая школа, 1975. – 208 с.].

Загальний аналіз розвитку системотехніки показує, що, крім названих проблем, перед системотехнікою передусім постають такі завдання:

- виявлення й опис найбільш загальних характеристик і закономірностей, які не залежать від конкретного типу технічних комплексів;
- розробка експериментальних методів, що дозволяють із достатньою достовірністю при прийнятному обсязі ресурсів, які використовуються, оцінювати теоретичні концепції;
- вивчення кругообігу речовини і послідовності операцій з використання енергії та формування на цій основі узагальнених критеріїв окремих типів систем;
- розробка методів реалізації принципів системотехніки при створенні та використанні конкретних зразків систем].

Р. Макол сформулював сім ознак, що, на його думку, обмежують клас систем, які розглядає системотехніка [Макол Р. Справочник по системотехнике: пер. с англ. / Под ред. А. В. Шилейко. – М.: Сов. радио, 1970. – 688 с.]:

- 1) система створюється людиною з різноманітного обладнання і сировини;
- 2) система має цілісність, усі її частини служать досягненню єдиної мети;
- 3) система є великою як з погляду її складових елементів, так і з точки зору числа однакових частин, можливо, числа виконуваних функцій, та вартості;
- 4) система є складною, тобто зміна якоїсь змінної спричиняє зміну багатьох інших змінних, причому математична модель системи має бути достатньо складною;
- 5) система є напівавтоматичною, тобто частина функцій системи завжди виконується автоматами, а частина – людиною;
- 6) вхідні впливи системи мають стохастичну природу, звідки впливає неможливість передбачення поведінки системи для будь-якого моменту часу;
- 7) більшість систем, і в першу чергу – найскладніші системи, містять елементи конкурентної ситуації.

Суттєва абстрактність системотехніки, забезпечуючи широку

придатність її висновків, має той недолік, що значно послабляється зв'язок зі специфічними вимогами і властивостями окремих класів систем. Це утруднює «переклад» отриманих висновків і принципів на мову конкретних галузей техніки. Остання обставина є основою тієї тенденції диференціації, яка виявляється останнім часом у системотехніці. Так, виділяють теоретичну системотехніку, системотехніку в радіолокації, системотехніку в АСУ, системотехніку на транспорті, військову системотехніку і т. д.

Системний аналіз. Найбільш конструктивним напрямком у наш час вважається системний аналіз. Цей термін вживається у літературі неоднозначно. В одних літературних джерелах він визначається як «додаток системних концепцій до функцій управління, пов'язаний з плануванням», в інших – як синонім термінів «аналіз систем» або «системні дослідження».

Звертаючись до тієї області системної методології, яка пов'язана з поняттям системного аналізу, неважко помітити, що досі існують різні точки зору на його зміст і сфери застосування. В одних випадках у системний аналіз включаються всі напрямки, що забезпечують розв'язання комплексних проблем, в інших – системний аналіз зводиться лише до тих методів, які використовуються при плануванні та управлінні.

До останнього часу ведуться суперечки і про сам термін «*системний аналіз*». Вони виникли, безумовно, через саме походження слів «*система*» і «*аналіз*»: у перекладі з давньогрецької «*система*» (συστήμα) означає «*ціле, складене з частин*», а «*аналіз*» (αναλύσις) – «*розкладання*», «*розчленовування*», «*розбір*». Існують досить радикальні термінологічні пропозиції деяких учених з цього приводу, наприклад: «Сам термін «системний аналіз» необґрунтований, оскільки слово «аналіз» суперечить поняттю цілісності, яке міститься в терміні «система». Настав час замінити застарілий термін, застосувавши новий, несуперечливий по суті. Можливо, підійде назва «дослідження систем», яка не містить протиріччя».

Також досі продовжуються суперечки довкола того, чим вважати системний аналіз: наукою, мистецтвом чи «технологічним ремеслом». Особливо гостро дискутується застосування системного аналізу до проблем, пов'язаних із соціальними, соціотехнічними системами, тобто системами, в яких вирішальну роль відіграють люди. При вирішенні таких проблем суттєвими виявляються не тільки питання побудови і використання моделей, не тільки евристичні пошуки розв'язання слабоструктурованих задач, які формалізуються не цілком, а й суто психологічні аспекти людських взаємовідносин, що ще більш «віддаляє» системний аналіз від «чистих наук» на зразок математики і

фізики.

Проте, незалежно від того, застосовується він тільки до визначення структури цілей системи, до планування чи до дослідження системи в цілому, праці з системного аналізу істотно вирізняються тим, що в них завжди пропонується методологія проведення досліджень, робиться спроба виділити етапи дослідження і запропонувати методику здійснення цих етапів у конкретних умовах. Крім того, в цих працях завжди приділяється особлива увага визначенню цілей системи і питанням формалізації їхнього представлення; деякі автори навіть підкреслюють це у визначенні (*системний аналіз – «методологія дослідження цілеспрямованих систем»*).

Системний аналіз викликала до життя практика, яка поставила людство перед необхідністю вивчати і проектувати складні системи, управляти ними в умовах неповноти інформації, дефіциту часу, обмеженості ресурсів.

Спочатку роботи із системного аналізу здебільшого базувалися на ідеях теорії оптимізації та дослідження операцій. Потім, у пошуках конструктивних засобів організації прийняття рішення, системний аналіз почали визначати як *«процес послідовного розбиття процесу, який вивчається, на підпроцеси»* і основну увагу приділяли вибору прийомів, які дозволяють організувати вирішення складної проблеми шляхом її розчленування на підпроблеми та етапи, для яких можна було підібрати методи дослідження.

Поряд із розчленовуванням процесу прийняття рішення на етапи і підетапи, розроблялися формалізовані методи поділу систем на підсистеми, цілей – на підцілі і т. д. У більшості праць багатоступінчасте розчленовування подавалося у вигляді ієрархічних структур типу «дерева». Стосовно дослідження цілей ці структури отримали назву «дерева цілей». Але в ряді випадків розроблялися й методики отримання варіантів структур, які визначають не просторовий (як «дерева цілей»), а часовий поділ цілі на послідовність підцілей або функцій, спрямованих на її досягнення.

В усіх випадках розчленовування процесу прийняття рішення на етапи або системи на підсистеми підхід до розчленовування, як правило, є вираженням розуміння автором методики процесу постановки і вирішення проблеми. Тому в одному із визначень наголошується, що *«системний аналіз – це освічений здоровий глузд, на службу якому поставлені математичні моделі»*.

У своїй праці «Системний аналіз і цільове управління» Д. Кліланд і В. Кінг відзначають, що:

- системний аналіз – це «формалізований здоровий глузд»;
- системний аналіз дає основу для сполучення знань і досвіду

фахівців багатьох галузей при пошуку рішень, труднощі яких не можуть бути подолані на основі суджень будь-якого окремого експерта;

- системний аналіз має забезпечити «чітке розуміння місця і значення невизначеності в прийнятті рішення» і навіть створити для цього спеціальний апарат.

Як уже було сказано, у багатьох працях системний аналіз розвивався стосовно проблем планування і управління, потім, у зв'язку з посиленням уваги до програмно-цільових принципів у плануванні, термін *«системний аналіз»* став практично невіддільним від термінів *«цілеутворення»* і *«програмно-цільове планування»*. Відповідно, поряд із дослідженнями прийомів розчленовування на частини, стали з'являтися роботи, в яких глибоко аналізуються системи як ціле, розглядається роль *цілеутворення* в розвитку цілого, роль людини. Виявилося, що для дослідження цих питань у системному аналізі не вистачало засобів: в основному розвивалися засоби розчленовування на частини, а ось рекомендації щодо того, як при розчленовуванні не втратити цілого, були цілком відсутні.

Розуміючи недостатність і необхідність розробки засобів збереження цілісності, останнім часом часто повертаються до визначення системного аналізу як *«формалізованого здорового глузду»*, до його розуміння як мистецтва, попри те, що воно потребує спеціальної математичної підготовки.

Нині ще не можна сказати, що питання поєднання та взаємодії формального і неформального при здійсненні системного аналізу вирішені, проте розвиток системного аналізу йде шляхом розв'язання цієї проблеми.

Сучасний системний аналіз є прикладною наукою, спрямованою на з'ясування причин реальних складнощів і на вироблення варіантів їх усунення.

З урахуванням усього вищесказаного, даючи визначення системного аналізу, потрібно зауважити, що він:

- застосовується для розв'язання таких проблем, які не можуть бути поставлені та вирішені окремими методами математики;
- використовує не тільки формальні методи, а й методи якісного аналізу (*«формалізований здоровий глузд»*), методи, спрямовані на активізацію використання інтуїції та досвіду спеціалістів;
- об'єднує різні методи за допомогою єдиної методики;
- повинен спиратися на науковий світогляд;
- дає можливість об'єднати знання, судження та інтуїцію спеціалістів різноманітних галузей знань і зобов'язує їх до певної дисципліни мислення.

Об'єктом системного аналізу, зрозуміло, є різноманітні системи, у

тому числі й такі, як процеси підготовки і прийняття рішень, які розглядаються, знов-таки, як системи правил, процедур і прийомів. Варто спеціально наголосити на останньому положенні. Справа в тому, що процеси підготовки та прийняття рішення не можуть бути цілком вивчені в рамках системного аналізу. Величезний внесок у цю область покликана внести насамперед *психологія*.

Предмет системного аналізу, тобто ті сторони об'єкта, які досліджуються, містить у собі загальносистемні характеристики і взаємодію системи з її оточенням.

Найважливішими теоретичними сферами системного аналізу є такі напрямки:

- загальні принципи проведення досліджень складних систем, зокрема принципи інтегрування різноманітних методів, у тому числі й методів інших дисциплін, у взаємобумовлену сукупність методів системного аналізу;
- проблеми складності та невизначеності і методи їх вирішення;
- проблема граничних характеристик систем;
- принципи імітації, яка може бути здійснена машиною.

Провідною концепцією системного аналізу є, звичайно ж, системний підхід.

Велике значення має кількісне оцінювання різноманітних властивостей, характеристик і факторів, тому побудову математичних моделей можна вважати основою всього системного аналізу.

Наступною концепцією є процесуальний розгляд усіх зрізів системи (морфологічного, функціонального, інформаційного і прагматичного), що забезпечує визначення перспектив і більш виразне формування цілей.

Нарешті, важливою особливістю системного аналізу є широке використання ЕОМ.

У загальній постановці питання можна було б визначити системний аналіз як *науковий напрямок, що забезпечує на основі системного підходу розробку методів і процедур рішення слабоструктурованих проблем за наявності суттєвої невизначеності*.

На сьогодні системний аналіз містить дуже широкий спектр різноманітних методів, які можна об'єднати в такі групи: евристичне програмування, семіотичний підхід, методи аналогій, аналітичні методи та імітаційне моделювання.

Необхідно наголосити, що складний характер задач системного аналізу вимагає від спеціаліста широкого світогляду, знання досягнень у суміжних галузях науки і техніки, особливо в математиці та обчислювальній техніці, оскільки роль обчислювальної техніки в системному аналізі величезна і дуже часто моделювання та розрахунки на

ЕОМ є єдиною реальною можливістю розв'язання системних задач.

З огляду на те що мета нашого посібника – не розвиток теорії систем, а використання її досягнень для здійснення процесу формалізації прикладних задач, надалі будемо розглядати найбільш конструктивний з охарактеризованих напрямків системних досліджень – *системний аналіз*.

Дисципліна «Системний аналіз» базується навчальних дисциплінах «Математика», «Фізика», «Інформатика», «Теорія автоматичного управління технологічними системами».

«Системний аналіз» є загальноосвітньою дисципліною, знання тем якої необхідне при вивченні дисциплін «Розробка програмного забезпечення комп'ютерно-інтегрованих систем», «Математичне моделювання та оптимізація технологічних систем», «Розмірне моделювання та аналіз технологічних процесів», «Системи автоматизованого програмування для верстатів з ЧПУ», «Проектування автоматизованих виробництв», «Проектування технологічного оснащення», «Проектування механоскладальних цехів», а також виконувати курсове і дипломне проектування.

Дисципліна «Системний аналіз» дає можливість спеціалістам застосувати нові методи досліджень об'єктів економіки, формує вміння розв'язувати різноманітні складні задачі в галузі економіки з високим ступенем обґрунтованості при прийнятті рішення. Ця дисципліна забезпечує набуття методологічних навиків, необхідних для проведення аналізу і синтезу будь-яких складних технологічних систем і об'єктів економічних систем.

Кількість праць з методології та практики системних досліджень в усіх сферах життя і діяльності людей продовжує стрімко зростати, що свідчить про плідний розвиток і застосування нового методу дослідження. Однак теорія системного аналізу і, особливо, методологія його застосування до розв'язання задач управління все ще залишаються достатньо складними й недоступними для широкого кола спеціалістів. Тому в пропонованому посібнику наведено такий виклад основ системного аналізу, який, на думку авторів, є доступним для широкого кола студентів і дає змогу застосовувати цю методологію для розв'язання найрізноманітніших задач управління та економіки.

При підготовці посібника було здійснено спробу об'єднати матеріали вчених, які займаються теоретичними дослідженнями в галузі системних методів та моделей, і тих, хто застосовує методи та моделі системного аналізу на практиці, при вирішенні конкретних проблем.

2.4. Система, її структура і функціонування

Класифікація систем. Структура. Фундаментальним поняттям системного аналізу, як і теорії систем, системотехніки, системології, кібернетики, є поняття «система». Проте ще й досі не існує загальноприйнятого визначення цього поняття. Огляд різноманітних його тлумачень показує, що існують щонайменше чотири властивості, які повинен мати об'єкт, щоб його можна було вважати системою.

І властивість (цілісність і членованість): система є передусім цілісною сукупністю елементів. Це означає, що, з одного погляду, система – цілісне утворення, а з іншого – що в її складі чітко можуть бути виділені цілісні об'єкти (елементи). При цьому слід мати на увазі, що елементи існують лише в системі. Поза системою – це, у кращому разі, об'єкти, які мають «системнозначущі» властивості. При входженні в систему елемент набуває визначальну системну властивість замість цієї «системнозначущої».

З цього випливає, що інтерпретація поняття системи в термінах теорії множин не адекватна задачам опису специфічних системних утворень і може розглядатися лише як один з допоміжних аналітичних засобів їх вивчення. Справа в тому, що при формуванні множин вихідними будуть елементи. Для системи первинним є *ознака цілісності*, тобто вона розглядається як єдине ціле, яке складається із взаємодіючих частин, часто різноякісних, але водночас сумісних.

II властивість (зв'язки): зв'язки (відношення) між елементами, що входять у дану систему, або (і) їхніми властивостями перевершують за потужністю (силою) зв'язки (відношення) цих елементів з елементами, які не входять у цю систему.

У будь-якій системі встановлюються ті чи інші зв'язки (відношення) між елементами. Проте із системних позицій значення мають не будь-які, а лише суттєві зв'язки (відношення), що із закономірною необхідністю визначають інтегративні властивості системи. Вказана властивість відрізняє систему від простого конгломерату і вирізняє її з навколишнього середовища у вигляді цілісного утворення.

Зв'язок можна визначити як фізичний канал, яким забезпечується обмін між елементами системи і навколишнім середовищем, речовиною, енергією та інформацією.

Основна особливість зв'язку – перетворення певної величини або простору без зміни їхньої фізичної природи.

До основних характеристик зв'язку належать: *фізичне наповнення, направленість, потужність і роль у системі.*

За *фізичним наповненням* зв'язки можна поділити на *речовинні, енергетичні, інформаційні, змішані і ненаповнені (відношення).*

За напрямком розрізняють зв'язки: прямі, зворотні, контрзв'язки і

нейтральні.

Важливою характеристикою відношень і зв'язків є їхня *сила* (або *потужність*). Щодо цієї характеристики доцільне наступне твердження: система існує як певне цілісне утворення тоді й тільки тоді, коли потужність (сила) суттєвих зв'язків між елементами системи на інтервалі часу, що не дорівнює нулю, більша за потужність (силу) зв'язку цих же елементів із навколишнім середовищем.

Потужність функціональних зв'язків можна, очевидно, оцінити через коефіцієнт чутливості. Загалом ця характеристика ще маловивчена.

Порівняно просто оцінюється потужність речовинних і енергетичних зв'язків за інтенсивністю потоку речовини або енергії. Для інформаційних зв'язків оцінкою потенційної потужності може служити її пропускна спроможність, а реальної потужності – дійсна величина потоку інформації. Проте в загальному випадку при оцінюванні потужності інформаційних зв'язків необхідно враховувати якісні характеристики переданої інформації (цінність, корисність, правильність і т. ін.).

Роль зв'язку в системі визначається характером її впливу на перебіг процесів. У цьому сенсі розрізняють зв'язки: єднальні, обмежувальні, посилюючі (послабляючі), запізнювані (випереджальні, миттєві), селективні, перетворюючі, від'ємні і невід'ємні зворотні зв'язки, узгоджуючі, координуючі і т. д.

III властивість (організація) характеризується наявністю певної організації в системі.

Виникнення *організації* в системі – це, по суті, актуалізація (формування) суттєвих зв'язків елементів, упорядкований розподіл зв'язків і елементів у часі та просторі. При формуванні зв'язків складається певна структура системи, а властивості елементів трансформуються у функції (дії, поведінку), які пов'язані зі ще однією властивістю системи – її *інтегративними* якостями.

IV властивість (інтегративні якості): існування інтегративних якостей (властивостей), тобто таких якостей, які властиві системі в цілому, але не властиві жодному з її елементів окремо.

Наявність інтегративних якостей показує, що властивості системи хоч і залежать від властивостей елементів, але не визначаються ними цілком. Звідси випливає важливий висновок:

- 1) система не зводиться до простої сукупності елементів;
- 2) розчленовуючи систему на окремі частини, вивчаючи кожен з них окремо, не можна пізнати всі властивості системи в цілому.

Будь-який об'єкт, який має всі чотири розглянуті вище властивості, може вважатися системою. Таке визначення, безумовно, повніше відображає основні властивості систем, але й воно недостатньо конкретне для практичного використання.

Що ж до безпосереднього визначення поняття «система», то його варіантів існує дуже багато. Чи не найбільш повний перелік їх, що складається з 35 найменувань, наведений у праці В. П. Зінченка «Людський інтелект і технократичне мислення» [Зинченко В. П. Человеческий интеллект и технократическое мышление // Коммунист. – 1988. – № 3. – С. 96–104].

У перших визначеннях поняття «система» в тій чи іншій формі говорилося про те, що система – це елементи і зв'язки (відношення) між ними.

Аналіз визначень показує, що вони змінювалися не тільки за формою, але й за змістом. На великій кількості їх, зрозуміло, позначився науковий напрямок їхніх авторів. Проте більшість визначень зводиться до того, що система являє собою деяку організовану множину якихось об'єктів (чи понять), яка характеризується взаємозв'язаністю і загальним цілеспрямуванням.

Відомі, наприклад, такі визначення:

- система – комплекс елементів, які знаходяться у взаємодії (Людвіг фон Берталанфі);
- система – сукупність елементів, які знаходяться у певних відношеннях один з одним і з середовищем (Людвіг фон Берталанфі);
- система – множина пов'язаних діючих елементів (Ланге);
- система – множина об'єктів разом зі співвідношеннями між об'єктами та між їхніми атрибутами (Холл і Фейджин);
- система – організована множина (Темніков);
- система – множина об'єктів, на якій реалізовується певне відношення з фіксованими властивостями (Уйомов);
- система є засобом досягнення цілі (перше визначення системи Перегудова);
- система є сукупністю взаємозалежних елементів, відособленою від середовища і взаємодіючою з ним як ціле (друге визначення системи Перегудова) [Перегудов].

І нарешті, існує інтуїтивне поняття про системи як про якісь організовані множини, що характеризуються порядком і визначеністю, на противагу безсистемності як ознаці хаосу і випадковостей. Але й це поняття занадто загальне для того, щоб можна було на його підставі здійснювати серйозні дослідження.

Оскільки в практичній діяльності людей найбільше місце посідають динамічні системи, що відображають різноманітні процеси, які відбуваються в природі, суспільстві та технічних пристроях, видається цікавим досить чітке визначення системи, дане Оптнером: «Система – процес, який відбувається». Проте сам Оптнер говорить про це визначення так: «Це визначення не є неправильним, але воно істотно неповне. Існують приклади систем (системи телефонного та радіо-

зв'язку і т. ін.), які не можуть бути підведені під вищенаведене визначення, оскільки в них немає «руху» у звичному значенні. Більш повне і змістовне визначення описує систему як набір об'єктів, які мають такі властивості, і набір зв'язків між об'єктами та їхніми властивостями». Необхідно зауважити, що існує ще одне визначення системи за Оптнером: «Система є засобом, за допомогою якого виконується процес вирішення проблеми».

У перекладі з грецької «система» (συστήμα) означає «склад», «ціле, складене з частин».

Філософський словник визначає систему як «сукупність елементів, що знаходяться у відношеннях і зв'язках між собою певним чином і утворюють певну цілісну єдність», Велика радянська енциклопедія – як «об'єктивну єдність закономірно пов'язаних один з одним предметів, явищ, а також знань про природу і суспільство».

У найбільш загальному вигляді систему можна описати як множину взаємозалежних елементів:

$$S = \{ \Sigma, V, ST, E \}, \quad (1.17)$$

де $\Sigma = \{ \Sigma_i \}$ – множина елементів, які входять у систему S ;

$V = \{ V_i \}$ – множина зв'язків між елементами системи S ;

ST – структура системи S ;

$E = \{ e_\phi \}$ – оточення системи, що являє собою множину елементів, які існують поза системою S і при цьому впливають на її стан, структуру і функціонування.

Існує також низка узагальнюючих визначень системи, які відрізняються між собою кількістю факторів, що враховуються, і рівнем абстрактності. Нижче наведено деякі з цих визначень, подані у символічній формі [Волкова В. Н., Воронков В. А., Денисов А. А. и др. Теория систем и методы системного анализа в управлении и связи. – М.: Радио и связь, 1983. – 248 с.].

1. Система є чимось цілим:

$$S = H(1, 0). \quad (1.18)$$

Це визначення відображає факт існування і цілісність. Двійкове судження $H(1, 0)$ відображає наявність або відсутність цих якостей.

2. Система є організованою множиною (визначення Темнікова):

$$S = (OPG, M), \quad (1.19)$$

де OPG – оператор організації;

M – множина.

3. Система є множиною речей, властивостей і відношень (спрощене визначення Уйомова):

$$S = (\{m\}, \{n\}, \{r\}), \quad (1.20)$$

де m – речі;
 n – властивості;
 r – зв'язки.

4. Система є множиною елементів, які утворюють структуру і забезпечують певну поведінку в умовах навколишнього середовища:

$$S = (\sigma, ST, BE, E), \quad (1.21)$$

де σ – елементи;
 ST – структура;
 BE – поведінка;
 E – середовище.

5. Система є множиною входів, множиною виходів, множиною станів, які характеризуються функцією переходів і функцією виходів:

$$S = (X, Y, s, \delta, \lambda), \quad (1.22)$$

де X – входи;
 Y – виходи;
 s – стани;
 δ – функція переходів;
 λ – функція виходів.

Найпростішою із загальноприйнятих моделей системи, її візуальним еквівалентом є непрозора скриня, яка відокремлена від навколишнього середовища. Вже ця, максимально проста, модель відображає дві такі важливі властивості системи, як *цілісність* і *відокремленість* від середовища.

З того, що система пов'язана із середовищем, випливає, що за допомогою зв'язків система впливає на середовище. Ці зв'язки називаються *виходами* системи.

Знову ж, оскільки система пов'язана із середовищем, то не викликає сумніву й той факт, що за допомогою цих зв'язків середовище впливає на систему. Ці зв'язки називаються *входами* системи.

Внаслідок цього отримана модель системи отримала назву «чорної скрині» (рис. 1.11).



Рис. 1.11. Модель «чорної скрині»

Назва «чорна скриня» образно підкреслює цілковиту відсутність відомостей про внутрішній зміст «скрині»: в цій моделі задаються, фіксуються, перелічуються тільки вхідні та вихідні зв'язки системи із середовищем. Навіть «стінки скрині» (тобто межа між системою і середовищем), як правило, не описуються, а лише припускаються, визнаються як існуючі.

Така модель, незважаючи на зовнішню простоту і відсутність відомостей про «внутрішні» системи, часто виявляється корисною.

Часто буває достатньо змістовного словесного опису входів і виходів – у цьому випадку модель «чорної скрині» є просто їхнім переліком. Наприклад, побутова модель радіоприймача така: входи – шнур електроживлення (або акумуляторні батареї), антена, ручки настройки; виходи – динаміки. В інших випадках потрібен кількісний опис деяких або всіх входів і виходів.

Намагаючись максимально формалізувати модель «чорної скрині», можна задати дві множини: вхідних X і вихідних Y змінних, але ніяких інших відношень між цими множинами не можна фіксувати, інакше це вже буде не «чорна», а «прозора скриня».

Є очевидним, що кожна система характеризується певними входами і виходами. Виходи системи відображають її призначення, входи – вхідні фактори, під впливом яких вона функціонує. Врешті, сама система відображає перетворення вхідних продуктів (речовини, енергії, понять) у вихідні (кінцеві). При цьому зміна одного з цих елементів спричиняє зміну і двох інших. Відразу ж необхідно припускати, що на вході системи можуть виявитися не тільки корисні фактори, а й певні перешкоди. Цілковито аналогічно, слід припускати, що й на виході системи, крім корисної частини (продукції), можуть з'явитися різноманітні «відходи», які можуть розглядатись як перешкоди для якихось наступних процесів. Нарешті, щодо самої системи варто припускати, що вона може складатись із сукупності певних складових частин (підсистем) як елементів єдиного цілого. Загальна спрямованість зв'язків між цими елементами має відображати функціонування всієї системи з перетворення входів на виходи (рис. 1.12).

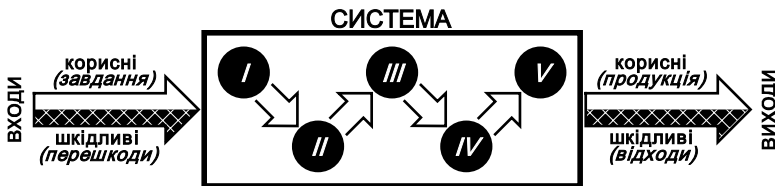


Рис. 1.12. Перша деталізація «чорної скрині»

З теорії керування [Петрушенко Л. А. Принцип обратной связи (некоторые философские и методологические проблемы управления). – М.: Мысль, 1976. – 276 с.] відомо, що будь-який стійкий процес можливий лише тоді, коли він складається з елементів, об'єднаних у замкнутий контур з негативним зворотним зв'язком. Крім цього контуру, безумовно, можуть бути й інші зв'язки та контури, що відображають фізику явищ, які відбуваються. Очевидно, що вхід і вихід системи є багатовимірними векторами $\vec{X}_{вх}$ і $\vec{X}_{вих}$. Зв'язки всередині ядра системи, як виходи елементарних ядер, у сукупності складають вектор стану системи $\vec{X}_{см}$, що відповідає прийнятому математичному представленню систем. У зв'язку з цим більш повно і змістовно система може бути подана так, як це показано на рис. 1.13.

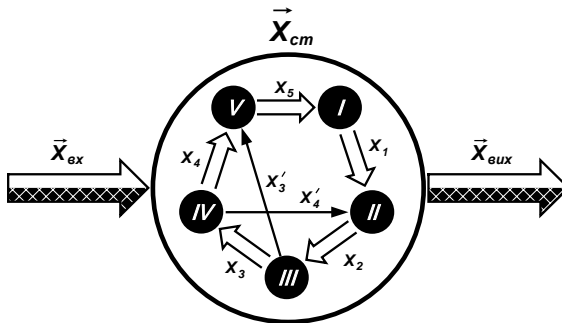


Рис. 1.13. Друга деталізація «чорної скрині»

Залежно від того, який з елементів моделі «чорної скрині» невідомий, розрізняють різноманітні типи системних задач (табл. 1.1).

Аналізовані нижче поняття, за допомогою яких уточнюють уявлення про систему і характеризують її будову та функціонування, щільно пов'язані між собою і, на думку низки вчених (у тому числі Людвіга фон Берталанфі), не можуть бути визначені незалежно, а визначаються одне через інше, уточнюючи одне одного. Тому прийняту послідовність викладу понять доцільно вважати умовною.

Елемент. Під елементом розуміють найпростішу неподільну частину системи. Відповідь на питання, що є такою частиною, може бути неоднозначною. Наприклад, у якості елементів верстата можна назвати станину, супорт, шпиндель і т. д., а можна – атоми, молекули тощо, залежно від аспекту його розгляду.

Тому під *елементом* розуміють межу членування системи з точки зору розв'язання певної задачі, з огляду на поставлену ціль.




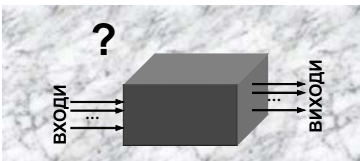
Залежно від формулювання цілі та її уточнення в процесі прий-

няття рішення систему можна розчленовувати на елементи різними способами.

Підсистема. Система може бути розділена на елементи не відразу, а послідовним розчленовуванням на підсистеми, які є компонентами більшими за елементи і водночас більш детальними, ніж система в цілому. Можливість поділу системи на підсистеми пов'язана з вичленуванням сукупностей взаємозалежних елементів, здатних виконувати відносно незалежні функції, спрямовані на досягнення загальної цілі системи. Назвою «підсистема» підкреслюється, що така частина повинна мати властивості системи (зокрема властивість цілісності). Цим підсистема відрізняється від простої групи елементів, для якої не сформульована підціль і яка не має властивості цілісності (до такої групи застосовується назва «компоненти»).

Таблиця 1.1

Типи системних задач залежно від ситуації

Ситуація	Тип задачі
 <p>НАВКОЛИШНЄ СЕРЕДОВИЩЕ</p> <p>? ... ВХОДИ</p> <p>... ВИХОДИ</p>	Вимірювання (інверсний аналіз)
 <p>НАВКОЛИШНЄ СЕРЕДОВИЩЕ</p> <p>ВХОДИ ... ?</p> <p>... ВИХОДИ</p>	Синтез
 <p>НАВКОЛИШНЄ СЕРЕДОВИЩЕ</p> <p>ВХОДИ ... ?</p> <p>... ?</p>	Аналіз (дедукція)
 <p>? ...</p> <p>ВХОДИ ... ВИХОДИ</p>	Наукові дослідження (індукція)

Структура. Як уже говорилося, система може бути визначена простим перерахуванням елементів, які входять до неї і взаємодіють таким чином, що це призводить до утворення цілісних (системних) властивостей, або «чорною скринею» із входами і виходами, які взаємодіють із середовищем. Проте при дослідженні об'єкта ставиться задача не просто відокремити об'єкт від середовища – потрібно з'ясувати більш детально, що саме являє собою об'єкт або процес, який у ньому забезпечує виконання поставленої цілі.

Трапляється, що для розв'язання задачі є достатнім визначити елементи і зв'язки між ними, і цих елементів і зв'язків відносно небагато. Проте, як правило, елементів виявляється дуже багато і вони неоднорідні, тож виникає необхідність багатоступінчастого розчленування системи. У цьому випадку вводиться поняття *структури*.

Структура (від латинського слова *structure*, що означає «будова», «розташування», «порядок») відображає найбільш істотні взаємовідносини між елементами та їхніми групами (компонентами, підсистемами), які мало змінюються при змінах у системі і забезпечують існування системи та її основних властивостей.

У більшості випадків поняття структури прийнято пов'язувати з графічним відображенням. Проте це не є обов'язковим. Структура може бути подана також у вигляді теоретико-множинних описів, матриць, графів та інших мов моделювання структур.

Структурні зв'язки незалежні від елементів і можуть виступати як інваріант при переході від однієї системи до іншої. Завдяки цьому закономірності, отримані при вивченні систем, які відображають об'єкти однієї природи, можуть бути використані при дослідженні систем, що відображають об'єкти іншої фізичної природи (якщо, звичайно, вони зафіксовані в структурі).

Структуру часто прагнуть подати у вигляді ієрархії. Термін «ієрархія» («багатоступінчастість», «службові сходи») визначає упорядкованість компонентів за ступенем важливості. Між рівнями ієрархічної структури можуть існувати взаємовідносини жорсткого підпорядкування компонентів (вузлів) рівня, який лежить нижче, одному з компонентів рівня, який лежить вище, тобто відношення деревоподібного порядку. Такі ієрархії називають сильними, або ієрархіями типу «дерева». Вони мають ряд особливостей, що роблять їх зручним засобом подання систем керування. Проте між рівнями ієрархічної структури не обов'язково повинні існувати взаємовідносини жорсткого деревоподібного порядку. Можуть бути зв'язки і в межах одного рівня ієрархії. Той самий вузол рівня ієрархії, який лежить нижче, може одночасно підпорядковуватись кільком вузлам вищого рівня. Такі струк-

тури називають ієрархічними структурами зі слабкими зв'язками. Між рівнями ієрархічної структури можуть існувати і більш складні взаємовідносини.

Та сама система може бути подана різними структурами залежно від етапу відображення об'єкта або процесу у вигляді системи, від аспекту поданої системи, цілі її створення.

Зв'язок. Поняття «зв'язок» входить до будь-якого визначення системи поряд із поняттям «елемент» і забезпечує виникнення та збереження структури та її цілісних властивостей. Це поняття одночасно характеризує і будову (статичу), і функціонування (динаміку) системи.

На сьогодні не має єдності в трактуванні понять *зв'язок* і *відношення*, не вирішено питання достатності щільності мережі зв'язків для того, щоб систему можна було вважати системою.

Зв'язок можна охарактеризувати *напрямком, силою, характером* (або *видом*). За першими двома ознаками зв'язки можна розділити на *направлені* і *ненаправлені*, *сильні* і *слабкі*, а за характером – на *зв'язки підпорядкування*, *зв'язки породження* (або *генетичні*), *рівноправні* (або *нечутливі*), *зв'язки керування*. Деякі з цих типів можна розглянути більш детально: наприклад, *зв'язки підпорядкування* можуть бути типів *«рід – вид»*, *«частина – ціле»*, *зв'язки породження* – типу *«причина – наслідок»*. Зв'язки можна розділити також за місцем прикладання (*внутрішні* і *зовнішні*), за направленістю процесів у системі в цілому або в окремих її підсистемах (*прямі* й *зворотні*) та за деякими більш окремими ознаками.

Зв'язки в конкретних системах можуть бути одночасно охарактеризовані кількома з названих ознак. Відповідно можна утворити стільки класів зв'язків, скільки можливо сполучень ознак, крім несумісних сполучень.

Дуже важливу роль у системах відіграє поняття зворотного зв'язку. Це поняття, що легко ілюструється на прикладах технічних пристроїв, не завжди можна застосувати в організаційних системах. Дослідженню цього поняття велику увагу приділяє кібернетика, яка вивчає можливість перенесення механізмів зворотного зв'язку, характерних для об'єктів однієї фізичної природи, на об'єкти іншої природи. Зворотний зв'язок є основою саморегулювання і розвитку систем, пристосування їх до умов існування, що змінюються.

При практичному використанні цього поняття в організаційних системах важливо враховувати і реалізовувати всі елементи ланцюга зворотного зв'язку, не забувати його «замкнути», а не обмежуватися тільки фіксацією неузгодженості.

Для опису функціонування організаційних систем застосовують також інші поняття, запозичені теорією систем у технічних дисциплін

або в наук про людину і тварин. Це такі поняття, як стан, поведінка, рівновага, сталість, розвиток, ціль.

Стан. Поняттям «*стан*» характеризують миттєву фотографію, «зріз» системи, зупинку в її розвитку. Його визначають або через входні впливи і вихідні сигнали (результати), або через макропараметри, макровластивості системи (наприклад, тиск, швидкість, прискорення). Так, говорять про стан спокою (стабільні входні впливи і вихідні сигнали), про стан рівномірного прямолінійного руху (стабільна швидкість) і т. ін.

Більш повно поняття «*стан*» можна визначити, якщо розглянути елементи (або компоненти, функціональні блоки), які визначають стан, ε , врахувати, що «*входи*» можна розділити на керуючі u і збудуючі x (неконтрольовані) і що «*виходи*» (вихідні результати, сигнали) залежать від ε, u і x , тобто $g_t = f(s_t, u_t, x_t)$. Тоді, залежно від задачі, стан може бути визначений як $\{\varepsilon, u\}$, $\{\varepsilon, u, g\}$ або $\{\varepsilon, u, x, g\}$.

Поведінка. Якщо система здатна переходити з одного стану в інший (наприклад, $s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3$), то кажуть, що вона володіє поведінкою. Цим поняттям користуються, коли не відомі закономірності переходів з одного стану в інший. У цьому випадку говорять, що система володіє якоюсь поведінкою і з'ясовують її закономірності. З урахуванням уведених вище понять, поведінку можна представити як функцію $s_t = f(s_{t-1}, u_t, x_t)$.

Рівновага. Поняття «*рівновага*» визначають як здатність системи за відсутності зовнішніх збудуючих впливів зберігати свій стан як завгодно довго.

Сталість. Під «*сталістю*» розуміють здатність системи повертатися в стан рівноваги після того, як вона була з цього стану виведена під впливом зовнішніх впливів. Такий стан рівноваги, в який система здатна повертатися, називають стійким станом рівноваги. Повернення в цей стан може супроводжуватися коливальним процесом.

Рівновага і сталість в економічних та організаційних системах – значно складніші поняття, ніж у техніці, і донедавна ними користувалися тільки для певного попереднього описового подання системи. Останнім часом здійснюються спроби формалізованого відображення цих процесів і в складних організаційних системах, що допомагають виявляти параметри, які впливають на їхній перебіг і взаємозв'язок.

Розвиток. Поняття «*розвиток*» допомагає пояснити складні термодинамічні та інформаційні процеси в природі та суспільстві. Дослідженню процесу розвитку, співвідношення розвитку і сталості, вивченню механізмів, що лежать у їхній основі, приділяється велика увага в кібернетиці та теорії систем.

Ціль. Застосування поняття «*ціль*» і пов'язаних із ним понять «*ці-*

леспрямування», «цілеспрямованість», «доцільність» стримується труднощами їхнього однозначного тлумачення в конкретних умовах. Це пов'язано з тим, що процес цілеутворення і відповідний йому процес обґрунтування цілей в організаційних системах дуже складний і не до кінця вивчений. Його дослідженню велика увага приділяється в психології, філософії, кібернетиці.

Аналіз визначень цілі та пов'язаних із ним понять показує, що протягом усього розвитку теорії пізнання і методології науки відбувався розвиток уявлень про ціль. У це поняття, залежно від стадії пізнання об'єкта, від етапу дослідження, вкладають різноманітні відтінки – від ідеальних устремлінь (ціль – «вияв активності свідомості», «людина і соціальні системи мають право формулювати цілі, досягнення яких неможливе, але до яких можна безупинно наближатися») до конкретних цілей-результатів, досяжних у межах певного інтервалу часу, які іноді навіть формулюються в термінах кінцевого продукту діяльності. Іноді в одному й тому ж формулюванні поняття «ціль» ніби трансформується, набуваючи різноманітних відтінків у межах умовної «шкали» – від ідеальних спрямувань до матеріального втілення. Наприклад, поряд із наведеним вище визначенням, ціль визначається як «те, чого прагне, чому вклоняється і за що бореться людина» (слово «бореться» уже припускає досяжність у визначеному інтервалі часу), ціллю вважається «модель бажаного майбутнього» (при цьому в поняття «модель» можна вносити різні ступені реалізованості) і, крім того, вводиться поняття, яке характеризує різновид цілі («мрія – це ціль, не забезпечена засобами її досягнення»).

Це протиріччя, що вкладене в поняття цілі (необхідність одночасно бути «ідеєю, що випереджає» і відображати її матеріальне втілення), виявлялося з моменту його виникнення (давньоіндійське словесне позначення цілі – «артха» – означало водночас мотив, причину, бажання, ціль і навіть засіб).

Розглянуте діалектичне протиріччя, яке вкладене в поняття ціль, дуже важливо розуміти і враховувати при системних дослідженнях, при формуванні колективної думки в процесі прийняття рішення. У практичних застосуваннях потрібно передусім визначати, в якому значенні на цьому етапі аналізу системи використовується поняття «ціль», що має бути відображено в її формулюванні більшою мірою – ідеальне устремління, яке дозволяє колективу бачити перспективи, чи реальні можливості, які забезпечують своєчасність завершення чергового етапу на шляху до ідеальних спрямувань.

В наш час, у зв'язку з посиленням програмно-цілевих принципів у плануванні, дослідженню закономірностей цілеутворення та поданню цілей у конкретних умовах приділяється все більше уваги. Залежно від складності досліджуваних об'єктів і проблем, ціль може подаватися

по-різному.

Різноманіття систем дуже велике, і повної їхньої класифікації досі не існує. Більш того, до сьогодні ще остаточно не розроблені й принципи самої класифікації.

Системи можна розподіляти на класи за різними ознаками і залежно від задачі, яка розв'язується, вибирати різні принципи класифікації. Протягом короткої історії розвитку теорії системних досліджень здійснювалися спроби класифікувати системи за видом відображуваного об'єкта (технічні, біологічні і т. д.), за видом наукових напрямків (математичні, фізичні, хімічні та ін.). Системи поділяють на детерміновані і стохастичні, відкриті і закриті, абстрактні та існуючі в об'єктивній дійсності і т. д.

Класифікації завжди відносні. Так, у детермінованій системі можна знайти елементи стохастичності і детерміновану систему вважати окремим випадком стохастичної (за ймовірності, яка дорівнює одиниці). Аналогічно, якщо взяти до уваги діалектику суб'єктивного й об'єктивного в системі, то стане зрозумілою відносність поділу систем на об'єктивно існуючі й абстрактні: це можуть бути стадії розвитку однієї й тієї ж системи. Справді, природні та штучні об'єкти, відображаючись у свідомості людини, виступають у вигляді абстракцій, понять, а абстрактні проекти проектованої системи втілюються в реально існуючій системі, яку можна відчутти, вивчити, а при її вивченні знову відобразити у вигляді абстрактної.

Проте відносність і складність класифікації не зупиняє дослідників, тому що при розв'язанні практичних задач зручно отримати поділ системи на класи і з цими класами порівняти відповідні прийоми та методи системного аналізу та формалізованого подання систем. При цьому система може бути одночас охарактеризована кількома ознаками, тобто їй може бути знайдене місце одночасно в кількох класифікаціях, кожна з яких може виявитися корисною при виборі методів досліджень. Тому розглянемо деякі існуючі класифікації систем докладніше.

Класифікації систем за субстанційною ознакою. Досить часто системи класифікують за субстанційною ознакою, за якою можна виділити три класу систем [В. Г. Афанасьев. О целостных системах / Вопросы философии. – 1980. – № 6. – С. 62–78]: природні, концептуальні, або ідеальні, та штучні системи (рис. 1.14).



Рис. 1.14. Класифікації систем за субстанційною ознакою

Природні системи – це системи, що існують в об’єктивній дійсності (неживій і живій природі, суспільстві). Атом, молекула, жива клітина, організм, популяція, суспільство – приклади такого типу систем.

Концептуальні, або ідеальні системи – це системи, що відображають реальну дійсність, об’єктивний світ. Звичайне сприйняття, сукупність тих чи інших уявлень, що виражені, наприклад, у музичному або літературному творі, наукові теорії – все це приклади ідеальних систем, що з певним ступенем повноти і точності відображають об’єктивно існуючу дійсність.

Штучні системи – це системи, створені людиною. Діапазон цих систем дуже широкий: від найпростішого механізму до найскладніших виробничих комплексів; від окремої бригади, кафедри, лабораторії, військового підрозділу до міністерства. Перші складають підклас технічних систем, а другі – організаційних.

Класифікації систем за їхнім походженням. Дуже часто системи класифікують за походженням. Необхідно зауважити, що така класифікація дещо схожа на класифікацію систем за субстанційною ознакою, проте між ними існують певні розбіжності. Приклад такої класифікації подано на рис. 1.15.

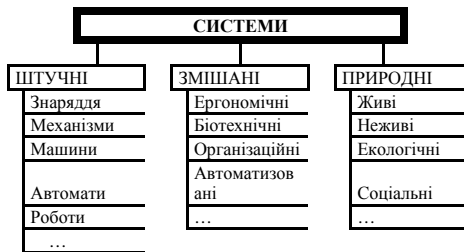


Рис. 1.15. Класифікація систем за їхнім походженням

За цією ознакою також можна виділити три класи систем: *природні, штучні та змішані системи*.

В якості прикладів підкласів змішаних систем можна навести *ергономічні системи* (комплекси «машина – людина-оператор»), *біотехнічні* (системи, до яких входять живі організми і технічні пристрої) та ін.

Неповнота такої класифікації очевидна. Наприклад, остаточно не вирішене питання про те, куди слід віднести віруси: до живих чи неживих систем; ідея про ноосферу Вернадського виходить далеко за рамки екологічних і соціальних систем.

Відкриті та закриті системи. Поняття «відкритої системи» запропонував Людвіг фон Берталанфі. Цей розподіл суто теоретичний, тому що абсолютно «закритих систем» – систем, що не взаємодіють з ото-

ченням, – практично не існує. Поняття «закритої системи» має тільки методологічне значення.

Основна відмінна риса *відкритих* систем – здатність обмінюватися із середовищем масою, енергією та інформацією, тобто ці системи мають зв'язки із зовнішнім середовищем у вигляді входів і виходів. На відміну від них, *закриті*, або *замкнуті* системи передбачаються (зрозуміло, з точністю до прийнятої чутливості) цілком позбавленими цієї змоги, тобто ізольованими від середовища.

Відомо, наприклад, що в акваріумі можна створити гідробіологічну систему, в якій життєві процеси будуть відбуватися навіть під герметично закритою кришкою. Такий запаяний акваріум був подарований прем'єр-міністром Норвегії Гру Харлем Брундтланд Міжнародному симпозіумові з охорони навколишнього середовища, який відбувався в 1986 р. у Москві. Проте навіть така система не може вважатися цілком закритою, тому що життя в акваріумі буде неможливим без сонячного світла і тепла. Так само і зерно пшениці, знайдене в гробниці фараона, теж не може вважатися системою, проте це ж зерно, у контакті з водою і під впливом тепла, почне проявляти себе як система, тому що в ньому з'явиться життя.

При цій класифікації можливі окремі випадки: наприклад, у системах не враховуються гравітаційні та енергетичні процеси, а береться до уваги тільки обмін інформацією. В цьому разі кажуть про *інформаційно-проникні* або, відповідно, *інформаційно-непроникні системи*.

Одна з найбільш важливих особливостей відкритих систем полягає в наступному: в цих системах «виявляються термодинамічні закономірності, що здаються парадоксальними і суперечать другому принципу термодинаміки». Нагадаємо, що другий закон термодинаміки («другий принцип»), сформульований для закритих систем, характеризує систему прагненням до неупорядкованості, руйнації (ростом ентропії). Проявляється цей закон і у відкритих системах: наприклад, старіння біологічних систем. Проте, на відміну від закритих, відкриті системи «можуть зберігати свій високий рівень і навіть розвиватися в бік збільшення порядку складності». Саме тому важливо для системи керування підтримувати достатній обмін інформацією із середовищем.

Цілеспрямовані системи. При вивченні систем не завжди необхідно вводити ціль. Тому в теорії систем виділяють клас цілеспрямованих систем. У цьому класі, у свою чергу, можна виділити системи, в яких цілі задаються зовні (зазвичай це має місце в закритих системах), і системи, в яких цілі формуються всередині (що характерно для відкритих систем). Закономірності цілеутворення в таких системах розглядалися в попередніх розділах.

Класифікації систем за ступенем складності. Важливою класифікаційною ознакою систем є їхня складність. На жаль, через відсут-

ність надійних методів оцінювання складності зупиняються лише на таких визначеннях, як «проста», «складна», «дуже складна система».

Звичайно ці поняття використовують суто індивідуально і демонструють на конкретних прикладах. Як правило, простими вважаються системи з малою кількістю елементів і зв'язків між ними, а складними – відповідно, з великою кількістю елементів і зв'язків.

Існує декілька підходів до поділу систем за складністю. Так, Боулдінг класифікує системи за *рівнями складності*, Г. В. Поваров за основу класифікації бере той же принцип, але виділяє при цьому інші класи. В цих класифікаціях, як правило, кожен наступний клас містить у собі попередній, характеризується великим проявом властивостей відкритості та стохастичності поведінки, більш яскраво вираженими закономірностями ієрархічності та історичності (хоча це відзначається не завжди), у тієї чи іншій формі показується розбіжність «механізмів», які забезпечують прояв цих властивостей і закономірностей у систем різних класів.

Відомим німецьким ученим у галузі теорії технічних систем В. Хубкою пропонується, наприклад, така класифікація систем за ступенем складності:

- *прості системи* (болтове з'єднання, родинна бібліотека);
- *складні системи* (легковий автомобіль, бібліотека університету);
- *дуже складні системи* (повністю автоматизоване підприємство, виробничий комплекс);
- *гранично складні системи* (мозок, народне господарство).

Класифікації систем за засобом керування. У деяких випадках системи класифікують за засобом керування. Приклад такої класифікації подано на рис. 1.16.

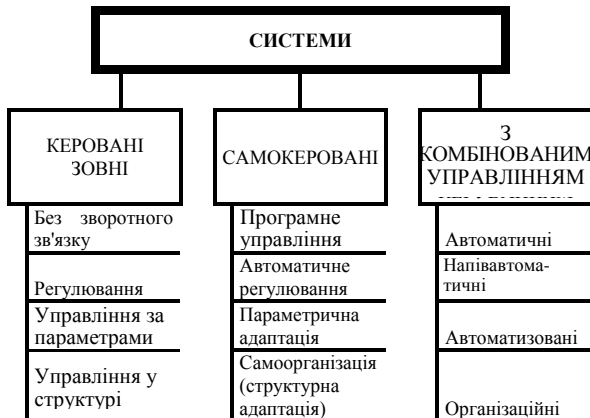


Рис. 1.16. Класифікації систем за засобом керування

Класифікації систем за описом змінних. Іноді системи класифікують за описом змінних. Приклад такої класифікації подано на рис. 1.17.



Рис. 1.17. Класифікації систем за описом змінних

Третій рівень цієї класифікації систем (детерміновані, стохастичні, розмиті, змішані) однаковий для всіх класів другого рівня і зображений тільки для одного з них.

Оцінюючи розглянуті класифікації з погляду рекомендацій щодо вибору найкращих підходів до відображення системи, «мови» опису процесів у ній, можна відзначити, що такі рекомендації (іноді аж до вибору математичного методу) даються тільки для класів систем низької складності, до певного рівня складності, а щодо більш складних систем вказується, що давати рекомендації важко. Тому нижче докладніше розглянемо класифікацію, в якій здійснюється спроба пов'язати вибір методу формалізованого подання систем з усіма класами систем. Основою класифікації в ній є ступінь організованості.

Класифікації систем за ступенем організованості. Вперше поділ систем за ступенем організованості, за аналогією з класифікацією проблем Саймона і Ньюелла (добре структуровані, погано структуровані і неструктуровані проблеми), було запропоновано В. В. Налімовим, який виділив клас добре організованих систем і клас погано організованих (або дифузійних) систем. Якщо додати до цих двох класів ще й клас систем, що самоорганізуються, об'єднавши цією назвою (для єдності основи класифікації – за ступенем організованості) розглянуті раніше в літературі окремо класи саморегулюючих систем, систем, що самонавчаються, самонастроюються і т. ін., то утвориться класифікація, класи якої можна досить чітко розмежувати за допомогою харак-

терних для кожного класу ознак, що дозволяють поставити у відповідність різним класам методи формалізованого подання систем і засоби подання цілей у них (рис. 1.18). Виділені класи можна охарактеризувати як підходи до відображення об'єкта або задачі, яка розв'язується, що можуть вибиратися залежно від стадії пізнання об'єкта і можливості отримання інформації про нього.



Рис. 1.18. Класифікації систем за ступенем організованості

1. Подати аналізований об'єкт або процес прийняття рішення у вигляді *добре організованої* системи означає визначити її елементи та їхні взаємозв'язки між собою і з цілями системи. У цьому випадку задачі вибору цілей і вибору засобів їх досягнення (елементів, зв'язків) не розділяються. Проблемна ситуація може бути описана у вигляді виразу, який пов'яже ціль із засобами, тобто у вигляді критерію або показника ефективності, критерію функціонування, цільової функції та ін., представлених складним рівнянням або системою рівнянь. Часто при цьому кажуть, що ціль подається у вигляді критерію ефективності або критерію функціонування і т. ін., хоча насправді в таких виразах об'єднані і ціль і засоби (елементи, компоненти).

Більшість моделей фізики і технічних наук засновані на поданні об'єктів і процесів класом добре організованих систем. Наприклад, роботу складного механізму представляють як спрощену схему або систему рівнянь, що враховує не всі, а найбільш істотні, з погляду автора моделі, елементи і зв'язки між ними. Атом описують у вигляді планетарної системи, яка складається з ядра й електронів. Неважко помітити, що для подання об'єкта у вигляді добре організованої системи доводиться виділяти суттєві і не враховувати відносно несуттєві для даної цілі розгляду компоненти, а за необхідності більш детального опису необхідно уточнити ціль, указавши, який ступінь глибини досліджуваного об'єкта нас цікавить. Наприклад, при описі атома можна врахувати протони, нейтрони, мезони й інші мікрочастинки, що не були розглянуті в планетарній моделі.

Подання об'єкта у вигляді добре організованої системи застосовується в тих випадках, коли можна запропонувати детермінований опис і експериментально показати правомірність його застосування,

адекватність моделі реальному об'єкту чи процесу. Спроби застосувати клас добре організованих систем для подання складних багатокомпонентних об'єктів або багатокритерійних задач, які доводиться розв'язувати при вдосконалюванні управління і розробці автоматизованих систем керування, погано вдаються: вони не тільки потребують неприпустимо великих витрат часу, але часто не можуть бути реалізованими практично, оскільки не можна поставити експеримент, який доводить правомірність застосування запропонованих аналітичних залежностей. Тому при дослідженні складних організаційних об'єктів на початковому етапі їх здебільшого відображають класами систем, які будуть розглянуті нижче.

2. При поданні об'єкта у вигляді *погано організованої*, або *дифузійної*, системи не ставиться задача визначити всі компоненти, їхні властивості та зв'язки між ними і цілями системи. У цьому випадку система характеризується певним набором макропараметрів і закономірностями, які проявляються шляхом дослідження не всього об'єкта чи класу явищ, а вивченням визначеної за допомогою певних правил вибірки компонентів, що характеризує досліджуваний об'єкт або процес. На основі такого вибіркового дослідження отримують характеристики або закономірності (статистичні, економічні) і поширюють їх на всю систему в цілому. При цьому застосовуються відповідні обмеження. Наприклад, при отриманні статистичних закономірностей їх поширюють на поведінку всієї системи з певною ймовірністю, яка оцінюється за допомогою спеціальних прийомів, досліджуваних математичною статистикою.

Як приклад застосування поняття дифузійної системи зазвичай наводять опис поведінки газу. При використанні газу для прикладних цілей його властивості не виводять із точного опису поведінки кожної його молекули, а характеризують газ макропараметрами – тиском, відносною проникністю, постійною Больцмана і т. ін. Базуючись на цих параметрах, розробляють прилади та пристрої, які використовують властивості газу.

Відображення об'єктів у вигляді дифузійних систем знаходить широке застосування при визначенні пропускної спроможності систем керування, при визначенні чисельності штатів в обслуговуючих цехах підприємств і в обслуговуючих установах (для розв'язання таких задач застосовують методи теорії масового обслуговування), при дослідженні документальних потоків інформації і т. д.

3. Відображення об'єктів у вигляді систем, що самоорганізуються, дозволяє досліджувати найменш вивчені об'єкти і процеси. Клас систем, що *самоорганізуються*, або *розвиваються*, характеризується низкою ознак, які наближають їх до реальних об'єктів, що розвиваються. Вони мають ознаки, характерні для дифузійних систем: стохас-

тичність поведінки, нестационарність окремих параметрів.

До цього додаються ще й такі ознаки:

- непередбачуваність поведінки;
- ієрархічність і пов'язана з нею неоднозначність використання понять «ціль» і «засоби»;
- спроможність адаптуватися до умов середовища, які змінюються;
- здатність змінювати структуру, зберігаючи при цьому властивості цілісності;
- здатність формувати можливі варіанти поведінки і вибирати з них найкращий та ін.

Іноді цей клас розбивають на підкласи, виділяючи адаптивні системи або системи, *що самоприспосовуються, що самонавчаються, що самовідновлюються, що самовідтворюються*, та інші класи, які відповідають різноманітним властивостям системи, що розвивається.

Таким класом систем зручно відображати біологічні організації, колективну поведінку людей, організацію управління на рівнях галузі, підприємства, держави в цілому.

Основну конструктивну ідею, завдяки якій стає можливим реалізувати відображення об'єкта класом систем, що самоорганізуються, можна сформулювати так: розробляється знакова система, за допомогою якої фіксують відомі на даний момент компоненти і зв'язки, а потім, перетворюючи їх за допомогою встановлених (прийнятих) правил (правил структуризації, правил композиції), отримують нові, невідомі раніше взаємовідносини, залежності, які можуть стати основою прийнятих рішень або підказати наступні кроки на шляху підготовки рішення. У такий спосіб можна накопичувати інформацію про об'єкт, фіксуючи при цьому всі нові компоненти і зв'язки (правила взаємодії компонентів), і, застосовуючи їх, одержувати відображення послідовних станів системи, що розвивається, поступово створюючи все більш адекватну модель реального досліджуваного або створюваного об'єкта. При цьому інформація може надходити від спеціалістів різних галузей знань і накопичуватися в часі.

Такий «механізм» розвитку може ніби «вимикатись» у періоди відносної стабільності умов роботи системи і «вмикатися» у періоди змін, що відбуваються в середовищі та всередині системи. Практична реалізація «механізму» пов'язана з необхідністю розробки мови проектування (автоматизації проектування) або розвитку системи, мови моделювання процесу прийняття рішення.

Структури систем. Вивчення процесів функціонування концентрує увагу дослідника на тих властивостях, особливостях поведінки і характеристиках системи, які змінюються в часі. При аналізі структур, навпаки, цікавляться властивостями і характеристиками системи, які

не залежать від часу і є постійними, незмінними на всьому часовому інтервалі її функціонування чи досить тривалого його відрізка. Однак структурні та функціональні властивості щільно пов'язані між собою. Навіть добре вивчивши закони функціонування окремих елементів, але не знаючи структури, не можна представити систему як ціле і, отже, зрозуміти, як вона функціонує. З іншого погляду, не знаючи бодай загальних законів функціонування системи, не можливо визначити її структуру. Це означає, що аналіз функціонування і вивчення структури є двома взаємозалежними процесами, які доповнюють один одного стадіями дослідження будь-якої системи.

Формування структури є частиною розв'язання загальної задачі побудови системи, причому такою, яка не визначає заздалегідь систему в цілому, а лише виявляє її конфігурацію.

Структура є найбільш консервативною характеристикою системи: хоча стан системи змінюється, її структура зберігається незмінною іноді впродовж дуже тривалого часу.

Хоча зміст поняття структури видається інтуїтивно прозорим, дати йому задовільне визначення все ж нелегко. Мабуть, тому в літературі зустрічається велика кількість різних визначень структури.

Як уже було сказано вище, у перекладі з латинської «структура» (*structur*) означає «будівлю», «розташування», «порядок».

Наведемо деякі з найпоширеніших визначень поняття «структура»:

- структура – це форма представлення певного об'єкта у вигляді складових частин;
- структура – це множина всіх можливих відносин між підсистемами та елементами всередині системи;
- структура – це сукупність і взаємодія її окремих підсистем;
- структура системи – це стійка упорядкованість у просторі та часі її елементів і зв'язків;
- структура – це сукупність елементів і зв'язків між ними, що визначаються, виходячи з розподілу функцій і цілей, поставлених перед системою;
- структура системи – це те, що залишається незмінним у системі при зміні її стану, при реалізації різних форм поведінки, при здійсненні системою операцій.

У сукупності всі наведені визначення досить добре відображають те головне, що є присутнім у будь-якій структурі: елементний склад, наявність зв'язків, інваріантність (незмінність) у часі. За своєю суттю лише остання властивість дозволяє розмежувати поняття системи і структури. Однак врахувати тільки інваріантність структури ще недостатньо. Оскільки структура – це частина системи, необхідно чітко вказати, яка саме частина, які властивості та ознаки системи є структурними, а які – ні. Відповіді на ці питання, звичайно, залежать від

цілей дослідження системи, що також необхідно враховувати.

З визначення структури випливає те, що вона може містити як загальносистемні властивості (наявність елементів, існування зв'язків між ними і т. д.), так і спеціальні, притаманні тільки даній конкретній системі властивості, які пов'язані з особливостями її функціонування (специфіка відносин між елементами, закономірності розподілу інформації, матеріальних та інших потоків і т. ін.). Визначення не вимагає безумовної інваріантності перерахованих властивостей на всьому інтервалі функціонування, що припускає існування також систем зі змінною структурою. Залежно від цілей вивчення дослідника будуть цікавити різні властивості системи, які є інваріантними у часовому просторі. З визначення також випливає, що для однієї й тієї ж системи можна побудувати різні структури і що між системою та її структурою відсутня однозначна відповідність.

Як було сказано в одному з наведених вище визначень, структурою називається множина всіх можливих відношень між підсистемами та елементами всередині системи. Якщо ця множина M кінцева і визначена, то вважається, що задано абсолютну структуру системи. Якщо визначена така підмножина M^* цієї множини M , об'єднання елементів якої дорівнює всій множині $\bigcup M^* i = M$, $M^* i \subset M^*$ (вибір M^* зроблено за певною ознакою), то структуру задано на певному рівні. Формування структури припускає декомпозицію системи, розчленування її на підсистеми. Членування можна робити за різними ознаками. Заміна однієї чи декількох підсистем (елементів) структури іншими підсистемами (елементами) не змінює відношень між заміненими підсистемами (елементами) та іншими підсистемами (елементами) системи. Отже, основним фактором формування структури є задавання структурних відношень. Якщо структурні відношення і склад підсистем (елементів) задані, систему можна побудувати за допомогою композиції (об'єднання). Для здійснення композиції необхідно, щоб рівень і подробиці опису відношень і підсистем (елементів) були взаємно відповідними. Аналогічно, для декомпозиції необхідно, щоб спосіб членування і спосіб визначення відношень також були взаємно відповідними.

Утворення структури вимагає визначеності відношень між підсистемами. У множині підсистем можна виділити дві підмножини підсистем: зовнішні, які взаємодіють із середовищем та іншими підсистемами, і внутрішні, взаємодіючі тільки з іншими підсистемами системи. Всі види взаємодії здійснюються за допомогою речовини, енергії та інформації, причому для опису кожної з підсистем достатньо кінцевого набору параметрів.

Існує кілька класифікаційних ознак структур. Так за тимчасовою ознакою виділяються *екстенсивні* структури, в яких з часом відбу-

вається зростання кількості елементів, та *інтенсивні*, де зростання кількості зв'язків та їхньої потужності відбувається при незмінному складі елементів.

У деяких випадках за цією ж ознакою виділяють три типи структур: *такі, що редукують, деградуєть і стабільні* структури. В останніх структура не змінюється протягом усього періоду «життя» системи.

Залежно від просторової організації розрізняють *плоскі* та *об'ємні* структури. За цією ж ознакою іноді розрізняють наступні структури:

- *роззосереджені* – за рівномірного розподілу елементів структури в просторі;
- *локально зосереджені* – за наявності згущень елементів структури;
- *зосереджені* – за наявності одного згущення елементів структури.

Залежно від характеру організації в системі елементів та їхніх зв'язків виділяють три основні типи структур: *ієрархічні, неієрархічні* (рис. 1.19) і *змішані*.

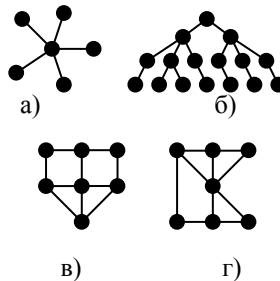


Рис. 1.19. Класифікація структур залежно від організації в системі:

а), б) – ієрархічні; в), г) – неієрархічні

Для ієрархічних структур характерна наявність керуючих (командних) підсистем. У неієрархічних структурах керуючі функції розподілено між усіма елементами чи групами елементів. Як правило, наявність ієрархії є ознакою високого рівня організації, хоча можуть існувати й неієрархічні високоорганізовані структури. У функціональному плані ієрархічні структури є компактнішими. Надмірність структури свідчить про недоцільну витрату ресурсів, марнотратність, що може бути виправдано тільки в тому випадку, якщо метою є подальший розвиток системи, її морфологічна перспектива. З іншого боку, надмірність структури забезпечує її надійність. Характерно, наприклад, що руйнування 90 % нервових зв'язків головного мозку суб'єктивно не відчувається і не впливає на поведінку суб'єкта.

Ієрархічною називається структура, що задовольняє наступним умовам:

- 1) кожна підсистема є або керуючою, або підлеглою, або (стосовно різних підсистем) те й інше одночасно;

- 2) існує щонайменше одна підлегла підсистема;
- 3) існує одна і тільки одна керуюча підсистема;
- 4) будь-яка підлегла підсистема безпосередньо взаємодіє з однією і тільки однією керуючою (зворотне не обов'язково).

Звичайно вважається, що керуюча підсистема має дві чи більше підлеглі. Ієрархічну структуру, в якій є бодай одна керуюча й одночасно підлегла підсистема, називають *багаторівневою*. Для багаторівневих ієрархічних структур справедливі наступні положення:

- 1) підсистема більш високого рівня має справу з більш широкими аспектами поведінки системи в цілому;
- 2) час перетворення вхідних компонентів метаболізму у вихідні збільшується з підвищенням рівня керуючої підсистеми;
- 3) підсистеми вищих рівнів ієрархічної структури мають справу з біповільнішими аспектами поведінки систем;
- 4) з підвищенням рівня підсистем зростає питома вага інформаційного компоненту метаболізму та його роль у функціональній діяльності системи.

Неієрархічні структури є похідними від багатозв'язної структури, в якій кожна підсистема безпосередньо взаємодіє з будь-якою іншою. Неієрархічними називаються структури, які задовольняють наступні умови:

- 1) існує принаймні одна підсистема, яка не є ні керуючою, ні підлеглою;
- 2) не існує підсистеми, яка є тільки керуючою;
- 3) не існує підсистеми, яка є тільки підлеглою;
- 4) будь-яка підлегла підсистема безпосередньо взаємодіє більш ніж з однією керуючою (зворотне не обов'язково).

Важлива особливість неієрархічної структури полягає в тому, що вона не має підсистем, які приймають незалежні від інших підсистем рішення. Крім того, неієрархічна структура, як правило, має такі властивості:

- 1) будь-яка підсистема може впливати на всі аспекти поведінки системи;
- 2) час перетворення вхідних компонентів метаболізму у вихідні мало залежить від положення підсистеми в структурі;
- 3) функції підсистем більш конформні та легше змінюються в процесі взаємодії.

Розгляд ступеня впливу підсистем на інші підсистеми в неієрархічній структурі приводить до важливого поняття лідерства. *Лідируючою* називається підсистема, яка задовольняє такі вимоги:

- 1) підсистема не має детермінованої взаємодії з жодною підсистемою;
- 2) підсистема є керуючою (при безпосередній чи посередній взаємодії) стосовно частини (найбільшої кількості) підсистем;
- 3) підсистема або не є керованою (підлеглою), або керується най-

меншою (порівняно з іншими підсистемами) кількістю підсистем.

Лідруючих підсистем може бути більше однієї, за наявності декількох лідруючих підсистемах можлива головна лідруюча підсистема. Неважко переконатися, що підсистема вищого рівня ієрархічної структури одночасно повинна бути головною лідруючою, якщо ж ні, то передбачена ієрархічна структура або нестійка, або не відповідає реальній структурі системи.

Змішані структури являють собою різні комбінації ієрархічних і неієрархічних структур. Стабільність структури характеризується терміном її зміни. Структура може змінюватися без перетворення класу або шляхом перетворення одного класу в інший. Зокрема, поява лідера в неієрархічній структурі може спричинити перетворення її в ієрархічну, а в ієрархічній – встановлення обмежуючого, а згодом детермінованого зв'язку між лідруючою підсистемою і підсистемою вищого рівня, внаслідок чого остання замінюється лідруючою або поєднується з нею, або ж ієрархічна структура перетвориться на неієрархічну (змішану).

Рівноважними називаються неієрархічні структури без лідерів. Найчастіше рівноважними бувають багатозв'язні структури. Рівноважність не означає покомпонентної ідентичності метаболізму. Йдеться тільки про ступінь впливу на прийняття рішень.

Іноді в літературних джерелах можна зустріти такі типи структур: *лінійні, централізовані, деревоподібні, матричні, кістякові, стільникові, мережеві* (рис. 1.20). Ці типи є окремими випадками структур, визначених вище. Зазвичай в організаційних системах часто зустрічаються лінійні, деревоподібні та матричні структури, у технічних системах – мережеві структури.

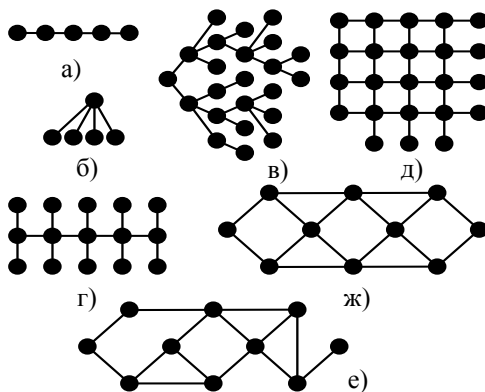


Рис. 1.20. Типи структур:

a) – лінійна; б) – централізована; в) – деревоподібна; г) – кістякова;
д) – матрична; е) – стільникова; ж) – мережева

Узагалі ж структури можуть бути найрізноманітнішими і включати в себе різні комбінації взаємозв'язків елементів.

Поняття структури включає також *конфігурацію*, що визначає загальні геометричні властивості системи. Позначимо через Δ глибину зони взаємодії системи із середовищем. Структурно зв'язаними будемо називати елементи (підсистеми), відстань d між поверхнями яких $d \leq \Delta$. У протилежному випадку елементи (підсистеми) структурно не зв'язані.

2.5. Синергетичний підхід в аналізі складних систем

Напевно, ми не раз замислювалися над різницею відмінністю систем, що існують у природі, від тих, які створено людиною. Для перших властиві стійкість щодо зовнішніх впливів, самооновлення, здатність до самоускладнення, розвитку, погодженість усіх складових частин. Для других – різке погіршення функціонування навіть при порівняно невеликій зміні зовнішніх впливів або помилках в управлінні. Назріває висновок: потрібно запозичити досвід побудови організації, накопичений природою, і використовувати його в нашій діяльності. З'ясування законів такої побудови, виникнення упорядкованості є одним із завдань синергетики – науки про відкриті системи, які самоорганізуються.

При розв'язанні самих різних задач, від фізики і хімії до економіки й екології, створення та збереження організації, формування упорядкованості є або метою діяльності, або її важливим етапом.

Питання про оптимальну упорядкованість і організацію постає особливо гостро при дослідженнях глобальних проблем – енергетичних, екологічних, багатьох інших, які потребують залучення величезних ресурсів. Маючи справу зі складними, життєво важливими для нас об'єктами, доводиться діяти дуже обережно. Тут немає можливості шукати відповідь методом проб і помилок, а нав'язати системі необхідну поведінку дуже важко. Успіх можливий тільки в тому випадку, якщо ми знаємо внутрішні властивості системи. Значно розумніше діяти, спираючись на знання цих внутрішніх властивостей та законів розвитку системи. Звідси стратегія – дія, що відповідає законам природи, розумна відповідність із природним ритмом, з постійно мінливими умовами.

Інша причина, яка обумовлює створення синергетики, – необхідність при розв'язанні низки задач науки і техніки аналізувати складні процеси різної природи, застосовуючи при цьому нові математичні методи.

Широке використання ЕОМ показало, що ні швидкодія обчислювальних машин, ні зростання обсягу розрахунків не є панацеєю від

усіх лих, – самі по собі вони не дають розуміння досліджуваних нелінійних задач. Потрібні поняття, підходи, узагальнення, які відображають найважливіші загальні риси нелінійних явищ і допомагають побудувати їхні адекватні математичні моделі. Розуміння цього також стало могутнім стимулом розвитку синергетики.

Інтенсивний розвиток системних досліджень і кібернетики останніх десятиліть привів до зміни в стилі наукового мислення. Новий, системний стиль мислення доповнює ймовірнісне бачення світу такими поняттями, як складність, системність, цілеспрямованість.

Класичний, панівний донині підхід до управління складноорганізованими системами ґрунтується на лінійному уявленні про їхнє функціонування. Згідно з цим уявленням, результат зовнішнього керуючого впливу є однозначним і передбачуваним наслідком прикладених зусиль, що відповідає схемі: керуючий вплив – бажаний результат. Чим більше вкладаєш енергії, тим більшою начебто є й віддача. Такий підхід суперечить екологічним вимогам універсуму і людини. Багато зусиль виявляються марними або навіть завдають шкоду, якщо вони протистоять власним тенденціям саморозвитку складноорганізованих систем.

Вченим усе частіше доводиться мати справу з явищами, де більш інтенсивні зовнішні впливи спричиняють якісно нову поведінку системи. І сучасна наука щодалі частіше формулює свої закони, звертаючись до різноманітного світу нелінійних математичних моделей.

Синергетика вивчає відкриті, нелінійні системи, спрямовані на встановлення універсальних механізмів самоорганізації; вона заснована на ідеях системності, цілісності світу і науковому знанні про нього, спільності закономірностей розвитку об'єктів усіх рівнів матеріальної та духовної організації, нелінійності, багатоваріантності, необоротності і т. ін.

Синергетика дає новий образ світу. Цей світ складно організований. Він відкритий, тобто він не сталий, а такий, який становлюється, він не просто існує, він є безупинно виникаючим світом. Він еволюціонує за нелінійними законами.

Синергетика використовує математичний апарат нерівноважної термодинаміки, але застосовує його для аналізу розвитку систем дуже різної природи.

Статус синергетики певною мірою аналогічний статусу математики, логіки або інформатики. Це науковий напрямок про універсальні структури самоорганізації і паттерни (зразки, моделі) поведінки. А для широкого кола вчених, які досить далекі від природознавства, синергетика може бути цінною передусім як спосіб мислення.

Синергетику можна розглядати як сучасний етап розвитку ідей кібернетики і системних досліджень. Існує логіко-понятійна і методо-

логічна наступність між цими галузями знань, однак синергетика несе в собі щось істотно нове.

На відміну від кібернетики, тут акцент ставиться не на процесах управління та обміну інформацією, а на принципах побудови організації, її виникненні, розвитку та самоускладненні. Розглядаючи кібернетику як предтечу синергетики, Ю. А. Данилов і Б. Б. Кадомцев розкривають і якісні розходження між цими науковими напрямками. Основне з них полягає в тому, що «кібернетичний підхід абстрагується від конкретних матеріальних форм», тоді як синергетика займається дослідженням «фізичних основ формування структур». Йдеться про те, що кібернетика більшою мірою має абстрактно-математичний і формалізований характер, ніж синергетика.

Основними для кібернетики і загальних теорій систем є поняття «інформації» та «інформаційного підходу», а в центрі уваги синергетики – уявлення про організацію, самоорганізацію та їхні механізми.

Кібернетика і різні варіанти загальної теорії систем вивчають в основному процеси гомеостазу, тобто процеси підтримки рівноваги в системах за допомогою зворотного зв'язку. Кібернетика намагається звести складні нелінійні процеси еволюції систем до лінійного (принаймні, на окремих етапах, там, де це можливо). Вона розглядає ті випадки, коли, за висловом Н. Вінера, «нелінійна система може досліджуватися так, ніби це є лінійна система з параметрами, що повільно змінюються».

У синергетиці досліджуються істотно нерівноважні системи, тобто системи, які далекі від станів рівноваги, істотно нелінійні процеси еволюції систем, такі процеси, коли за певних умов внутрішні або зовнішні збурення можуть привести систему до спрямованих змін, до виникнення різних нових структур, відносно стійких до стану рівноваги. Процеси гомеостатичного характеру охоплюються синергетикою як один з окремих випадків у сфері її дослідження.

Основними елементами синергетичного бачення світу є також нові принципи формування цілого з частин, побудова різного типу складних структур із простих.

У нелінійному світі порушується звичайний принцип суперпозиції: ціле вже дорівнює сумі складових його частин. Воно не більше і не менше частин, з яких складається. Воно якісно інше порівняно з частинами, які увійшли до його складу. І, крім того, ціле, яке виникає, видозмінює частини.

Синергетика має справу з процесами еволюційного характеру. У складній структурі об'єднано структури різні за віком та стадіями розвитку. З'ясовуються принципи об'єднання таких різновікових структур у більш складну.

Синергетичне світобачення дозволяє по-новому підійти до проблеми ефективного управління розвитком складних систем (когнітивних, соціоприродних, екологічних, географічних, економічних і т. ін.).

З погляду синергетики, неефективне управління такою системою полягає в нав'язуванні системі якоїсь форми організації, їй не властивої. Таке управління в кращому разі робить усі людські зусилля марними, «зникаючими у піску», а в гіршому – заподіює дійсну шкоду, призводить до небажаних і важковиправних кризових станів. Схожий «ефект бумеранга» отримує людина, якщо не бере до уваги неоднозначні, нелінійні зворотні впливи на неї складноорганізованих ієрархічних систем.

Знання принципів самоорганізації складних систем дає нові можливості. Хоча шляхів розвитку може бути дуже багато, але їхня кількість не нескінченна. Отже, в даній нелінійній системі реалізовані далеко не всі ті напрямки розвитку, що є бажаними для суб'єктів управління. Знання обмежень, того, що в принципі не можна здійснити в даному середовищі, знання еволюційних принципів заборони – це саме по собі дуже цінне для людини знання. Воно дозволяє їй раціонально використовувати матеріальні ресурси, час і свої власні зусилля.

Людина може розраховувати оптимальні для себе і, що є не менш важливо, здійсненні сценарії розгортання подій. Знаючи спектр досяжних станів розвитку, вона може описати, яким чином має будуватися ця майбутня бажана для неї організація елементів світу, вона знаходить можливість правильно ініціювати бажані напрямки самоорганізації систем, не чекаючи на здійснення тривалого процесу їхнього власного виходу на потрібні стани.

Суть нового підходу до управління полягає в тому, що він орієнтований не на зовнішнє, а на внутрішнє, на щось властиве саме середовищу. Іншими словами, він орієнтований не на бажання і проекти суб'єкта управляючої діяльності, а на власні закони еволюції та самоорганізації складної системи.

При цьому головне – не сила (величина, інтенсивність, тривалість, всеохоплення і т. ін.) керуючого впливу, а його погодженість із власними тенденціями самоструктурування нелінійного середовища, тобто правильна топологія (просторова і часова погодженість) цього впливу. Наприклад, для природних систем важлива не величина впливу, а належна форма просторового розподілу енергії, тобто «архітектура» енергетичного впливу. Слабкий, але топологічно правильно організований резонансний вплив може виявитися дуже ефективним. Якщо ми будемо «колоти» середовище в потрібний час і в потрібному місці, конфігураційно узгоджено з її власними структурами, збудувати, тоді воно буде розгортати перед нами свої потенційні багаті форми, сховані (найчастіше неочікувано могутні) сили.

Термін «синергетика» походить від грецького слова «синергена» – сприяння, співпраця. Запропонований Германом Хакеном, цей термін акцентує увагу на погодженості взаємодії частин при утворенні структури як єдиного цілого.

Синергетика знаходиться на стику багатьох наук, наукових теорій і впливів, що є однією з причин існування безлічі шкіл і напрямків у самій синергетиці. Брюссельська школа лауреата Нобелівської премії І. Р. Пригожина розробила теорію дисипативних структур. Інтенсивно працює школа одного із засновників синергетики Г. Хакена, професора Інституту синергетики і теоретичної фізики в Штутгарті.

Класичні праці, в яких розвивається математичний апарат для опису катастрофічних синергетичних процесів, належать перу російського математика, академіка В. І. Арнольда і французького його колеги Р. Тома. Цю теорію називають по-різному: теорія катастроф, особливостей або бифуркацій.

У Росії діють школи академіка О. А. Самарського і члена-кореспондента РАН С. П. Курдюмова. Біофізик, член-кореспондент РАН М. В. Волькенштейн і Д. С. Чернавський розвивають синергетику в інформаційних термінах (генерація інформації в еволюційних процесах). Широко відомі роботи академіка М. М. Моїсеєва, Ю. А. Данилова, академіка Б. Б. Кадомцева, Ю. Л. Клімонтовича, члена-кореспондента РАН Г. Р. Іваніцького, С. В. Петухова і Ю. М. Романовського.

Висновки. Синергетика – теорія самоорганізації, напрямок міждисциплінарних наукових досліджень. Основні ідеї синергетичного підходу: принципова незамкнутість систем, нелінійність розвитку, самоорганізація систем.

Синергетичні поняття дозволяють пояснити раптове виникнення макроскопічних властивостей на основі взаємодії елементів на мікроскопічному рівні. Синергетика, маючи природничо-наукову основу, поставши з нерівновагої термодинаміки і нелінійного аналізу, здійснює експансію в різні галузі знань. Вона вивчає питання самоорганізації, і тому повинна давати картину розвитку і принципи самоорганізації складних систем, щоб застосовувати їх в управлінні. Уперше здійснюється спроба описати саморозвиток світу відповідно до його внутрішніх законів, спираючись на результати цілого комплексу точних наук. Це завдання має величезне значення, і успіхи у відповідних дослідженнях будуть означати просування вперед у розв'язанні глобальних проблем: проблеми керованого термоядерного синтезу, екологічних проблем, задач управління та ін.

РОЗДІЛ II

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ І АНАЛІЗУ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

ГЛАВА 3. РІВНЯННЯ І АНАЛІЗ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

3.1. Моделі і аналіз нелінійних динамічних систем

Системи нелінійних диференційних рівнянь є окремим випадком у великій «сім'ї» нелінійних динамічних систем, до якої також входять різні нелінійні алгебраїчні, різницеві, інтегральні, функціональні й абстрактні операторні рівняння.

У зв'язку з цим, до останнього часу цілком закономірним був єдиний геометричний підхід до вивчення нелінійних динамічних систем, що дозволяв розглядати із загальних позицій нелінійні системи, які описуються за допомогою дискретних відображень, а також звичайними диференційними рівняннями і рівняннями в частинних похідних. Згідно з геометричною точкою зору, *динамічною системою* називається однопараметрична безперервна або дискретна група (напівгрупа) $\varphi'(x)$ перетворень метричного фазового простору M у себе.

Безперервні групи також часто називають *потокami*, а дискретні – *відображеннями* або *каскадами*. Інтенсивне застосування геометричного підходу до аналізу динамічних систем почалося з відомої праці американського математика С. Смейла, який запропонував конструкцію відображення, що згодом отримало назву «*підкова Смейла*». Було показано, що стійкою граничною множиною (атрактором) дискретної динамічної системи може бути зовсім не гладке різноманіття цілої розмірності, яким є, наприклад, стійкий *граничний цикл*, або *тор*, а дірчаста самоподібна *фрактальна* множина дробової розмірності.

Крім того, було показано, що поведінка траєкторій динамічної системи на такому *дивному* (за термінологією Д. Рюеля і Ф. Такенса) *атракторі* є досить складною, сполучаючи в собі *глобальну стійкість* (траєкторія не виходить з певної області фазового простору) і *локальну нестійкість* окремих близьких траєкторій, які експоненційно розходяться з часом та характеризуються наявністю на аттракторі як від'ємного, так і невід'ємного показників Ляпунова.

Далі були знайдені й інші *хаотичні динамічні системи*, які описуються дискретними відображеннями і мають дивні аттрактори, такі,

наприклад, як логістичне відображення, відображення Хенона, соленоїд Смейла-Вільямса та ін.

Оскільки аналіз властивостей безперервних динамічних систем, які описуються диференційними рівняннями, може бути зведений до аналізу властивостей певного відображення – *відображення Пуанкаре*, то виявлену в безперервних динамічних системах нерегулярну, хаотичну поведінку траєкторій почали пов'язувати з наявністю в системі дивного атратора. Однак доказ цього факту безпосередньо для знаменитої системи трьох звичайних диференційних рівнянь Лоренца, в якій уперше було виявлено нерегулярну поведінку траєкторій, зіштовхнулося зі значними труднощами.

Численні спроби протягом тривалого часу обґрунтувати методами геометричної теорії динамічних систем наявність дивного атратора в околах петель сепаратрис сідла-вузла і сідла-фокуса в системі Лоренца закінчилися невдачею. Більш того, задача показати, чи збігається поведінка розв'язків системи Лоренца з динамікою геометричного атратора Лоренца, була сформульована С. Смейлом як одна з 18-ти найбільш значних математичних проблем ХХІ ст.

3.1.1. Системи звичайних диференційних рівнянь

У цьому пункті наведено стислий огляд основних понять і теорем загального характеру теорії звичайних диференційних рівнянь, необхідних для розуміння матеріалу, який викладається в посібнику. Більш докладний огляд представлених тут результатів можна знайти у працях, наведених у переліку використаної літератури.

3.1.1.1. Основні визначення і теореми

Поля напрямків та їхні інтегральні криві. Розглянемо матеріальний кінцевовимірний лінійний простір R^m . *Полем напрямків* в області M простору R^m називається відповідність кожній точці $x \in M$ прямої, яка проходить через x .

Визначення. Інтегральною кривою поля напрямків називається крива, яка у кожній своїй точці торкається напрямку поля в цій точці.

Векторні поля, диференційні рівняння, інтегральні та фазові криві. Векторним полем F , заданим в області M простору R^m , називається відповідність кожній точці $x \in M$ прикладеного до неї вектора F простору R^m .

Системою диференційних рівнянь, що відповідає векторному полю F , називається система

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in M \subset R^m, \quad (2.1)$$

де крапка над літерою означає диференціювання за t . Область M називається *фазовим простором* системи, а прямий добуток $I \subset M$ – *розширеним фазовим простором*, де I – інтервал матеріальної осі часу t .

Система (2.1) називається також *автономною системою* звичайних диференційних рівнянь. *Неавтономною* називається система, права частина якої залежить також і від t :

$$\dot{x} = F(x, t), \quad x \in M \subset R^m, \quad t \in I \subset R. \quad (2.2)$$

Сім'єю звичайних диференційних рівнянь називається множина систем рівнянь виду

$$\dot{x} = F(x, t, \mu), \quad x \in M \subset R^m, \quad \mu \in L \subset R^k, \quad t \in I \subset R, \quad (2.3)$$

заданих у фазовому просторі M векторними полями F , що залежать від координат векторів системних параметрів μ , які лежать в області L простору R^k .

Саме автономні сім'ї (2.3) звичайних диференційних рівнянь

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x \in M \subset R^m, \quad \mu \in L \subset R^k, \quad t \in I \subset R,$$

задаються сім'ями векторних полів $F(x, \mu)$, які викликають найбільший інтерес з погляду різних застосувань.

Визначення. Розв'язком системи диференційних рівнянь (2.2) називається диференційовне відображення $x : I \rightarrow M$ інтервалу I матеріальної осі t у фазовий простір, якщо для кожного $\tau \in I$ виконане співвідношення

$$\dot{x}(\tau) = F(x(\tau), \tau).$$

Визначення. Інтегральною кривою системи диференційних рівнянь називається графік її розв'язків, а *фазовою кривою* – проекція інтегральної кривої на фазовий простір уздовж осі t .

Приклади інтегральних і фазових кривих зображені на рис. 2.1. Фазові криві часто також називають *траєкторіями* розв'язків системи диференційних рівнянь.

Надалі нас будуть цікавити тільки необмежені тимчасові інтервали $I = [0, \infty)$ і $I = (-\infty, \infty)$. При цьому завжди будемо вважати, що початковий момент часу $t_0 = 0$.

Теорема існування й унікальності розв'язків. Диференційованим називається векторне поле з диференційованими компонентами. Полем класу C^r називається поле з компонентами, які мають безперервні похідні всіх порядків, що не перевершують r .

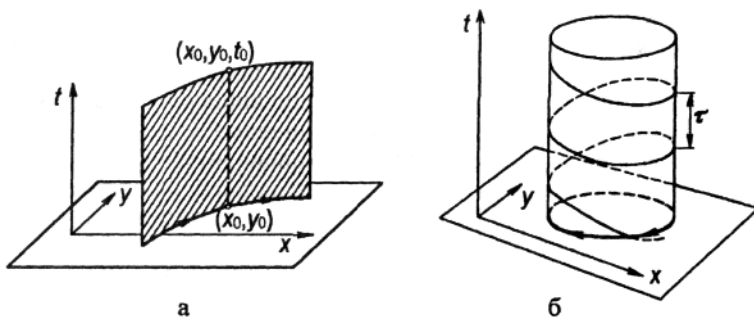


Рис. 2.1. Проекції відрізка інтегральної кривої та спіралі з кроком τ на фазову площину (x, y) у вигляді відрізка (а) і замкнутої кривої (б)

Теорема 1.1. Через кожну точку розширеного фазового простору диференційованого векторного поля проходить одна і тільки одна інтегральна крива відповідної системи диференційних рівнянь з матеріальним часом.

Умова гладкості правої частини в сформульованій теоремі може бути ослаблена.

Визначення. Відображення $f : M \rightarrow N$, $M \in R^m$, $N \in R^n$ задовольняє умову Ліпшица, якщо існує така невід’ємна константа q , що

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq q \|x_1 - x_2\|$$

для усіх $x_1 \in M$, $x_2 \in M$.

Теорема 1.2. Нехай права частина системи рівнянь (2.2) безперервна в якійсь області $I \subset M$ простору R^{m+1} і задовольняє в ній умову Ліпшица для x з однією і тією ж константою q . Тоді через кожну точку області $I \subset M$ розширеного фазового простору проходить одна і тільки одна інтегральна крива системи рівнянь (2.2).

Якщо права частина системи (2.2) тільки безперервна, то й тоді через кожну точку розширеного фазового простору проходить хоча б одна інтегральна крива. Одиначність при цьому може бути порушена, що видно на прикладі рівняння $\dot{x} = 2x^{1/2}$, яке має інтегральні криві $(t, 0)$ і (t, t^2) , які проходять через точку $(0, 0)$.

На підставі сформульованих вище теорем, задавання початкової умови в початковий момент часу $x(0) = x_0$ однозначно визначає розв’язок системи диференційних рівнянь у будь-який момент часу $t : x(t) = \varphi^t(x_0)$. Задача знаходження розв’язку системи диференцій-

них рівнянь, що задовольняє заданій початковій умові, називається *задачею Коші*. Відображення φ' є відображенням фазового простору M у себе і називається *фазовим потоком*. Будь-яка область G фазового простору під впливом фазового потоку переходить за час t у якусь іншу область $G_t = \varphi'(G)$.

Теорема про диференційовані залежності розв'язків від початкових умов і параметрів. Рівняння у варіаціях. Нехай f – диференційоване відображення області M простору R^m в область N простору R^n . Похідною відображення f у точці x_0 називається головна лінійна частина відображення f у точці x_0 , тобто лінійний оператор $A : R^m \rightarrow R^n$ такий, що

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + O(\|x - x_0\|).$$

У координатах (x_1, \dots, x_m) і (y_1, \dots, y_n) відображення f записується у вигляді вектор-функції $y = f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Матриця оператора A в координатах (x, y) – це матриця Якобі вектор-функції f , тобто

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \quad A = \{a_{ij}\}, \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Теорема 1.3. Нехай сім'я диференціальних рівнянь (2.3) задані векторними полями $F(x, t, \mu)$, безперервними в певній області простору R^{k+m+1} разом зі своїми похідними $\partial F / \partial x$ і $\partial F / \partial \mu$. Тоді розв'язок φ сім'ї (2.3) з початковою умовою $\varphi(0, \mu) = x$ безупинно диференційоване за x , μ . Якщо залежність поля F від параметрів μ лише безперервна, то і залежність розв'язку від параметрів безперервна.

Рівняння для похідних розв'язку за початковими умовами і параметрами виписуються явно. Позначимо через φ_ξ розв'язки системи (2.2) з початковою умовою $\varphi_\xi(0) = \xi$. Фіксуємо $\xi = x$ і запишемо

$$X(t) = \frac{\partial \varphi_\xi(t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x}.$$

При кожній t лінійний оператор $X(t)$ діє з R^m у R^m . З (2.2) випливає, що операторнозначна функція $X(t)$ задовольняє наступному рівнянню у варіаціях:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad \text{де} \quad A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(\phi_x(t), t).$$

Це – лінійне однорідне неавтономне диференційне рівняння, причому $X(0)$ – одинична матриця.

Випишемо тепер рівняння у варіаціях для похідних розв’язку сім’ї (2.3) за параметрами. Нехай $\varphi_{\xi,\alpha}$ – розв’язок сім’ї (2.3) з початковою умовою $\varphi_{\xi,\alpha}(0,\alpha) = \xi$. Фіксуємо $\xi = x$, і запишемо

$$Y(t) = \frac{\partial \varphi_{\xi,\alpha}(t)}{\partial \alpha} \Big|_{\xi=x, \alpha=\mu}.$$

При кожному t лінійний оператор $Y(t)$ діє з R^k у R^m . З (2.3) випливає, що операторнозначна функція $Y(t)$ задовольняє наступному рівнянню у варіаціях:

$$\dot{Y}(t)A(t)Y(t) + b(t),$$

$$\text{де } A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi_{x,\mu}(t), t, \mu), \quad b(t) = \frac{\partial F}{\partial \mu}(\varphi_{x,\mu}(t), t, \mu).$$

Це – лінійне неоднорідне неавтономне диференційне рівняння, причому $Y(0) = 0$.

Дисипативні та консервативні системи рівнянь. Позначимо через $V(\Omega_t)$ евклідів об’єм області $\Omega_t = \varphi^t(\Omega_0)$ фазового простору, який отримуємо при зсуві протягом часу t усіх точок якоїсь початкової області Ω_0 уздовж фазових кривих автономної системи диференційних рівнянь (2.1). Тоді зміна об’єму $V(\Omega_t)$ задовольняє рівнянню

$$\frac{dV(\Omega_t)}{dt} = \int_V \operatorname{div} F(x) dx, \quad \text{де } \operatorname{div} F(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x)$$

– сума діагональних елементів оператора $\partial F / \partial x$, а dx – евклідів елемент об’єму.

Визначення. Система рівнянь (2.1) називається *консервативною*, якщо об’єм довільної області фазового простору не змінюється з часом, і *дисипативною*, якщо цей об’єм з часом зменшується.

Отже, якщо всюди у фазовому просторі $\operatorname{div} F(x) = 0$, тоді система зберігає об’єм і є консервативною. Якщо ж існує область фазового простору, в якій $\operatorname{div} F(x) < 0$, тоді система (2.1) в цій області дисипативна.

Надалі нас будуть цікавити винятково сім’ї автономних дисипативних систем звичайних диференційних рівнянь. Читачів, які цікавляться хаотичною динамікою консервативних і, зокрема, гамільтонових систем, відсилаємо до відповідних джерел.

Чисельні методи розв'язку систем звичайних диференційних рівнянь. Розв'язок задачі Коші для автономної нелінійної системи звичайних диференційних рівнянь виду (2.1) тільки у виняткових випадках може бути знайдений в явному вигляді. Інтегрування таких систем вимагає, як правило, апроксимації розв'язку різними лінійними функціями на послідовних малих відрізках часу (кроках) тривалістю τ . Найпоширенішим методом такої апроксимації є метод Рунге-Кутта 4-го порядку, який дає при малих τ різниці рівняння, що апроксимують розв'язок з точністю $O(\tau^4)$.

Позначимо через y_n вже знайдене наближене значення розв'язку системи (2.1) у момент t_n . Тоді наближене значення розв'язку системи (2.1) у момент $t_{n+1} = t_n + \tau$ знаходиться за формулою:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \tau(\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2 + \sigma_3 k_3 + \sigma_4 k_4), \text{ де } k_1 = F(t_n, y_n), \\ k_2 &= F(t_n + a_2 \tau, y_n + b_{21} \tau k_1), \quad k_3 = F(t_n + a_3 \tau, y_n + b_{31} \tau k_1 + b_{32} \tau k_2), \\ k_4 &= F(t_n + a_4 \tau, y_n + b_{41} \tau k_1 + b_{42} \tau k_2 + b_{43} \tau k_3). \end{aligned}$$

Параметри $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, a_2, a_3, a_4, b_{21}, b_{31}, b_{32}, b_{41}, b_{42}, b_{43}$ можуть бути визначені у різний спосіб. Усі чисельні розв'язки систем звичайних диференційних рівнянь, наведених у нашому посібнику, виконані при таких значеннях цих параметрів:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_4 = 1/6, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 1/3, \quad a_2 = a_3 = 1/2, \quad a_4 = 1, \quad b_{21} = b_{32} = 1/2, \\ b_{31} = 0, \quad b_{41} = b_{42} = 0, \quad b_{43} = 1. \end{aligned}$$

Зауважимо, що оцінки точності наближених розв'язків збігаються, як правило, з оцінками точності апроксимації та істотно залежать від довжини часового інтервалу T , на якому розв'язується система диференційних рівнянь. Наприклад, у методі Рунге-Кутта 4-го порядку точність розв'язку $\|x(t_n) - y_n\| = CT \exp(\alpha T) \tau^4$, де α і C – певні константи.

Некоректність чисельних методів розв'язку систем звичайних диференційних рівнянь. При чисельному розв'язку нелінійних диференційних рівнянь, що мають складну нерегулярну динаміку, задача, як правило, полягає не в розв'язку рівняння на якомусь невеликому кінцевому відрізку часу, а в знаходженні граничних множин (атракторів) траєкторій при $t \rightarrow \infty$. У такій постановці оцінки похибок чисельних методів утрачають сенс. При цьому величезною проблемою стає некоректність задачі, яка розв'язується.

Суть проблеми полягає в наступному. Будь-який метод чисельного розв'язку диференційного рівняння вимагає апроксимації тим чи ін-

шим способом похідної функції, відомої лише приблизно у вузлах певної сітки. Задача обчислення похідної від неточно заданої функції є класичною *некоректною задачею*. Малим похибкам у задаванні функції можуть відповідати великі похибки в обчисленні її похідної, тобто немає безперервної залежності похідної від функції. Нехай, наприклад, похибка у задаванні функції має вигляд $m^{-1} \sin m^2 t$. Похибка в обчисленні похідної при цьому буде $m \cos m^2 t$. Отже, при $m \rightarrow \infty$ похибка функції в рівномірній метриці необмежено спадає, тоді як погіршеність похідної в тій же метриці необмежено зростає.

Некоректність обчислення похідної $x'(t_n)$ сіткової функції $x(t)$ призводить до того, що крок сітки τ не може бути обраний довільно малим, а має визначатися похибкою в обчисленні самої функції. Дійсно, нехай значення функції $x(t)$ у точках t_{n+1} і t_n нам відомі з точністю δ , тобто нам задані значення y_{n+1} і y_n такі, що $|x(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq \delta$, $|x(t_n) - y_n| \leq \delta$. Тоді точність заміни похідної $x'(t_n)$ наближеною формулою, наприклад $(y_{n+1} - y_n) / \tau$, дорівнює не $O(\tau)$, а $O(\tau) + 2\delta / \tau$. Похибка при цьому складається з двох частин: похибки методу апроксимації похідної $O(\tau)$ і похибки $2\delta / \tau$, яка є неусувною, пов'язаною з похибкою обчислення самої функції. При $\tau \rightarrow 0$ похибка, яка не усувається, вочевидь необмежено зростає. Оптимальним у цьому випадку є вибір кроку сітки $\tau = O(\delta^{1/2})$. Такий спосіб

вибору оптимального кроку називається *регуляризацією за кроками*.

Покажемо, що аналогічний ефект має місце і при чисельному розв'язку задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь виду (2.1), наприклад методом Рунге-Кутта 4-го порядку. Нехай $y_{n+1} = y_n + \tau f(y_n)$. Позначимо через $y_n - x(t_n) = \delta_n$ похибку в обчисленні значення розв'язку $x(t)$ у точці t_n . Тоді

$$\delta_{n+1} = \delta_n + \tau f'(x_n + \theta \delta_n) \delta_n - (x_{n+1} - x_n) + \tau f(x_n), \text{ де } |\theta| < 1.$$

Оскільки точність апроксимації методу дорівнює $O(\tau^4)$, то $|\delta_{n+1}| \leq |\delta_n| \cdot |1 + \tau L| + K \tau^4$, де $L = f'(x_n + \theta \delta_n)$. Очевидно, що якщо $\tau \rightarrow 0$, то $\delta_{n+1} \rightarrow \delta_n$, і сумарна похибка згодом може тільки зростати від кроку до кроку. В той же час, якщо $-1/\tau < L < 0$, то можна домогтися значного зменшення похибки при виборі оптимального кроку, мінімізуючого оцінку похибки.

Нижче в посібнику будуть наведені численні приклади конкретних систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь зі складною динамікою, в яких при малому кроці спостерігається нібито хаотична поведінка траєкторій, а при певному розумному кроці – стійкий граничний цикл. Найяскравіший приклад – відома система рівнянь Лоренца.

3.1.1.2. Особливі точки та їхнє інваріантне різноманіття

Особливі точки систем диференціальних рівнянь. Особлива точка (нерухома точка, стан рівноваги, стаціонарна точка, точка спокою) системи диференціальних рівнянь (2.1) – це особлива точка відповідного векторного поля $F(x)$.

Визначення. Особлива точка векторного поля – це точка фазового простору, в якій вектор поля обертається в нуль.

Нехай x_0 – особлива крапка диференціованого векторного поля $F(x)$, що є правою частиною автономної системи рівнянь (2.1), а $\partial F / \partial x$ – похідна відображення F . Система лінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{y} = Ay, \quad \text{де } A = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0), \quad y = x - x_0$$

називається *лінеаризацією системи* (2.1) в *особливій точці* x_0 , поле Ay – *лінійною частиною поля* F у *точці* x_0 , а A – оператор цієї лінійної частини або оператор лінеаризації.

Визначення. Особлива точка векторного поля називається *невиродженою*, якщо оператор лінійної частини поля в цій точці не вироджений.

Визначення. Особлива точка системи диференціальних рівнянь (2.1) називається *гіперболічною*, якщо жодне власне значення оператора лінійної частини поля в цій точці не належить уявній осі.

Визначення. Дві системи диференціальних рівнянь (або, що те ж саме, – два векторних поля) *топологічно еквівалентні* в околі особливої точки, якщо існує гомеоморфізм (взаємооднозначне і взаємобезперервне відображення), що переводить особливу точку першої системи і траєкторію, яка лежить у певному її околі, в особливу точку і траєкторію другої системи зі збереженням орієнтації траєкторій.

Теорема 1.4 (теорема Гробмана–Хартмана). Безупинно диференціююче векторне поле з гіперболічною особливою точкою в певному околі цієї точки *топологічно еквівалентно своїй лінійній частині*.

Зі сформульованої теореми зокрема випливає, що якісна поведінка розв'язків автономної системи диференціальних рівнянь (2.1) в околі гіперболічної особливої точки цілком визначається поведінкою розв'яз-

ку системи лінійних диференційних рівнянь з постійним оператором (матрицею) лінійної частини поля в цій точці.

Стійкість особливих точок і стаціонарних розв'язків. Особлива точка (нерухома точка, стан рівноваги) автономної системи диференційних рівнянь називається стійкою (асимптотично стійкою), якщо є стійким (асимптотично стійким) тотожно рівний їй стаціонарний розв'язок цієї системи.

Визначення. Стаціонарний розв'язок автономної системи диференційних рівнянь (розв'язок, тотожно рівний особливій точці) називається *стійким за Ляпуновим*, якщо всі розв'язки цієї системи з початковими умовами, з досить малим околom цієї особливої точки визначені на всій невід'ємній півосі часу і рівномірно за часом сходяться до досліджуваного стаціонарного розв'язку при наближенні початкової умови до зазначеної особливої точки.

Іншими словами, стаціонарний розв'язок x_0 системи (2.1) стійкий за Ляпуновим, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що для всіх розв'язків $x(t)$ системи (2.1) з $\|x(0) - x_0\| < \delta$ випливає $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$ для всіх $t > 0$.

Визначення. Стаціонарний розв'язок автономної системи рівнянь (2.1) називається *асимптотично стійким*, якщо він стійкий за Ляпуновим і, крім того, всі розв'язки $x(t)$ системи (2.1) з досить близькими до досліджуваної особливої точки початковими умовами $\|x(0) - x_0\| < \delta$ наближаються до неї при $t \rightarrow \infty$, тобто $\|x(t) - x_0\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Якщо в умовах асимптотичної стійкості наближення розв'язків системи рівнянь (2.1) до особливої точки експоненційне, тобто $\|x(t) - x_0\| < c \exp(-\gamma t)$ з певними невід'ємними постійними c і γ , то стаціонарний розв'язок x_0 системи (2.1) називається *експоненційно асимптотично стійким*.

Стійкість (і асимптотична стійкість) стаціонарних розв'язків (особливих точок) – локальна властивість векторного поля, що задає систему диференційних рівнянь. Просте прагнення розв'язку до стану рівноваги при $t \rightarrow \infty$ не є локальною властивістю і недостатнє для асимптотичної стійкості.

Теорема 1.5 (теорема Ляпунова про стійкість за першим наближенням). Якщо оператор лінеаризації A диференційованого векторного поля $F(x)$ системи (2.1) в особливої точці має власні значення тільки з від'ємною матеріальною частиною, тоді ця особлива точка є асимптотично стійкою. Якщо одне з власних значень оператора A має невід'ємну матеріальну частину, тоді особлива точка є нестійкою за Ляпуновим.

З теореми Ляпунова випливає, що стійка гіперболічна особлива точка завжди експоненційно асимптотично стійка.

Визначення. Диференційовна функція $V(x)$ називається функцією Ляпунова для особливої точки x_0 векторного поля $F(x)$, якщо вона задовольняє наступним умовам:

- функція V визначена в певному околі точки x_0 і має в цій точці жорсткий локальний мінімум;
- похідна функції V уздовж векторного поля F у певному околі точки x_0 від’ємна, тобто

$$\frac{d}{dt}V(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial V}{\partial x_k} F_k(x) \leq 0.$$

Теорема 1.6. Особлива точка векторного поля, що диференціюється, для якої існує функція Ляпунова, є стійкою.

Інваріантні різноманіття. Підмножина G фазового простору називається інваріантною відносно фазового потоку φ' множиною або просто інваріантною множиною, якщо для всіх припустимих t є $\varphi'(G) = G$. Різноманіттям називається підмножина G евклідового простору R^m , що має в кожній своїй точці єдину дотичну гіперплощину. В цьому випадку кажуть, що G є гладко вкладеною в R^m . Якщо множина G гладко вкладена у фазовий простір M системи диференціальних рівнянь, тоді кажуть, що G є підрізноманіттям фазового простору.

Визначення. Інваріантне різноманіття векторного поля і відповідна система диференціальних рівнянь – це таке підрізноманіття фазового простору, яке в кожній своїй точці торкається вектора поля.

Розглянемо лінійний оператор $A: R^m \rightarrow R^m$. Простір R^m розпадається на пряму суму трьох підпросторів:

$$R^m = T^s \otimes T^u \otimes T^c.$$

Усі три підпростори в правій частині рівняння інваріантні щодо оператора A . Спектр обмеження A на T^s знаходиться у відкритій лівій напівплощині, обмеження A на T^u – у правій напівплощині та обмеження A на T^c – на уявній осі. Для оператора A , що є оператором лінеаризації векторного поля F рівняння (2.1) у гіперболічній особливій точці, $T^c = \{0\}$.

Теорема 1.7 (теорема Адамара–Перрона). Нехай $F \in C^r$ – гладке векторне поле з гіперболічною особливою точкою 0 і лінійною частиною A_x у нулі, T^s і T^u – площини, які відповідають операторові A . Тоді система диференціальних рівнянь має два C^r – гладких інваріантних відносно F різноманіття W^s і W^u , що проходять через 0 і торкаються в

нулі площин T^s і T^u відповідно. Розв'язки з початковими умовами на W^s (W^u) експоненційно наближаються до нуля при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$). W^s називається стійким, а W^u – нестійким різноманіттям особливої точки 0 .

Теорема 1.8 (теорема про центральне різноманіття). Якщо в умовах попередньої теореми оператор A має власні значення також і на уявній осі, тобто $T^c \neq \{0\}$, тоді система диференціальних рівнянь (2.1) має третє C^{r-1} – гладке інваріантне різноманіття W^c , що проходить через 0 і торкається в нулі площини T^c .

Різнманіття W^c називається центральним різноманіттям, а площина $T^s \otimes T^u$ – площиною гіперболічних змінних. Поведінка фазових кривих на різноманітті W^s визначається нелінійними членами.

Схематично інваріантні підпростори і різноманіття особливих точок зображено на рис. 2.2. Прийняті для них позначення різноманіть зрозумілі зі сформульованих вище теорем: s – stable (стійке), u – unstable (нестійке), c – center (центральне).

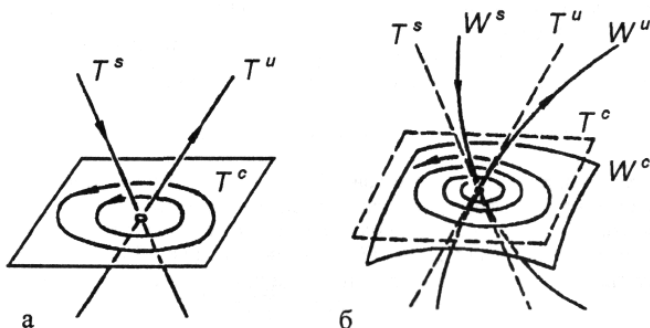


Рис. 2.2. Стійке, нестійке і центральне різноманіття лінійної системи (а) і нелінійної системи (б)

У багатьох випадках при дослідженні локальної топології нелінійного векторного поля і відповідної системи диференціальних рівнянь в околі особливої точки важливо знати тільки обмеження цього поля на центральне різноманіття. Однак, як буде показано нижче, цього виявляється аж ніяк не достатньо для отримання глобальної топологічної картини, що визначається саме гіперболічними змінними.

Особливі точки лінійних векторних полів. Будь-яка система лінійних диференціальних рівнянь, яка задається лінійним векторним полем, має в околі особливої точки вигляд

$$\dot{y} = Ay. \quad (2.4)$$

На матеріальній площині невідроджена особлива точка може бути однією з чотирьох типів: *сідло*, *вузол*, *фокус*, *центр*. Власні значення λ_1 і λ_2 лінійного оператора A в цьому випадку визначаються за формулою

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{tr} A \pm \sqrt{D} \right),$$

де $D = (trA)^2 - 4detA$, trA – слід матриці A , тобто сума її діагональних елементів, а $detA$ – визначник матриці A . Області, зайняті при цьому різними типами особливих точок рівняння (2.4) у площині $(detA, trA)$, представлено на рис. 1.3. У випадку $D = 0$ дікритичний вузол відповідає скалярній матриці $A = \lambda E$, де E – одинична матриця, а вироджений вузол – матриця, що подібна до двовимірної жорданової клітки.

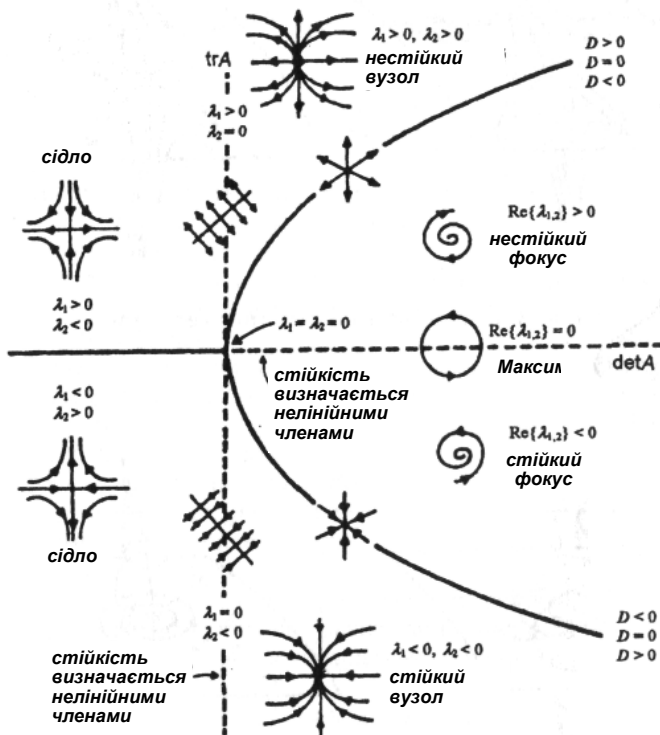


Рис. 2.3. Класифікація особливих точок лінійних двовимірних систем

Умова $\det A = 0$ визначає лінію вироджених особливих точок, серед яких можна виділити вироджене плоске сідло-вузол, що має, як правило, один вузловий і два сідлових сектори. Невироджене сідло, вузол і фокус є гіперболічними особливими точками. Тому, як випливає з теореми Гробмана–Хартмана, всі зображені на рис. 2.3 картинки, крім центру, зберігаються при малих збуреннях лінійної системи (2.4). Крім того, сідло завжди нестійке, а вузол і фокус можуть бути як стійкими (експоненційно асимптотично), так і нестійкими – залежно від знака дійсної частини власних значень матриці A .

У тривимірному матеріальному просторі існують більш складні гіперболічні особливі точки, які є комбінаціями сідла з вузлом або фокуса і мають назви, відповідно, сідло-вузол (рис. 2.4) і сідло-фокус (рис. 2.5). Сідло-вузол і сідло-фокус завжди нестійкі. Вони мають одновимірне стійке і двовимірне нестійке різноманіття (або навпаки).

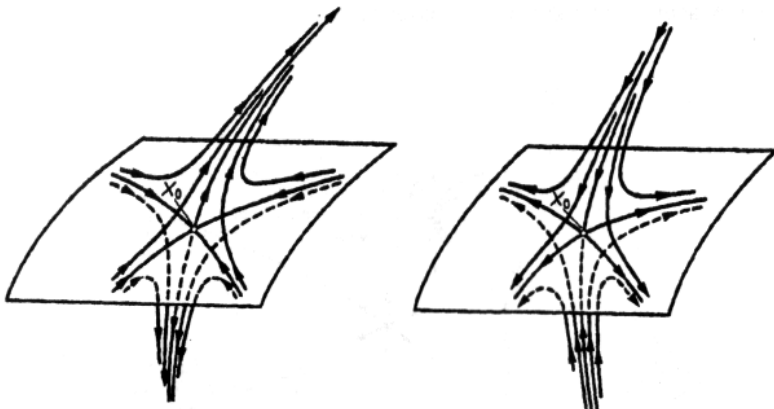


Рис. 2.4. Особливі точки x_0 типу сідло-вузол

Сепаратиси особливих точок. Гомоклінічні та гетероклінічні траєкторії. Сепаратрисні контури. Траєкторія автономної системи звичайних диференціальних рівнянь називається *сепаратрисою особливої точки*, якщо вона наближається до особливої точки або при $t \rightarrow +\infty$ чи $t \rightarrow -\infty$.

Одновимірні інваріантні стійкі (нестійкі) різноманіття особливих точок складаються із самої особливої точки і двох входних до неї (що входять до неї) сепаратрис. Багатовимірні інваріантні різноманіття особливих точок іноді ще називають *сепаратрисними поверхнями*.

Гомоклінічною траєкторією (петлею сепаратриси) особливої точки називається траєкторія (фазова крива), яка наближається до особливої точки як при $t \rightarrow +\infty$, так і при $t \rightarrow -\infty$.

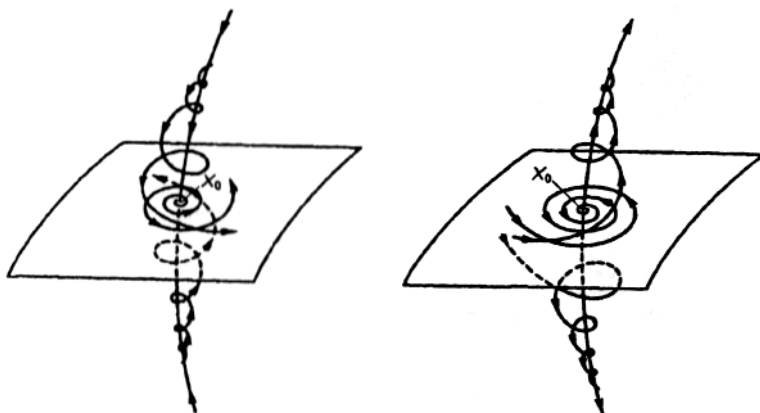


Рис. 2.5. Особливі точки x_0 типу сідло-фокус

Гомоклінічна траєкторія належить перетину стійкого інваріантного W^s і нестійкого інваріантного W^u різноманіття особливої точки.

Гетероклінічною траєкторією називається траєкторія, яка належить перетину стійкого інваріантного різноманіття однієї особливої точки з нестійким інваріантним різноманіттям іншої особливої точки і наближається при $t \rightarrow +\infty$ до першої особливої точки, а при $t \rightarrow -\infty$ – до другої.

Сепаратрисним контуром називається замкнута (у фазовому просторі) крива (цикл), що складається з декількох сепаратрис, які поєднують особливі точки.

В околі таких особливих точок можлива присутність складної нерегулярної динаміки. Тому ці точки можуть відігравати важливу роль і в утворенні хаотичних атракторів нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь.

У двовимірних системах з невідродженими особливими точками можливі тільки гомоклінічні траєкторії сідел і довільні гетероклінічні траєкторії та сепаратрисні контури, які з'єднують сідла, вузли і фокуси (рис. 2.6).



Рис. 2.6. Гомоклінічний (а) і гетероклінічний (б) контури

Розглянемо приклад системи на площині, яка має при різних значеннях параметра як гомоклінічні, так і гетероклінічні траєкторії:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \gamma - \sin x.$$

Ця система при $\gamma = 0$ має сідла в точці $(\pm \pi, 0)$ і центр у точці $(0, 0)$. Дві гетероклінічні траєкторії, які з'єднують сідла, знаходяться шляхом прямого інтегрування системи методом поділу змінних. Вони задовольняють рівнянню $y^2 = 4\cos^2 \frac{x}{2}$. При $0 < \gamma < 1$ система має центр у точці $(x_1, 0)$ і сідло в точці $(x_2, 0)$, де $x_1 = \arcsin \gamma$, $x_2 = \pi - x_1$. Інтегруючи систему, знайдемо, що петля сепаратиси сідла задовольняє рівнянню

$$y^2 = 2\gamma x + 4\cos^2 \frac{x}{2} - C, \quad \text{де } C = 2\gamma x_2 + 4\cos^2 \frac{x_2}{2}.$$

У тривимірних системах з невідродженими особливими точками можливі петлі сепаратрис як сідло-вузлів, так і сідло-фокусів, а також різні гетероклінічні траєкторії та замкнуті сепаратрисні контури, які складаються з них.

3.1.1.3. Періодичні та неперіодичні розв'язки, граничні цикли та інваріантні тори

Періодичні розв'язки. Розв'язки $x(t)$ автономної системи диференційних рівнянь (2.1) називаються *періодичними розв'язками*, якщо існує постійна T , така що $x(t+T) = x(t)$ для всіх t . Мінімальне таке значення T називається *періодом* розв'язку $x(t)$, а сам розв'язок $x(t) - T$ -періодичним.

Фазова крива (траєкторія) періодичного розв'язку системи (2.1) є замкнутою і називається *циклом*. Навпаки, будь-який цикл (замкнута фазова крива) системи (2.1) визначає періодичний розв'язок системи з певним періодом.

Теорія циклів, розвинена, в основному, у працях А. Пуанкаре, дає можливість математично описати еволюцію величезного класу природних явищ і соціальних процесів, яка полягає в установленні періодичних режимів їхнього функціонування або поведінки.

Граничні цикли. Замкнуті траєкторії систем диференційних рівнянь можуть бути ізольованими і неізольованими.

Визначення. *Граничним циклом* автономної системи звичайних диференційних рівнянь (2.1) називається її ізольована замкнута траєкторія.

Неізольовані замкнуті траєкторії, які існують, наприклад, в околі особливої точки типу центр, не цікаві для теорії дисипативних систем

диференційних рівнянь, оскільки вони не є граничними траєкторіями в тому розумінні, що для кожної такої траєкторії не існує її околу, з якого всі інші траєкторії наближаються до неї при $t \rightarrow +\infty$ або при $t \rightarrow -\infty$.

Визначення. Граничний цикл називається *орбітально асимптотично стійким* (або просто стійким), якщо для як завгодно малого його околу U всі траєкторії, які починаються в достатньо малому його околі, не виходять з часом з U і необмежено наближаються до циклу при $t \rightarrow +\infty$.

Дослідження граничного циклу на стійкість може бути здійснене з використанням теореми Флоке. Нехай $x_0(t)$ – T -періодичний розв'язок системи (2.1), представлений у фазовій площині своїм граничним циклом. Лінеаризуючи систему (2.1) на її періодичному розв'язку аналогічно зробленому вище, одержимо лінійну неавтоматичну систему звичайних диференційних рівнянь

$$\dot{y} = A(t)y, \text{ де } A(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x_0(t)) \quad (2.5)$$

з T -періодичною матрицею $A(t)$ і $y(t) = x(t) - x_0(t)$.

Теорема 1.9 (теорема Флоке). Кожен фундаментальний матричний розв'язок лінійної системи (2.5) з періодичними матеріальними коефіцієнтами зображувано у вигляді $Y(t) = P(t) \exp(Bt)$, де $P(t)$ – певна T -періодична комплексна матриця, а B – певна постійна комплексна матриця, причому існує оборотна дійсна матриця C – така, що $C = \exp(BT)$.

Матриця C , або *матриця монодромії*, єдиним способом визначається періодичною матрицею $A(t)$. Її власні значення λ_i називають *мультиплікаторами* лінійної системи (2.5), або *мультиплікаторами циклу*, за яким система (2.5) побудована. Власні значення α_i матриці B називаються *показниками Флоке*. Їхні дійсні частини також визначаються однозначно. Очевидно, що $\lambda_i = \exp(\alpha_i T)$, а $C = Y(T)$, якщо $Y(0) =$ – одинична матриця.

Дійсна неособлива матриця C не зобов'язана мати дійсний логарифм, тобто не завжди існує дійсна матриця B – така, що $C = \exp(BT)$. Прикладом є матриця C , яка має простий від'ємний мультиплікатор. Але матриця C^2 завжди має дійсний логарифм. Тому кожен дійсний фундаментальний матричний розв'язок лінійної системи (2.5) з T -періодичними коефіцієнтами представимий у вигляді $Y(t) = \tilde{P}(t) \exp(\tilde{B}t)$, де $\tilde{P}(t)$ – певна дійсна $2T$ -періодична матриця, а \tilde{B} – певна постійна дійсна матриця – така, що $C^2 = \exp(2\tilde{B}T) = \exp(2BT)$.

За значеннями мультиплікаторів циклу або показників Флоке лінійної неавтономної системи (2.5) першого наближення можна зробити висновок про стійкість періодичного розв'язку $x_0(t)$ нелінійної автономної системи (2.1).

Теорема 1.10. Один простий мультиплікатор циклу завжди має значення $+1$, відповідний показник Флоке дорівнює нулю. Якщо один показник Флоке дорівнює нулю, а всі інші $m-1$ показники мають від'ємні дійсні частини (або всі мультиплікатори циклу, крім одиничного, мають модулі, менші за 1 , тобто лежать усередині одиничного кола площини комплексного змінного), тоді періодичний розв'язок $x_0(t)$ системи (2.1) стійкий (асимптотично орбітально стійкий). Якщо ж хоча б один показник Флоке має невід'ємну дійсну частину (або мультиплікатор циклу лежить поза одиничним колом), тоді періодичний розв'язок $x_0(t)$ системи (2.1) нестійкий.

Можна показати, що в умовах сформульованої теореми періодичний розв'язок $x_0(t)$ не тільки стійкий; кожен розв'язок $x(t)$, який лежить поблизу його траєкторії, має асимптотичну фазу, тобто існує постійна c – така, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0(t + c)\| = 0.$$

Неважко помітити, що похідна $y(t) = \dot{x}_0(t)$ початкового періодичного розв'язку нелінійної автономної системи (2.1) є одним із розв'язків лінійної неавтономної системи (2.5), тому що

$$\dot{y} = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0(t)) \dot{x}_0(t) = A(t) y(t).$$

Тому одиничний мультиплікатор циклу відповідає власному векторові матриці монодромії, що торкається циклу. Він пов'язаний з рухом уздовж циклу і не впливає на його стійкість. Стійкий і нестійкий граничні цикли зображено на рис. 2.7 (а, б).

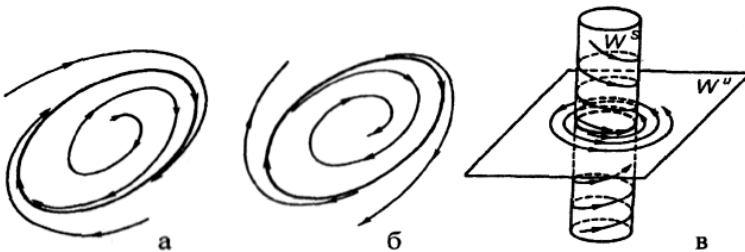


Рис. 2.7. Стійкий (а), нестійкий (б) і сідловий (в) граничні цикли

Періодичний розв'язок не може бути асимптотично стійким, тому що розв'язки з початковими умовами в різних точках циклу не зближуються при $t \rightarrow +\infty$.

Визначення. Граничний цикл називається *гіперболічним*, якщо він не має мультиплікаторів, які належать одиничному колу, крім одного, що дорівнює $+1$ (є тільки один показник Флоке з нульовою дійсною частиною, що дорівнює нулю).

Визначення. Граничний цикл називається *невиродженим*, якщо він не має мультиплікаторів, рівних $+1$, крім одного (є тільки один простий нульовий показник Флоке, але можуть бути ненульові показники Флоке з нульовими дійсними частинами).

Визначення. Граничний цикл, що має мультиплікатори всередині і на границі одиничного кола, називається *напівстійким*. Напівстійкий граничний цикл у тривимірному випадку має мультиплікатори, які дорівнюють $\{|\lambda_1| < 1, +1, |\lambda_2| = 1\}$.

Визначення. Гіперболічний граничний цикл, для якого показники Флоке мають як від'ємні, так і невід'ємні дійсні частини (або мультиплікатори лежать як усередині, так і поза одиничним колом), називається *сідловим*. Поняття сідлового циклу визначено для розмірності фазового простору $m > 2$. При $m = 3$ сідловий граничний цикл має мультиплікатори, які дорівнюють $\{|\lambda_1| < 1, +1, |\lambda_2| > 1\}$.

Для сідлового граничного циклу автономної системи звичайних диференційних рівнянь одні фазові криві, які знаходяться поблизу сідлової траєкторії, наближаються до неї (намотуються на неї) при $t \rightarrow +\infty$, утворюють її стійке інваріантне різноманіття W^s , а інші – змотуються з неї, утворюючи її нестійке інваріантне різноманіття W^u (рис. 2.7(в)).

Відображення Пуанкаре. Крім обчислення показників Флоке, існує й інший метод вивчення якісної поведінки розв'язків автономних систем звичайних диференційних рівнянь в околі граничного циклу – побудова відображення Пуанкаре і дослідження властивостей цього відображення в околі його нерухомої точки. Основний зміст використання відображення Пуанкаре для аналізу динаміки систем диференційних рівнянь полягає в тому, що при переході до відображення розмірність досліджуваної системи зменшується на одиницю.

Нехай γ – граничний цикл, що відповідає T -періодичному розв'язку $x_0(t)$ автономної системи (2.1). Проведемо через якусь точку x^* замкнутої кривої γ $(m - 1)$ -вимірну перетинаючу гіперповерхню S трансверсально γ , тобто так, щоб вектор, дотичний до кривої γ в точці x^* , не лежав у S . Оскільки крива γ є фазовою кривою T -періо-

дичного розв'язку, то траєкторія, що стартує в точці x^* , за час T повернеться до цієї ж точки. Будь-яка інша траєкторія, що розпочинається з якоїсь точки x , що лежить в околі $U \subset S$ точки x^* , повернеться і перетне S у тому ж напрямку в точці $P(x)$, яка знаходиться в околі $V \subset S$ точки x^* (рис. 1.8(а)). Локальний дифеоморфізм $P:U \rightarrow V$, тобто взаємоднозначне відображення, диференційоване разом зі зворотним, називається *відображенням Пуанкаре*, або *відображенням першого повернення*.

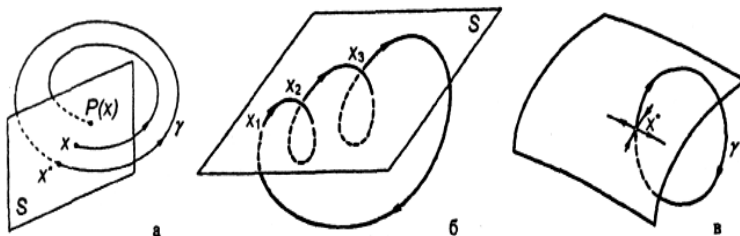


Рис. 2.8. Нерухома точка (а), цикл (б) і сідлова точка (в) відображення Пуанкаре з відповідним їй сідловим граничним циклом

Оскільки $P(x^*) = x^*$, то точка x^* є нерухомою точкою відображення Пуанкаре. Циклу відображення Пуанкаре порядку n (або n -кратному циклу) відповідає послідовність точок x_1, x_2, \dots, x_n , які задовольняють умовам (рис. 1.8(б)):

$$x_2 = P(x_1), x_3 = P(x_2), \dots, x_1 = P(x_n).$$

Визначення. Нерухома точка x^* відображення $P(x)$ стійка, якщо існує такий її окіл U , що всі ітерації відображення P , які починаються в цьому околі, сходяться до нерухомої точки, тобто якщо

$$x_0 \in U \text{ і } x_{k+1} = P(x_k), k = 0, 1, \dots, \text{ тоді } x_k \rightarrow x^* \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Оскільки відображення Пуанкаре диференційоване, то його можна лінеаризувати в його нерухомій точці:

$$P(x) - x^* = A(x - x^*) + O(\|x - x^*\|), \text{ де } A = D_x P(x^*) = \frac{\partial P}{\partial x}(x^*).$$

Лінійний оператор A має ранг, рівний $m - 1$. При виборі відповідної гіперповерхні S , перпендикулярної векторові, що дотичний до циклу γ в точці x^* , і системі координат, один з ортів якої співпадає з вектором, дотичним до циклу, матриця оператора A буде мати розмірність $(m - 1) \cdot (m - 1)$.

Як і у випадку систем диференціальних рівнянь, відображення $P(x)$

може бути консервативним, тобто зберігати фазовий об'єм, і дисипативним – стискати фазовий об'єм.

Визначення. Відображення $P(x)$ називається консервативним в області $B \subset M$, якщо $|\det D_x P(x)| = 1$ для усіх $x \in B$. Якщо ж для всіх $x \in B$ має місце $|\det D_x P(x)| < 1$, тоді відображення $P(x)$ називається дисипативним в області $B \subset M$.

Стійкість нерухомої точки відображення $P(x)$ визначається власними значеннями матриці A .

Теорема 1.11. Якщо всі $m - 1$ власних значень α_k матриці A лежать усередині одиничного кола площини комплексного змінного, тобто $|\alpha_k| < 1$, тоді нерухома точка x^* відображення $P(x)$ є стійкою; якщо ж серед власних значень α_k є хоча б одне α_i з $|\alpha_i| > 1$, тоді нерухома точка відображення $P(x)$ є нестійкою.

Всі наведені вище визначення і теореми переносяться без змін на будь-які диференційовані багатовимірні відображення $P(x) : R^m \rightarrow R^m$. Стійкій (нестійкій) нерухомій точці відображення Пуанкаре відповідає стійкий (нестійкий) цикл відповідної системи диференційних рівнянь, а сідловій точці, яка має власні значення оператора лінійної частини, що лежать як усередині, так і поза одиничним колом площини комплексного змінного, відповідає сідловий граничний цикл (рис. 2.8(в)).

На жаль, при вивченні конкретних систем диференційних рівнянь побудова відображення Пуанкаре і його похідних можлива тільки чисельно. З іншого боку, результати, отримані для абстрактних $(m - 1)$ -вимірних відображень, зовсім необов'язково мають переноситися на m -вимірні системи звичайних диференційних рівнянь. Іншими словами, досі не вирішена навіть проблема можливості відновлення системи диференційних рівнянь за її відображенням Пуанкаре, і дуже сумнівно, що зробити це виявиться простіше, ніж здійснити повне якісне дослідження самої системи диференційних рівнянь. Крім того, розглянуті далі численні приклади аналізу сценаріїв переходу до хаосу в конкретних багатовимірних нелінійних системах звичайних диференційних рівнянь показують, що цей перехід аналогічний переходові до хаосу в результаті біфуркацій безперервних одновимірних відображень. Тому більш цікавим і важливим нам видається аналіз саме одновимірних безперервних відображень та їхній зв'язок з нелінійними дисипативними системами звичайних диференційних рівнянь. Цей зв'язок реалізовується не через відображення Пуанкаре, а через перехід до певного $(m - 1)$ -вимірного (двовимірного в тривимірному випадку) підпростору, циклу, який обертається трансверсально, і через

побудову в ньому одновимірного відображення. Розгляду цих питань присвячений розділ 4 посібника.

Інваріантні тори. У системах диференціальних рівнянь T -періодичний рух за циклом є одним з найпростіших рухів і характеризується наявністю однієї частоти $\omega = 2\pi / T$. Значно складнішим є багаточастотний режим руху, що характеризується наявністю декількох незалежних частот $\omega_1, \dots, \omega_n$. Рух у такому режимі можна представити як рух на поверхні n -вимірного інваріантного тора, який задається кутами $\alpha_i(t) = \alpha_{i0} + \omega_i t$, $i = 1, n$ (рис. 2.9(а)). Розмірність m фазового простору при цьому повинна бути не менша за $n + 1$.

Поведінка траєкторій системи на поверхні тора істотно залежить від співвідношення між частотами ω_i , $i = 1, \dots, n$. Наприклад, у випадку, коли $n = 2$ рух двовимірним тором буде періодичним тоді і тільки тоді, коли відношення частот є раціональним, тобто $\omega_1 / \omega_2 = k / m$, де $k, m \in \mathbb{N}$. При цьому $T = \pi(k / \omega_1 + m / \omega_2)$, і отже, $\alpha_1(T) = \alpha_{10} + \omega_1 T = \alpha_{10} + 2\pi k$, а $\alpha_2(T) = \alpha_{20} + \omega_2 T = \alpha_{20} + 2\pi m$, тобто кути α_1 і α_2 задають ту саму точку на поверхні тора, і тому за час T траєкторія повертається у початкову точку.

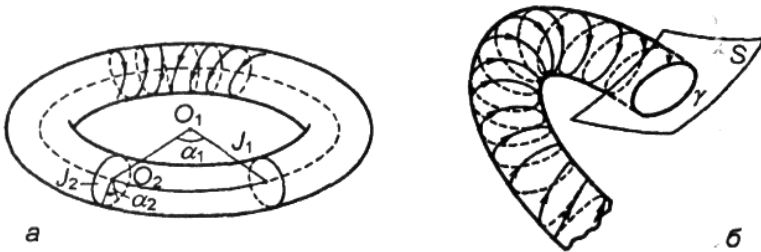


Рис. 2.9. Двовимірний інваріантний тор (а) і квазіперіодичний режим руху на ньому (б)

Якщо ж частоти ω_1 і ω_2 є непорівнянними, тобто їхнє відношення ірраціональне, фазова траєкторія ніколи не замкнеться і з часом буде проходити як завгодно близько до будь-якої заданої точки на поверхні тора. У цьому випадку фазова крива утворить усюди щільну обмотку тора, – такий рух називається *квазіперіодичним*.

Періодичний і квазіперіодичний рух тором зручно наочно представляти відображенням Пуанкаре на січній гіперповерхні S , проведеної трансверсально до поверхні тора. При цьому періодичний рух буде представлено S кінцевою кількістю точок, які послідовно переходять одна в одну під впливом відображення Пуанкаре, а квазіперіодичний рух буде представлено S нескінченною множиною точок, які утворюють щільну обмотку.

дичний – нескінченною множиною точок, які щільно заповнюють якусь замкнуту криву (рис. 2.9(б)).

Періодичний і квазіперіодичний рух багатовимірними інваріантними торами виникає природним шляхом у гамільтонових консервативних системах. При цьому необхідно розрізняти резонансні та нерезонансні тори.

Визначення. Інваріантний тор розмірності $n \geq 2$ називається *резонансним*, якщо існують деякі цілі числа k_i – такі, що

$$\sum_{i=1}^n k_i \omega_i = 0.$$

У випадку цілком інтегрованої гамільтонової системи весь фазовий простір можна уявити у вигляді сукупності вкладених один в одного резонансних і нерезонансних торів – тобто кожен тор не є ні ізольованим, ні граничним. У випадку ж не цілком інтегрованої гамільтонової системи резонансні та деякі з нерезонансних торів руйнуються, а рух із заданими на них початковими умовами виявляється дуже складним, відмінним як від періодичного, так і від квазіперіодичного. Області зруйнованих торів зливаються, утворюючи єдину мережу – *павутину Арнольда*. Рух цією павутиною називається *дифузією Арнольда* і є прикладом хаотичної поведінки розв’язків у консервативних системах. Пояснення цьому явищу дає теорема КАМ (Колмогорова–Арнольда–Мозера), докладно викладена в багатьох монографіях і підручниках. Відзначимо, що в кожному разі тори в консервативних гамільтонових системах не є граничними множинами і не можуть бути стійкими в тому ж розумінні, що й граничні цикли.

Навпаки, у дисипативних системах, дослідженню яких присвячений цей посібник, саме стійкі тори часто відіграють істотну роль.

Визначення. Інваріантний тор називається *стійким*, якщо для як завгодно малого його околу U всі траєкторії, які починаються в досить малому його околі, не виходять з часом з U і необмежено наближаються до тору при $t \rightarrow +\infty$.

Методи аналізу стійкості інваріантних торів дисипативних систем нелінійних диференціальних рівнянь на сьогодні ще недостатньо розроблені. Можна спробувати проаналізувати на стійкість замкнуту криву, заповнену точками відображення Пуанкаре на січній гіперповерхні S . Однак ця крива не є розв’язком якогось рівняння, і аналіз її стійкості є досить проблематичним. Можна також намагатися використовувати показники Ляпунова, розглянуті в наступному пункті, які мають радше теоретичну, ніж практичну цінність. У цілому ситуація з дисипативними системами виглядає значно складнішою, ніж у випадку гамільтонових систем, а знаходження навіть двовимірних торів у

конкретних системах диференційних рівнянь є швидше мистецтвом, ніж наукою.

Неперіодичні розв'язки. Показники Ляпунова. Поняття стійкості, сформульовані вище для стаціонарних і періодичних розв'язків, природним чином переносяться на довільні розв'язки автономної системи звичайних диференційних рівнянь (2.1).

Визначення. Розв'язок $x_0(t)$ автономної системи звичайних диференційних рівнянь (2.1) називається *стійким за Ляпуновим*, якщо всі розв'язки цієї системи з досить малим оточенням початкових умов визначені на всій невід'ємній півосі часу і рівномірно за часом сходяться до досліджуваного розв'язку при наближенні початкових умов системи до початкової умови цього розв'язку.

Інакше кажучи, розв'язок $x_0(t)$ системи (2.1) стійкий за Ляпуновим, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ – таке, що для всіх розв'язків $x(t)$ системи (2.1) з умови $\|x(0) - x_0(0)\| < \delta$ випливає $\|x(t) - x_0(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t > 0$.

Визначення. Розв'язок $x_0(t)$ автономної системи диференційних рівнянь (2.1) називається *асимптотично стійким*, якщо він стійкий за Ляпуновим і, крім того, всі розв'язки $x(t)$ системи (2.1) з досить близькими до досліджуваного розв'язку початковими умовами $\|x(0) - x_0(0)\| < \delta$ наближаються до нього при $t \rightarrow \infty$, тобто $\|x(t) - x_0(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Якщо в умовах асимптотичної стійкості наближення розв'язку системи рівнянь (2.1) до досліджуваного розв'язку $x_0(t)$ експоненційне, тобто $\|x(t) - x_0(t)\| \leq c \exp(-\gamma t)$ з певними невід'ємними постійними c і γ , тоді розв'язок $x_0(t)$ системи (2.1) називається *експоненційно асимптотично стійким*.

Для дослідження стійкості розв'язку $x_0(t)$ системи (2.1) лінійаризуємо його на цьому розв'язку аналогічно тому, як це зроблено вище, й отримаємо лінійну неавтономну систему звичайних диференційних рівнянь:

$$\dot{y} = A(t)y, \text{ де } A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0(t)), \quad (2.6)$$

а $y(t) = x(t) - x_0(t)$. У цьому випадку лінійний оператор $A(t)$ може мати матрицю з довільними обмеженими на півосі $0 \leq t < \infty$ елементами.

Розглянемо розв'язок $y(t)$ лінійної системи (2.6) і визначимо для нього *показник Ляпунова* $\lambda(y)$ за формулою:

$$\lambda(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|y(t)\|}{t}.$$

В окремому випадку, коли $x_0(t) = x_0$ – стаціонарний розв’язок, оператор лінійної частини має постійну матрицю $A(t) = A$. При цьому фундаментальна матриця розв’язків лінійної системи (2.6) має вигляд: $Y(t) = \exp(At)$. Без обмеження спільності будемо вважати, що матриця A має жорданову форму. Отже, кожній її жордановій комірці порядку k із власним значенням λ відповідає ланцюжок з k розв’язків лінійної системи вигляду

$$y_i(t) = e^{\lambda t} \left(\xi_{i-1} + t\xi_{i-2} + \dots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \xi_0 \right), \quad i = 1, \dots, k,$$

де ξ_0 – власний, а ξ_j – приєднані вектори власного значення λ . Для кожного з розв’язків ланцюжка його показник Ляпунова $\lambda(y_i)$ дорівнює $R \in \lambda$. Таким чином, лінійна система (2.6) з постійною матрицею A має m показників Ляпунова з урахуванням їхньої кратності, що збігаються з дійсними частинами власних значень матриці A . Кратність кожного показника визначається порядком відповідної йому жорданової комірки. За теоремою Ляпунова про стійкість за першим наближенням стаціонарний розв’язок (особлива точка) системи (2.1) асимптотично стійкий, якщо всі показники Ляпунова лінійної системи першого наближення від’ємні.

В іншому важливому окремому випадку, коли $x_0(t)$ є періодичним розв’язком автономної системи (2.1), показники Ляпунова збігаються з дійсними частинами показників Флоке, що випливає з представлення фундаментальної матриці розв’язків у вигляді $Y(t) = P(t) \exp(Bt)$ з періодичної і, отже, обмеженої матриці $P(t)$. Система також має m показників з урахуванням їхньої кратності, що визначаються порядками жорданових комірок матриці B .

Теорема 1.12. Якщо траєкторія автономної системи звичайних диференціальних рівнянь (2.1) залишається в обмеженій області і не наближається до особливої точки при $t \rightarrow \infty$, тоді щонайменше один показник Ляпунова лінеаризований на цьому розв’язку системи дорівнює нулю.

Отже, якщо один з показників Ляпунова системи, лінеаризований на періодичному розв’язку, дорівнює нулю, а всі інші показники від’ємні, тоді граничний цикл є стійким. Нульовий показник відповідає напрямку, що дотичний до циклу (рис. 2.10(a)).

У загальному випадку лінійна неавтономна система (2.6) має m показників

$$\lambda_m \leq \lambda_{m-1} \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1,$$

серед яких можуть бути й кратні. Ці показники вже не є власними значеннями якоїсь постійної матриці, в тому числі й матриці $A(\infty)$,

якщо навіть відповідна границя існує. Нульовий показник відповідає напрямку, дотичний обмеженому неперіодичному розв'язку і не наближається до особливої точки. Показник λ_1 називається старшим характеристичним показником системи (2.6) і позначається через Λ .

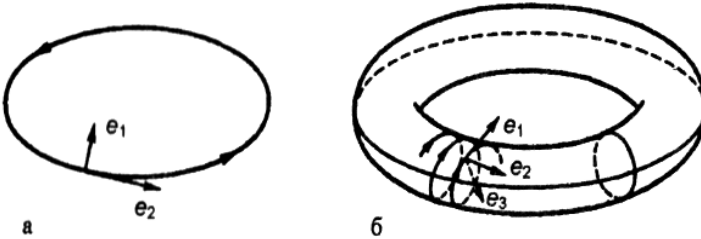


Рис. 2.10. У випадку граничного циклу (а) і інваріантного тора (б), показники Ляпунова, що відповідають напрямкам e_2 і e_1, e_3 , дорівнюють нулю

Нескладно записати, що $\Lambda = \sup_{y \neq 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln \|y(t)\|}{t}$.

Визначення. Лінійна неавтономна система (2.6) з дійсними коефіцієнтами називається *правильною*, якщо її сума показників Ляпунова співпадає із середнім значенням сліду матриці $A(t)$, що в свою чергу співпадає з дивергенцією векторного поля, тобто:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \lambda_k &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr} A(s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{k=1}^m a_{kk}(s) ds = \overline{\text{tr} A(t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{div} F(x_0(s)) ds. \end{aligned}$$

Вважається, що всі цікаві з практичної точки зору системи є правильними. Для таких систем застовується узагальнена теорема Ляпунова про стійкість за першим наближенням.

Теорема 1.13. Нехай розв'язок $x_0(t)$ неавтономної системи звичайних диференціальних рівнянь (2.2) такий, що різниця $y(t) = x(t) - x_0(t)$ задовольняє рівнянню

$$\dot{y} = A(t)y + f(y, t),$$

де $A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0(t), t)$, $\|f(y, t)\| \leq K \|y\|^q$, $q > 1$. Тоді, якщо лінійна система першого наближення $\dot{y} = A(t)y$ правильна і має від'ємний стар-

ший характеристичний показник Λ , то розв'язок $x_0(t)$ системи (2.2) є асимптотично стійким. Якщо показник $\Lambda > 0$, то розв'язок $x_0(t)$ системи (2.2) буде нестійким.

Існують численні узагальнення сформульованої теореми, пов'язані, в основному, з узагальненням поняття старшого характеристичного показника Λ . Поняття характеристичної функції $\Lambda(t)$ лінійної системи (2.6) узагальнює як поняття старшого характеристичного показника, так і поняття верхнього центрального показника. Від'ємність характеристичної функції забезпечує асимптотичну стійкість розв'язку $x_0(t)$ системи (2.2) без вимоги правильності лінійної системи першого наближення і без вимоги від'ємності старшого характеристичного показника (він може дорівнювати нулю).

Визначення. Обмежена траєкторія автономної системи (2.1) називається *гіперболічною*, якщо лінеаризована на цьому розв'язку система (2.6) має тільки один простий нульовий показник.

Останнє визначення узагальнює введені раніше поняття гіперболічної особливості точки і гіперболічного граничного циклу.

Визначення. Гіперболічна траєкторія, що має як невід'ємні, так і від'ємні показники, називається *сідловою*.

Для сідлової траєкторії автономної системи звичайних диференціальних рівнянь, як і для сідлового граничного циклу, можна визначити стійке інваріантне різноманіття W^s і нестійке інваріантне різноманіття W^u .

Поняття *асимптотичної орбітальної стійкості* і *напівстійкості* обмеженої неперіодичної траєкторії вводиться аналогічно тому, як це було зроблено для граничних циклів вище. У першому випадку лінеаризована на розв'язку система має один нульовий та інші від'ємні показники, а в другому – кратний нульовий та інші від'ємні показники.

Якщо траєкторія періодичного або неперіодичного розв'язку $x_0(t)$ системи (2.1) лежить на інваріантному n -вимірному торі, то такий розв'язок не може бути асимптотично стійким, тому що розв'язки з початковими умовами в різних точках тора не зближаються при $t \rightarrow +\infty$. При цьому n показників лінеаризованої на такому розв'язку системи, які відповідають напрямкам у місці дотику до поверхні тора гіперплощини, будуть дорівнювати нулю (рис. 2.10 (б)). Сам тор буде стійким, якщо всі інші показники Ляпунова від'ємні. Отже, будь-яка траєкторія на поверхні стійкого тора є напівстійкою.

Для неперіодичного розв'язку автономної системи (2.1), траєкторія якого не лежить на поверхні інваріантного тора, тобто розв'язок не є також і квазіперіодичним, ніщо не забороняє реалізуватися випадку, коли один (старший) або кілька показників Ляпунова дорівнюють нулю, а інші показники від'ємні.

Наприкінці цього пункту відзначимо одну важливу властивість дисипативних систем автономних диференціальних розв'язків, яка впливає з умови правильності системи (2.6), лінеаризованої на розв'язку, що лежить в області дисипативності. Оскільки уздовж такого розв'язку дивергенція векторного поля від'ємна, сума показників Ляпунова лінеаризованої на цьому розв'язку системи (2.6) також від'єм-

на, тобто $\sum_{k=1}^m \lambda_k$.

3.1.2. Аналіз нелінійної системи з дискретним часом

Дотримуючись процедури побудови перетину Пуанкаре, дослідимо відповідність між видом перетину Пуанкаре атрактора і динамічними властивостями розв'язку. Якщо розв'язок періодичний, тоді фазова траєкторія є замкнутою орбітою – граничним циклом. Відповідний перетин Пуанкаре дуже простий: це одна або кілька точок.

Нагадаємо, що коли потік є дуже дисипативним і спричиняє швидке скорочення площі перетину, його перетин Пуанкаре (наприклад, у тривимірному випадку) практично можна розглядати як множину точок, розподілених уздовж якоїсь кривої (відрізка прямої, дуги кривої і т. ін.). Тоді ми можемо визначити координату x для кожної точки на кривій і досліджувати, як змінюється x з часом. Відображення Пуанкаре на такому одновимірному графіку називається *відображенням першого повернення*. Отже, природним узагальненням дослідження перетину Пуанкаре є аналіз відображення першого повернення $x_{n+1} = f(x_n)$, $n > 1$, що виражає залежність між координатами поточної та попередньої точок. Класичними засобами дослідження одновимірного відображення є графіки на площині (x_n, x_{n+1}) . Ймовірно, найпростіша крива, яка призводить до нетривіальних результатів, відповідає так званому *логістичному відображенню*

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n), \quad 0 \leq x_n \leq 1. \quad (2.7)$$

Рівнянням (2.7) на площині задається квадратична парабола. Процедuru побудови відображення першого повернення представлено на рис. 2.11. За відомим початковим значенням x_1 знайдемо x_2 , відновивши перпендикуляр до осі x_n у точці x_1 до перетину з параболою. Прийемо значення x_2 за початкове. Для цього проведемо через точку на осі x_{n+1} штрихову пряму до перетину з бісектрисою кута між осями x_{n+1} і x_n і з точки перетину опустимо перпендикуляр на вісь x_n .

Одержимо нове початкове значення x_2 . Повторюючи процес за описаною схемою, знайдемо x_3 , x_4 і т. д. Ця процедура називається *побудовою сходів Ламерея*.

Неважко переконатися, що у випадку логістичного відображення, якщо $\lambda \leq 4$, то всі значення x_n лежать на відрізку $[0,1]$ за умови, що $0 \leq x_1 \leq 1$.

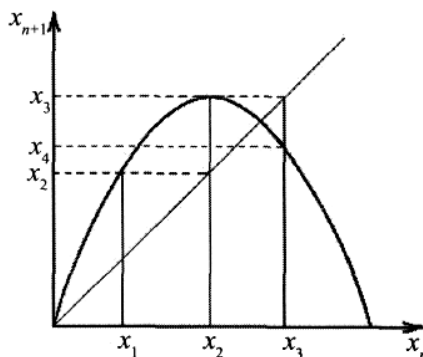


Рис. 2.11. Процедура побудови сходів Ламерея

Розглянемо поведінку послідовності $\{x_n\}$ при різних значеннях параметра λ .

1. Припустимо, що $0 < \lambda < 1$. Знайдемо значення нерухомої точки x^* з рівняння $x^* = \lambda x^*(1 - x^*)$. У цьому випадку існує тільки один невід'ємний розв'язок: $x^* = 0$. Усі розв'язки, початковими умовами яких є значення x_0 з інтервалу $0 < x_1 < 1$, наближаються до x^* .

Областю наближення $x^* = 0$ буде весь інтервал $(0,1)$. Графічно послідовність $\{x_n\}$ зображено на рис. 2.12.

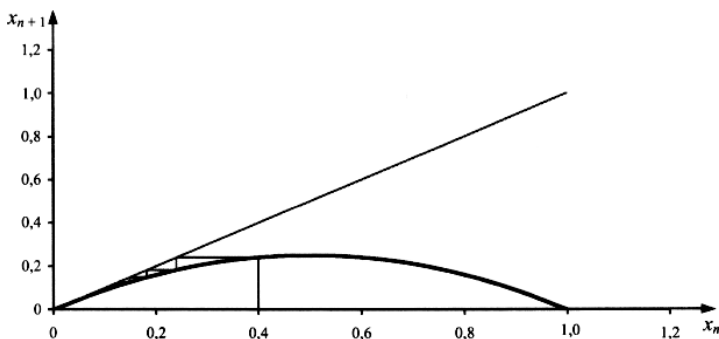


Рис. 2.12. Сходи Ламерея логістичного відображення ($\lambda = 0,5$)

Процес дослідження системи може бути здійснений за допомогою електронної таблиці *Excel*. Нехай $\lambda = 0,5$, $x_1 = 0,8$. Запустимо *Excel*. У

вікні, що розкрилося, з'явиться таблиця. Введемо в комірку A1 значення $x_1 = 0,8$. У комірку A2 введемо формулу для x_2 у такому вигляді: $= 0,5*A1*(1 - A1)$. Тепер скопіюємо формулу, щоб отримати для всіх x відповідні їм значення (для n , що зростає, наприклад, до 10). Для цього треба підвести курсор до правого нижнього кута комірки A2 так, щоб він перетворився на чорний хрестик, і, натиснувши ліву кнопку миші, протягнути курсор до комірки A10. Стовпчик A заповниться числами (рис. 2.13).

	A	B	C	D	E	F
1	0.8					
2	0,08					
3	0,0368					
4	0,01772					
5	0,0087					
6	0,00431					
7	0,00215					
8	0,00107					
9	0,00054					
10	0,00027					
11						
12						

Рис. 2.13. Фрагмент вікна *Excel*

Пари (n, x_n) задають послідовність точок, зображену на рис. 2.14.

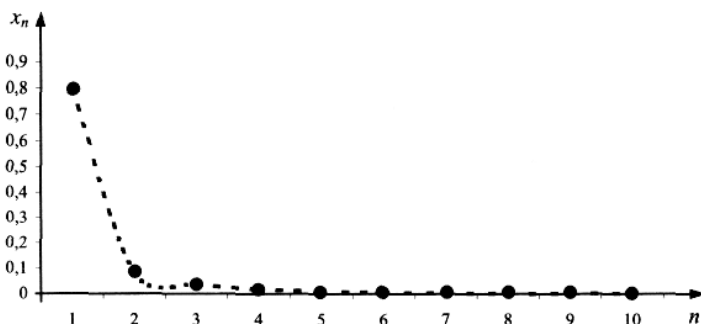


Рис. 2.14. Графічне представлення послідовності ($\lambda = 0,5$)

2. Припустимо, що $1 < \lambda < 3$. Як видно з рис. 2.15, послідовність $\{x_n\}$ сходиться до ненульового значення x^* , що може бути знайдене рівнянням $x^* = \lambda x^*(1 - x^*)$. Усі точки, які задовольняють цьому рів-

нянню, будемо називати нерухомими точками, тому що $x_1 = x^*$, $x_2 = x^*$, ..., $x_n = x^*$ при будь-якому n . При $\lambda < 1$ квадратне рівняння $\lambda(x^*)^2 + x^*(1 - \lambda) = 0$ має один невід'ємний корінь: $x^* = 0$. При $\lambda > 1$ невід'ємних коренів два: $x^* = 0$ і $x^* = (\lambda - 1) / \lambda$. Отже, при $\lambda = 1$ відбувається біфуркація: нерухома точка $x^* = 0$ втрачає стійкість, а нова точка, що з'явилася, стає стійкою.

Стійкість нерухомої точки $x^* = f(x^*)$ можна визначити в такий спосіб. Нехай $x_n = x^* + \Delta x_n$, де Δx_n – мале число. Якщо точка стійка, то зі збільшенням n величина $|\Delta x_n|$ повинна зменшуватися. Використовуючи розкладання функції в ряд Тейлора і нехтуючи членами, пропорційними $(\Delta x_n)^2$, $(\Delta x_n)^3$ і т. д., одержимо оцінку для Δx_{n+1} :

$$x^* + \Delta x_{n+1} = f(x^* + \Delta x_n) \approx f(x^*) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x_n, \quad \Delta x_{n+1} \approx \frac{df(x)}{dx} \Delta x_n.$$

Для того щоб $\Delta x_n \rightarrow 0$, має виконуватися нерівність

$$\left| \frac{df(x^*)}{dx} \right| < 1. \quad (2.8)$$

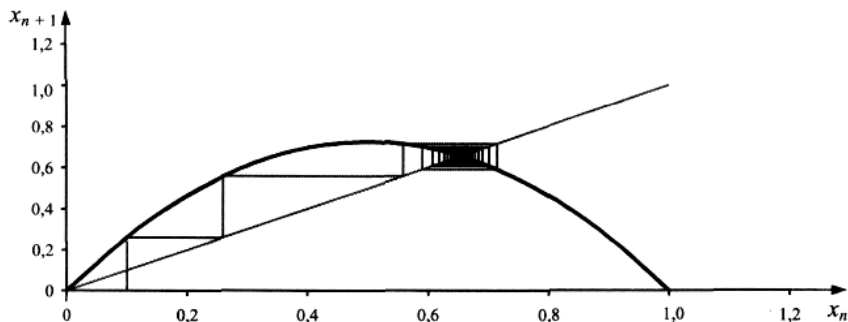


Рис. 2.15. Сходи Ламерея логістичного відображення
($\lambda = 2,9$; $x_1 = 0,1$)

Неважко переконатися, що

$$\frac{df(0)}{dx} = \lambda.$$

Значення λ в розглянутому випадку більше одиниці. Тому точка $x^* = 0$ втрачає стійкість. Обчислення значення похідної функції $f(x) = \lambda x(1 - x)$ у точці $x^* = (\lambda - 1) / \lambda$ приводить до нерівності $\lambda - 2 < 1$. От-

же, цей розв'язок буде стійким для всіх $1 < \lambda < 3$.

Корисно проекспериментувати, застосовуючи програму *Excel*, з різними значеннями параметра λ із зазначеного інтервалу і різних початкових станів x_1 . Графіки поведінки розв'язків рівняння (2.7) при $\lambda = 2$ і $x_1 = 0,1; 0,4; 0,8$ представлено на рис. 2.16.

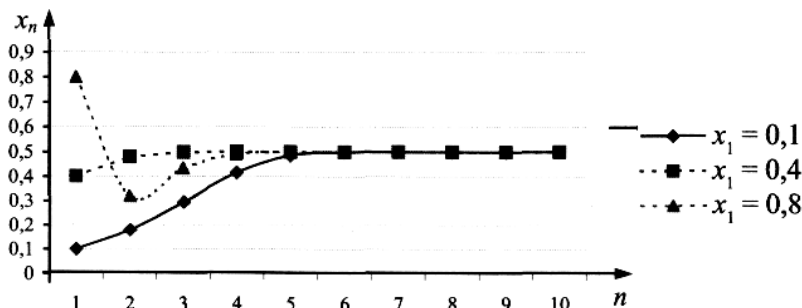


Рис. 2.16. Наближення до стану рівноваги при різних початкових умовах ($\lambda = 2$)

3. Нехай тепер $3 < \lambda < 3,449\dots$ Чисельний аналіз рівняння (2.7) при значенні $\lambda = 3,2$ ($x_1 = 0,8$) показує, що в системі встановлюються періодичні коливання (рис. 2.7).

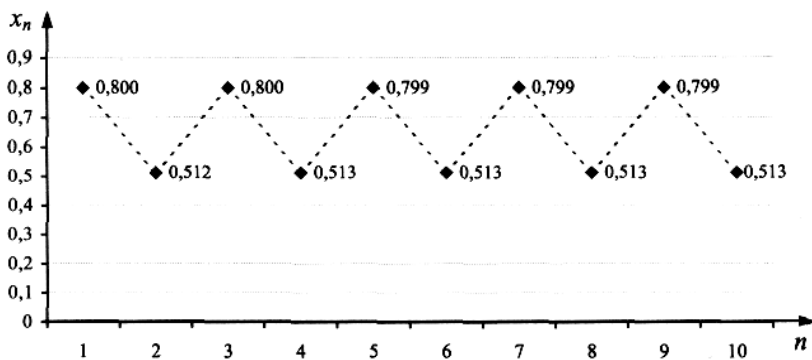


Рис. 2.17. Періодичні коливання ($\lambda = 3,2$)

Поведінки системи якісно змінилася. У цьому випадку послідовність $\{x_n\}$ виглядає так, що $x_{2n+1} \rightarrow a_1$, $x_{2n} \rightarrow a_2$ при $n \rightarrow \infty$. Ці числа зв'язані співвідношеннями $a_1 = f(a_2)$, $a_2 = f(a_1)$. Тоді кажуть, що відображення (2.7) має стійкий цикл із періодом 2 і позначають його S^2 (рис. 2.18).

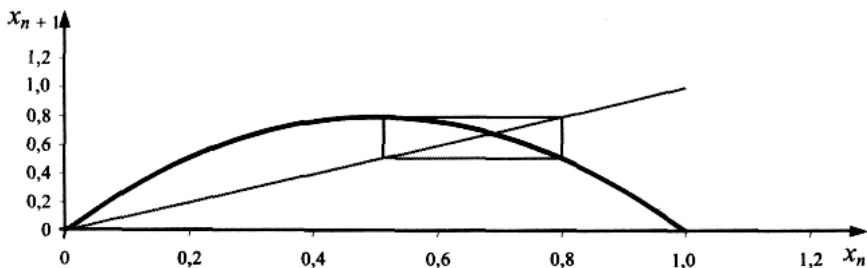


Рис. 2.18. Подвійний цикл S^2

Перехід від нерухомої точки (її можна вважати циклом S^1) до циклу S^2 відбувся в результаті біфуркації, що має назву *біфуркації подвоєння періоду*. Точка x^* при цьому не зникла і залишилася нерухомою, однак величина

$$\left| \frac{df(x^*)}{dx} \right|$$

стала більше одиниці.

Знайдемо нерухомі точки відображення (2.7) і дослідимо їхню стійкість. Для цього розв'яжемо рівняння $f(f(x^*)) = x^*$, яке для $f(x) = \lambda x(1-x)$ набуде такого вигляду:

$$\lambda^3(x^*)^4 - 2\lambda^3(x^*)^3 + (\lambda^3 + \lambda^2)(x^*)^2 - \lambda^2 x^* = x^*. \quad (2.9)$$

Два корені наведеного рівняння четвертого ступеня нам відомі. Це $x_1^* = 0$ і $x_2^* = (\lambda - 1) / \lambda$. Розділивши формулу (2.9) на x^* і на $(x^* - (\lambda - 1) / \lambda)$, отримаємо квадратне рівняння $\lambda^3(x^*)^2 - (\lambda^3 + \lambda^2)x^* + (\lambda^2 + \lambda) = 0$, коренями якого є

$$x_3^* = \frac{\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda}, \quad x_4^* = \frac{\lambda + 1 - \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda}.$$

Умова стійкості циклу S^2 визначається за формулою:

$$\left| \frac{df(x_1)}{dx} \cdot \frac{df(x_2)}{dx} \right| < 1,$$

яка випливає з нерівності (2.8) і правил диференціювання складної функції.

У розглянутому випадку

$$\frac{df(x_1^*)}{dx} = 1 + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}, \quad \frac{df(x_2^*)}{dx} = 1 - \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}.$$

Отже, умова стійкості приводить до нерівності $|\lambda^2 - 2\lambda - 4| < 1$, що виконується для всіх $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$.

4. При подальшому збільшенні параметра λ послідовність $\{x_n\}$ знову змінюється. Так, при $\lambda = 3,449\dots$ ($\lambda = 1 + \sqrt{6}$) виникає цикл S^4 : $4n \rightarrow a_1, x_{4n+1} \rightarrow a_2, x_{4n+2} \rightarrow a_3, x_{4n+3} \rightarrow a_4$, при $n \rightarrow \infty$ (рис. 2.19). При цьому в системі встановлюються періодичні коливання з періодом 4 (рис. 2.20).

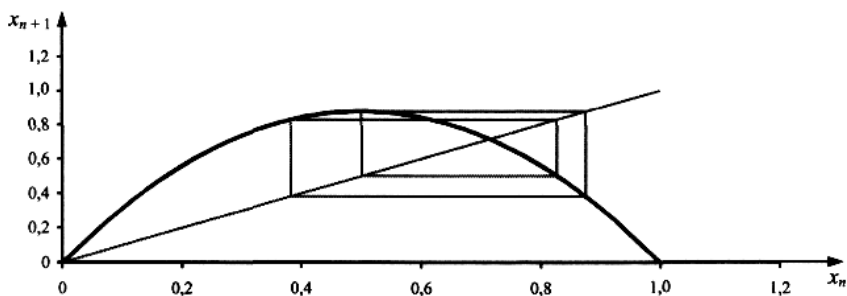


Рис. 2.19. Стійкий цикл S^4

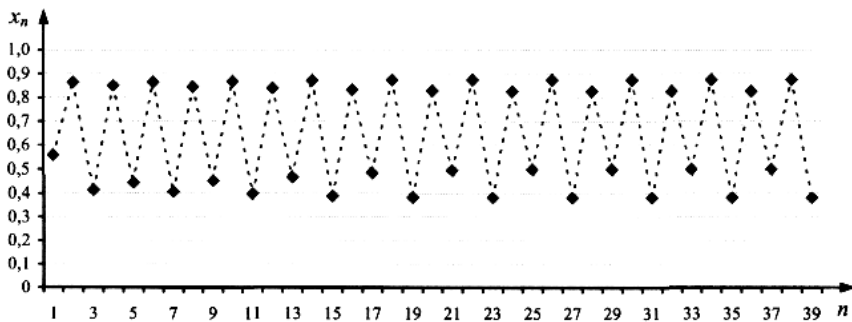


Рис. 2.20. Коливання з періодом 4 ($\lambda = 3,5$)

Послідовно збільшуючи параметр λ , ми побачимо цикли $S^8, S^{16}, S^{32}, S^{64}, S^{128}, S^{256}$ і т. д. При цьому кожен цикл S^{2^p} втрачає стійкість і стійким стає цикл $S^{2^{p+1}}$. Нарешті, при значенні $\lambda = 3,5699\dots$ (його іноді позначають λ_∞) формула (2.7) дає вже неперіодичну послідовність

$\{x_n\}$. Поведінка виглядає випадковою. Насправді ж ця загадкова поведінка цілком визначена детермінованим законом (2.7). Неперіодичний, випадковий процес виникає як границя усе більш складних структур (циклів S^{2^p}). Отже, *хаос* виникає як надскладна організація (цикл S^{2^∞}) (рис. 2.21).

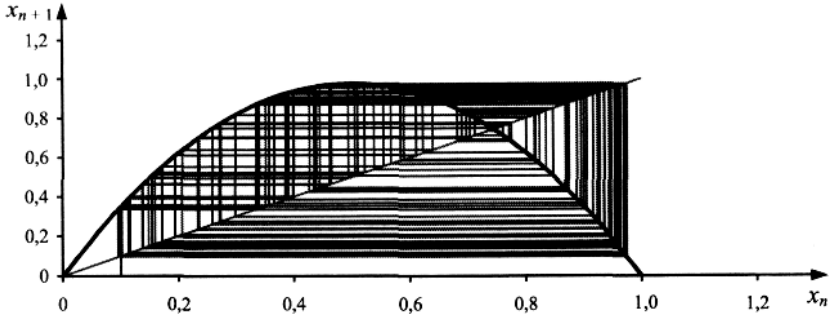


Рис. 2.21. Аперіодичний цикл S^{2^∞}

Хаотична поведінка надзвичайно чутлива до зміни початкових даних. Зміна x_1 на одну мільйонну може істотно вплинути на процес розв'язку. На рис. 2.22 представлено графіки розв'язків рівняння (2.7) при $x_1 = 0,8$ і $x_1 = 0,800\,01$ відповідно ($\lambda = 3,9$). Як видно з графіків, близькі траєкторії зі зростанням n починають дуже розходитися.

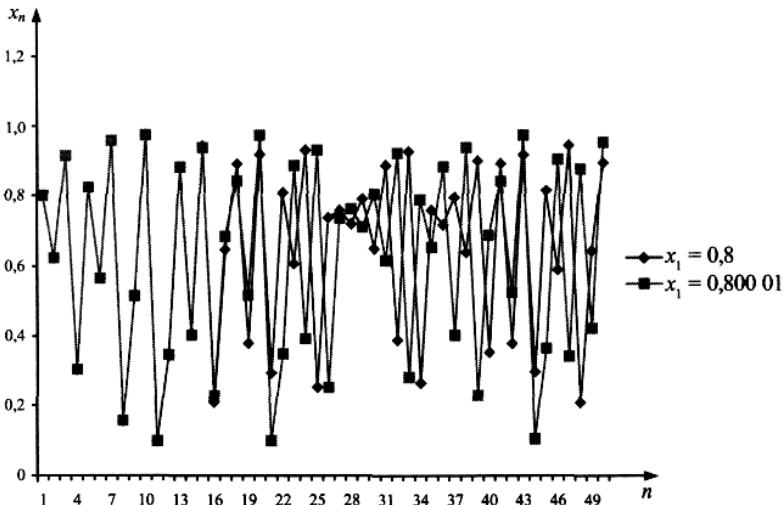


Рис. 2.22. Чутливість системи до початкових даних ($\lambda = 3,9$)

Відповідний хаотичний режим на фазовій площині представлено на рис. 2.23.

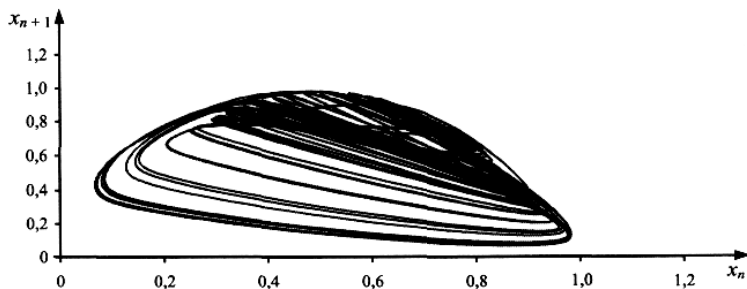


Рис. 2.23. Хаотичний режим на фазовій площині ($\lambda = 3,9$; $x_1 = 0,8$)

Позначимо через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ ті значення параметра λ , при яких відбувалося подвоєння періоду. У 1971 р. американський вчений М. Фейгенбаум відкрив цікаву закономірність: послідовність $\{\lambda_n\}$ утворює зростаючу послідовність, яка швидко сходиться до точки накопичення $\lambda_\infty = 3,5699\dots$ Різниця значень λ , що відповідають двом послідовним біфуркаціям, зменшується щоразу з приблизно однаковим коефіцієнтом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}} = \delta.$$

Знаменник прогресії $\delta = 4,6692\dots$ нині називається *постійною Фейгенбаума*. За точкою накопичення λ_∞ аперіодичні та періодичні атрактори чергуються (рис. 2.24).

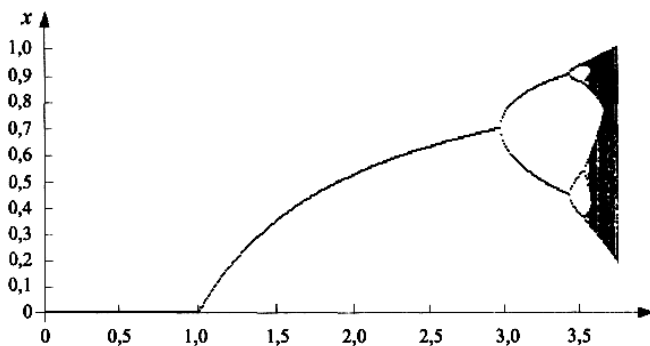


Рис. 2.24. Біфуркаційна діаграма

У 1978 р. М. Фейгенбаум відкрив, що сценарій переходу до хаосу через нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду є універсальним для великого класу динамічних систем. Сценарій Фейгенбаума стали виявляти в системах різної природи – у фізиці, хімії, біології, екології і т. ін. Каскад біфуркацій у соціальній сфері аналізується, наприклад, у працях американського дослідника Т. Янга.

Незалежно від конкретного виду системи та її складності теорія універсальності Фейгенбаума дає кількісні передбачення. Константа δ і ряд інших констант виступають як універсальні константи, такі ж, як π або e . Отже, ця теорія встановила, що великий клас нелінійних явищ демонструє не тільки однакову якісну поведінку, а й універсальні кількісні закономірності.

Пізніше було виявлено ще кілька універсальних сценаріїв переходу до хаосу. Роботи останніх років дозволяють припустити, що в природі, як правило, реалізовується всього кілька універсальних сценаріїв. Це величезний крок до розуміння внутрішньої єдності нелінійних явищ.

3.1.3. Використання теорії різницевих рівнянь для моделювання процесу мобілізації

У цьому пункті розпливчасті та не завжди формалізовані поняття системного аналізу будуть замінятися значно точнішими і більш строгими математичними термінами.

Моделі, які аналізуються, розроблені в рамках детерміністського підходу, тобто вважається, що соціальні явища можна розглядати як процес, що складається зі структурованої, логічно упорядкованої серії подій, дій, операцій. Мета моделювання полягає у визначенні структури соціальних процесів і породжуваних ними соціальних змін.

Математика забезпечує дослідника інструментарієм, який дозволяє вивчати динамічні поведінки систем. Але зрозуміти структуру динамічного процесу, задати закон взаємозв'язку в часі між змінними моделі дослідник повинен у процесі постановки задачі, розробляючи когнітивну карту системи, яка увібрала в себе в концентрованому вигляді гіпотетичні уявлення про основні причинно-наслідкові зв'язки.

У теорії різницевих рівнянь передбачається, що змінні досліджуваного процесу визначені в дискретні моменти часу $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$. Інтервал часу $t_{i+1} - t_i = \Delta t$, як правило, є постійним для кожного t_i ($i = 1, \dots, n, \dots$).

Доцільність такого розгляду визначається початковими даними про соціальний процес, який часто вимірюються в дискретні моменти часу (офіційна статистика, періодичні опитування, переписи тощо). Інтер-

вал часу може дорівнювати п'ятирічці, року, кварталу, місяцю, тижню і т. д.

Якщо інтервал часу стає нескінченно малим ($\Delta t \rightarrow 0$), тоді процес розглядається як безперервний і вивчається за допомогою теорії диференціальних рівнянь.

Модель мобілізації. Під терміном «політична» або «соціальна мобілізація» розуміється залучення людей до партії або числа її прихильників, навертання в якусь віру, участь у певному русі (боротьба за мир, екологію, здоров'я і т. ін.). Поточний рівень мобілізації тісно зв'язаний з минулим рівнем, а майбутня мобілізація залежить від нинішніх успіхів пропагандистської компанії. Застосовуючи найпростішу динамічну модель, спробуємо відобразити логіку змін рівня мобілізації між двома сусідніми моментами часу.

Позначимо через M_t частку мобілізованого населення в момент t , тоді частка немобілізованого населення дорівнює $1 - M_t$. Нехай ΔM_t позначає зміну рівня мобілізації за одиницю часу (рік, місяць і т. д.):

$$\Delta M_t = M_{t+1} - M_t; \quad \Delta t = 1.$$

За час від t до $t+1$ рівень мобілізації може змінитися через дві причини: частину населення вдалося додатково загітувати – $g \cdot (1 - M_t)$, де g – коефіцієнт агітованості, константа, яка не залежить від часу; частина населення, що вибуває з числа членів, учасників, прихильників, дорівнює $f \cdot M_t$, де f – постійний коефіцієнт вибуття ($g \geq 0, f \geq 0$).

Параметри g і f виражають пропорції, в яких відповідні частини населення змінюють свою поведінку на розглянутому відрізку часу.

Тоді рівняння процесу мобілізації можна записати в такий спосіб:

$$M_{t+1} - M_t = g \cdot (1 - M_t) - f \cdot M_t. \quad (2.10)$$

Рівняння (2.10) може бути перетворене так:

$$M_{t+1} = g + (1 - f - g)M_t, \quad (2.11)$$

тобто зведено до вигляду

$$M_{t+1} = a_0 + a_1 M_t, \quad (2.12)$$

який є стандартною формою лінійного різницевого рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами.

Розв'язком рівняння (2.12) називається така функція $M(t)$, за якої

послідовність M_t задовольняє рівнянню (2.12) для заданої області значень t .

Рівняння (2.12) є найпростішим і легко може бути розв'язано алгебраїчними методами.

У загальному випадку розв'язок рівняння (2.12) має такий вигляд:

$$M_t = \frac{a_0(1 - a_1^t)}{1 - a_1} + a_1 \cdot M_0 \text{ для } a_1 \neq 1, \quad (2.13)$$

$$M_t = t \cdot a_0 + M_0, \text{ для } a_1 = 1.$$

Отже, розв'язок рівняння (2.12) однозначно визначається початковим значенням M_0 .

Рівновага і стійкість. Одна з властивих людині якостей – прагнення до стабільності, що формалізується в теорії динамічних систем за допомогою поняття рівноваги. Рівновага – це стан системи, в якому параметри, що цікавлять дослідника, залишаються незмінними: $M_{t+1} = M_t$, причому це не означає, що життя в системі взагалі завмирає. У рамках моделі мобілізації припущення про сталість M_t не означає відсутності змін серед, приміром, прихильників якоїсь партії (частина їде, частина вмирає, ще хтось переходить до іншої партії), але загальне співвідношення залишається приблизно постійним.

Для визначення точки рівноваги системи M^* підставимо умову $M_{t+1} = M_t$ у рівняння (2.10) і одержимо

$$g(1 - M^*) - f \cdot M^* = 0. \quad (2.14)$$

Отже,

$$M^* = \frac{g}{f + g}.$$

Легко показати, що для рівняння (2.12) стан рівноваги обчислюється в такий спосіб:

$$M^* = \frac{a_0}{1 - a_1}. \quad (2.15)$$

Аналізуючи співвідношення (2.13), розглянемо таблицю 2.1, що характеризує значення коефіцієнта a_1 .

Зі співвідношення (2.13) можна вивести, що існують тільки типи поведінки розв'язку, зображені на рис. 2.25.

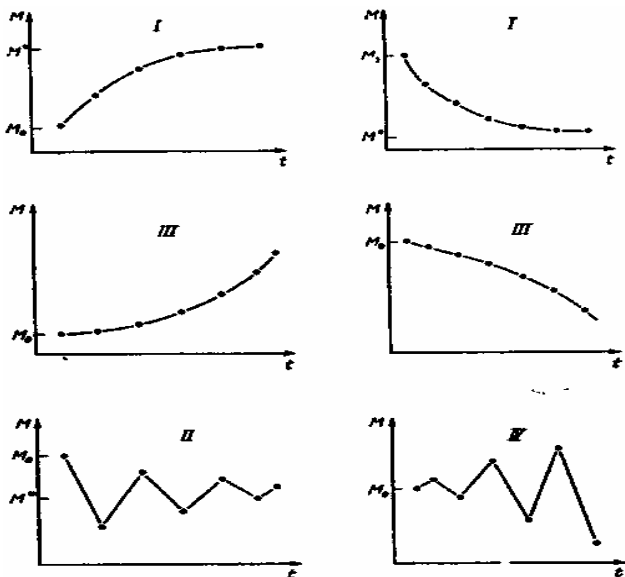


Рис. 2.25. Якісна поведінка розв'язку рівняння (2.12) ($M_0 \neq M^*$)

Таблиця 2.1

	$a_1 > 0$	$a_1 < 0$
$ a_1 < 1$	I	II
$ a_1 > 1$	III	IV

Варіант I описує монотонну збіжність до стану рівноваги.

Варіант II – осцилюючу збіжність.

Варіант III – монотонну розбіжність.

Варіант IV – осцилюючу розбіжність.

За визначенням, варіанти I і II характеризують стійку систему: всі розв'язки сходяться до стану рівноваги незалежно від значень M_0 і a_0 , а варіанти III і IV означають, що система нестійка.

Оцінка параметрів динамічної моделі. Модель мобілізації використовувалася для вивчення динаміки кількості голосів, поданих за демократичну партію США в Лейк Кантрі (штат Індіана) за період 1920–1968 рр.

Для оцінки кількісних значень коефіцієнтів моделі a_0 , a_1 застосовувався метод найменших квадратів. Різницеве рівняння (2.11) розгля-

далося як лінійне регресійне рівняння

$$Y = m_0 + mX,$$

де $Y = M_{t+1}$ – частка виборців у Лейк Кантрі, які голосують за кандидатів від демократичної партії за рік $t+1$, $t+1 = 1924, 1928, \dots, 1968$; $X = M_t$ – частка голосуючих за демократів за рік t , $t = 1920, 1924, \dots, 1964$.

За допомогою методу найменших квадратів отримано наступні значення коефіцієнтів:

$$\hat{m}_0 = 0,14; \quad \hat{m}_1 = 0,62.$$

За формулою (2.15) обчислюємо стан рівноваги:

$$M^* = \frac{\hat{m}_0}{1 - \hat{m}_1} = \frac{0,14}{1 - 0,62} = 0,37.$$

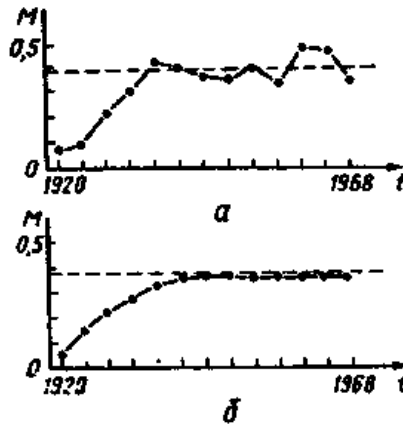


Рис. 2.26. Динаміка голосуючих за демократів у Лейк Кантрі (1920–1968 рр.)

На рис. 2.26(а, б) наведено графіки функції $M(t)$ для голосуючих за демократів на президентських виборах у Лейк Кантрі (1920–1968): а – значення функції M_t спостережень, б – розв’язки різницевого рівняння (2.10) при $M_0 = M_{1920}$.

Порівняння графіків на рис. 2.26(а) і 2.26(б) показує, що різницеве рівняння (2.10) досить добре описує якісні характеристики процесу

мобілізації. Зрозуміло, що модель (2.10) є надзвичайно спрощеною, а реалістичні моделі вимагають урахування великої кількості факторів та нелінійних співвідношень, однак для розуміння поведінки систем іноді достатньо вивчити прості варіанти моделі.

3.1.4. Основи теорії диференційних рівнянь

Диференційними рівняннями називаються рівняння, в яких невідомими є функції, причому в рівняння входять не тільки самі функції, а й їхні похідні.

Запишемо різнищеві рівняння, розглянуті в попередньому пункті, в такому вигляді:

$$\frac{\Delta M_t}{\Delta t} = \frac{M_{t+\Delta t} - M_t}{\Delta t} = f(M_t, t), \quad (2.16)$$

де Δt дорівнює 1. Рівняння (2.16) зв'язує стан динамічної системи у двох точках: t і $(t + \Delta t)$.

Перейдемо в лівій частині рівняння (2.16) до границі при $\Delta t \rightarrow 0$. Одержуємо рівняння

$$dM/dt = f(M, t). \quad (2.17)$$

Це диференційне рівняння, яке розв'язане відносно похідної.

Ми будемо розглядати тільки функції часу $M(t)$, хоча в загальному випадку це необов'язково. Зауважимо, що диференційне рівняння, на відміну від різнищевого, описує динаміку поведінки системи в одній точці t . Рівняння (2.17) функціонально зв'язує швидкості зміни (похідні за t) величин, які характеризують поведінку системи, із самими величинами $M(t)$.

Не знаходячи розв'язок аналітично, у вигляді формули, можна скласти уявлення про загальну картину цих розв'язків на основі геометричного змісту рівняння (2.17). Нагадаємо геометричний зміст похідної dM/dt . У площині (M, t) для кривої $M = M(t)$ величини dM/dt дорівнює тангенсові кута нахилу дотичної до кривої.

Отже, знаючи залежність dM/dt від змінних M, t , виражену в рівнянні (2.17), можна знайти напрямок дотичної до кривої, що є графіком розв'язку (2.17). Графіки розв'язків диференційного рівняння називаються інтегральною лінією цього рівняння.

Напрямок дотичної можна показати на рисунку, провівши через якусь точку (M, t) маленький відрізок прямої під кутом ϕ так, що $\operatorname{tg} \phi = f(M, t)$. Якщо на рисунку збільшити кількість точок, у яких про-

ведено напрямок дотичної, то, як видно з рис. 2.27, утвориться множина кривих, що є розв'язками диференційного рівняння (2.17). Рівняння (2.17) має нескінченну множину розв'язків, і через кожну точку (M_0, t_0) площини проходить один розв'язок. Отже, щоб отримати конкретний розв'язок рівняння, треба задати початкову умову (M_0, t_0) .

Розв'язком диференційного рівняння називається функція, яка, будучи підставлена в це рівняння, обертає його в тотожність.

Приклад 1. Розглянемо рівняння

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0. \quad (2.18)$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на dx , отримаємо

$$x \cdot dy + y \cdot dx = 0. \quad (2.19)$$

Ліва частина рівняння (2.19) є диференціалом добутку змінних $d(x \cdot y)$, отже, рівняння (2.19) можна записати у такому вигляді:

$$d(xy) = 0.$$

Звідси $x \cdot y = C$, де C – довільна константа. Отже, розв'язком рівняння (2.19) є сім'я гіпербол $y = C/x$, зображених на рис. 2.28.

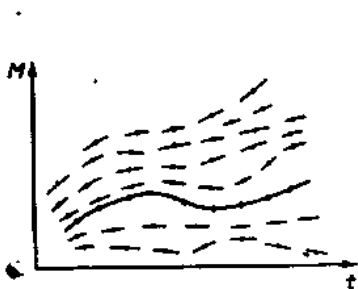


Рис. 2.27. Геометрична інтерпретація розв'язків диференційного рівняння

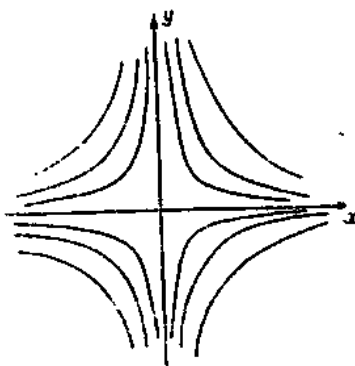


Рис. 2.28. Розв'язок рівняння (2.18)

Для виокремлення однієї з кривих цієї сім'ї необхідно задати початкове значення (y_0, x_0) . Нехай $y_0 = 2$; $x_0 = 3$, тоді $C = 6$ і рівняння

шуваної кривої має вигляд $y = 6/x$.

Приклад 2. Найпростішим диференціальним рівнянням є рівняння

$$dy/dx = f(x). \quad (2.20)$$

Як відомо з курсу математичного аналізу, загальний розв'язок цього рівняння можна записати так:

$$y = \int f(x) dx + C, \quad (2.21)$$

де C – довільна константа.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$y' = \cos x. \quad (2.22)$$

Очевидно, що загальний розв'язок цього рівняння – функція $y = \sin x + C$, де C – довільна постійна.

Приклади моделей. Вивчаючи питання наукометрії, І. В. Налімов сформулював дві моделі розвитку науки. У найпростішій моделі передбачається, що швидкість зростання кількості публікацій пропорційна їхній досягнутій кількості:

$$dy/dt = ky, \quad (2.23)$$

де y – кількість публікацій;

k – константа.

Розв'язком рівняння є функції типу e^t , тобто зі збільшенням часу t кількість публікацій зростає експоненційно.

Оскільки при $t \rightarrow \infty$ функція $y(t) = e^t$ набуває нескінченно великих значень, то модель (2.23) може використовуватися тільки на обмеженому часовому інтервалі. Зрозуміло, що при певному $t = t^*$ механізм зростання кількості публікацій має змінитися. Для будь-якого наукового напрямку настає етап насичення (гальмування). Розглянемо рівняння (2.24):

$$dy/dt = ky(b - y), \quad (2.24)$$

де k і b – константи.

Коли y збільшується і стає порівнянним за величиною з b , тоді $(b - y) \rightarrow 0$ і, отже, $dy/dt \rightarrow 0$, тобто ріст y припиняється.

Рівняння типу (2.24) називаються логістичними, тому що їхнім розв'язком є логістична крива, яка має S-подібну форму. Відзначимо, що логістичне рівняння є нелінійним, оскільки його права частина містить y^2 .

Аналогічні динамічні моделі застосовуються в демографії та біології. Одна з перших моделей динаміки росту населення (популяції) належить Мальтусу:

$$dN/dt = \mu \cdot N, \quad (2.25)$$

де N – чисельність популяції;

μ – різниця між коефіцієнтами народжуваності та смертності.

Розв'язком рівняння (2.25) є експонента, і якщо $\mu > 0$, тоді при $t \rightarrow \infty$ чисельність популяції необмежено зростає. Модель (2.25) не враховує обмеженості природних ресурсів, тому в 1838 р. Ферхюльст запропонував логістичну модель, яка достатньо добре описує динаміку популяцій:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\mu N}{K} (k - N), \quad (2.26)$$

де k – гранична чисельність, якої може досягти популяція (ємність середовища).

У наведених прикладах динамічна модель описується одним диференціальним рівнянням. Значно більш реалістичні моделі можна одержати, якщо розглядати сукупність рівнянь.

Системи диференціальних рівнянь. Системою диференціальних рівнянь називається сукупність рівнянь, яка містить кілька невідомих функцій та їхні похідні.

У цьому навчальному посібнику будуть розглядатися системи диференціальних рівнянь, що складаються з декількох рівнянь, в які входять невідомі функції, при цьому всі невідомі функції є функціями однієї незалежної змінної t .

Розв'язком системи диференціальних рівнянь називається сукупність функцій $y_i(t)$, які при підстановці в рівняння обертають їх у тотожності.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь такого вигляду:

$$\begin{aligned} dx/dt &= P(x, y); \\ dy/dt &= Q(x, y). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Зауважимо, що в правих частинах рівнянь змінна t присутня в неявному вигляді. Такі системи називаються автономними динамічними системами другого порядку. Основна геометрична інтерпретація системи (2.27) пов'язана з розглядом площини (x, y) , що називається фазовою площиною.

Відзначимо, що ця інтерпретація істотно відрізняється від геометричної інтерпретації, описаної вище; її можна назвати кінематичною, тому що в цій інтерпретації кожному розв'язку ставиться у відповідність рух точки по кривій, а не крива в просторі.

Системи типу (2.27) використовуються для опису еволюційних процесів. Точка фазового простору визначає стан системи. Прикладений до цієї точки вектор з координатами dx/dt , dy/dt задає швидкість зміни стану. Точка, де цей вектор перетвориться в нуль ($dx/dt = dy/dt = 0$), називається станом рівноваги, або особливою точкою системи (2.27).

Розв'язок системи (2.27) будемо зображувати параметричними кривими на фазовій площині (X, Y) : $X = \phi(t)$, $Y = \psi(t)$.

Порівняємо геометричну інтерпретацію системи (2.27) у просторі X, Y, t з інтерпретацією на фазовій площині.

а) У кожному траєкторію фазової площини проектується сукупність інтегральних кривих у просторі X, Y, t . Ці криві виходять одна з одної, змінюючи t на $t - C$ (рис. 2.29).

б) Якщо точка (a, b) є станом рівноваги системи (2.22) $P(a, b) = 0$, $Q(a, b) = 0$, то інтегральна крива є прямою, паралельною осі t . Ця пряма проектується на площину (x, y) в єдину точку (a, b) .

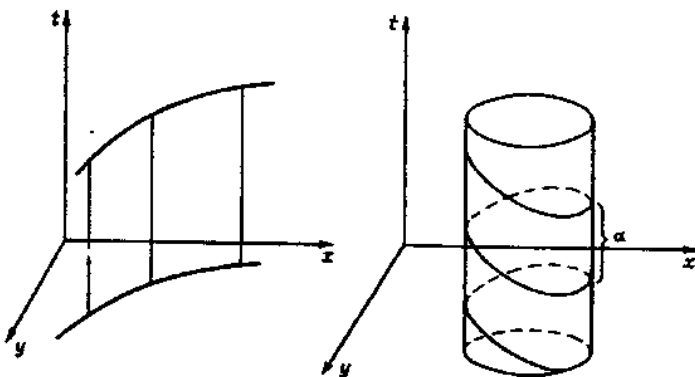


Рис. 2.29. Поведінка розв'язків у просторі x, y, t і на фазовій площині

в) Якщо система має періодичний розв'язок з періодом a , тоді в просторі x, y, t відповідна інтегральна крива є спіраллю з кроком a . Ця спіраль проектується на фазову площину в замкнуту криву (рис. 2.29).

При проекції спіралі на площину (x, t) або (y, t) одержимо синусоїдальну криву, що показує зміну змінної $X(t)$ в часі.

Системи диференціальних рівнянь часто застосовують для опису роботи технічних пристроїв (механічних, електричних і т. ін.). Оскільки система диференціальних рівнянь має нескінченну множину розв'язків (конкретний розв'язок визначається початковими умовами), то й технічні пристрої (машини, механізми) можуть мати нескінченну множину режимів. На практиці ці пристрої працюють у цілком визначених режимах, що може пояснюватися вибором конкретних початкових умов і тим, що пристрій сам стабілізує свою роботу.

Розглянемо хрестоматійний приклад настінного годинника з маятником. Якщо маятник відхилити від вертикального положення досить сильно, годинник буде працювати з визначеною амплітудою коливань дуже довго. Якщо ж відхилити недостатньо сильно, то після невеликої кількості коливань маятник зупиниться. Отже, в цій динамічній системі існують два стаціонарних розв'язки: періодичний розв'язок, який відповідає нормальному ходу годинника, і стан рівноваги – коли швидкість маятника дорівнює нулю. Будь-який інший з нескінченної множини розв'язків швидко наближається до одного з двох стаціонарних розв'язків, кожен з яких є стійким – у тому розумінні, що розв'язок не надто відхиляється від стаціонарного (в початковий момент) і наближається до нього.

В околі особливих точок фазові траєкторії можуть бути шести типів, що схематично показано на рис. 2.30 (стрілки на фазовій траєкторії вказують напрямок зміни параметра t).

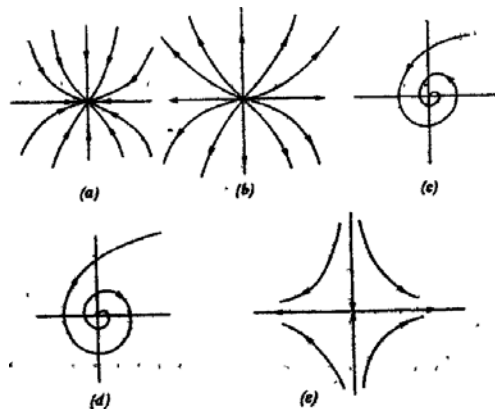


Рис. 2.30. Фазові траєкторії в околі особливої точки:

- a)* стійкий вузол; *b)* нестійкий вузол; *c)* стійкий фокус;
d) нестійкий фокус; *e)* сідло

На рис. 2.30 особлива точка умовно розміщена на початку координат. На рис. 2.30(е) траєкторії, яким належить особлива точка, називаються сепаратрисами.

Класифікацію типів поведінки фазових кривих в околі особливої точки здійснив великий французький математик і філософ Анрі Пуанкаре (1854–1912), який увів також поняття граничного циклу, що відіграє найважливішу роль у різних застосуваннях теорії диференціальних рівнянь.

Граничним циклом диференційного рівняння називається ізольований періодичний розв'язок цього рівняння (рис. 2.31).



Рис. 2.31. Граничний цикл

Для якісного дослідження поведінки динамічної системи достатньо визначити стан рівноваги, наявність граничних циклів, поведінку сепаратрис.

З погляду якісного дослідження знання точної форми траєкторій нас не цікавить.

На сьогодні якісне вивчення моделей еволюційних процесів стало доступно широкому колу користувачів завдяки наявності та стрімкому вдосконаленню відповідного програмного забезпечення (пакети прикладних програм DYSMAP, DYSMOD, OYANA, STELLA, Professional DYNAMO та ін. (див. розділ 4 цього посібника).

3.2. Нелінійні моделі складних систем з хаотичною динамікою (стислий огляд)

Хаотичними називаються нелінійні системи рівнянь, що мають нерегулярні атрактори. Розглянемо приклади як класичних, так і менш відомих хаотичних систем. Наявність хаосу є невід'ємною частиною більшості нелінійних динамічних систем (НДС), які описують досить складні процеси та явища. Хаотичні системи (ХС) характеризуються підвищеною чутливістю до малих збурень системних параметрів і початкових умов, унаслідок чого протягом тривалого часу поведінка таких систем вважалася непередбачуваною і некерованою. Існувала

думка, що досягти бажаної поведінки системи можна тільки приборкавши в ній хаос, хай навіть великими і витратними змінами в самій системі, які змінять її динаміку в цілому. Поставлена задача зводилась до вибору керуючих впливів – або в розімкнутій формі (програмне управління), або у вигляді зворотного зв'язку за станом чи виходом – з метою приведення розв'язку системи до заданого періодичного вигляду або з метою синхронізації розв'язку системи з розв'язками якоїсь іншої системи, яка має потрібні регуляторні властивості. Іншими словами, вирішувалася задача стабілізації заданої або бажаної траєкторії в системі з хаотичною поведінкою. Однак в останні роки стала зрозумілою особлива роль хаосу в самоорганізації різних процесів та явищ. Було усвідомлено, що хаос не тільки не заважає, а швидше є неодмінною умовою працездатності складних систем, таких наприклад, як людський мозок. Тільки завдяки наявності хаотичного атрактора, що містить, як правило, нескінченну кількість нестійких періодичних траєкторій (циклів), можна домогтися якісної зміни динаміки системи (переходу з околу одного циклу в окіл іншого) малими збуреннями системних параметрів. У зв'язку з цим у проблемі управління хаосом природним чином постала задача стабілізації не апіорі заданих чи бажаних траєкторій ХДС, а саме тих нестійких періодичних траєкторій, нескінченна кількість яких уплетена в павутину хаотичного (нерегулярного) атрактора. Причому, хоч якась інформація про положення цих траєкторій у фазовому просторі практично відсутня.

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_1 / dt = \alpha_1 X_1 + \gamma_{12} X_1 X_2 + ... + \gamma_{1n} X_1 X_n + \beta_1 X_1^2, \\ dX_2 / dt = \alpha_2 X_2 + \gamma_{21} X_2 X_1 + ... + \gamma_{2n} X_2 X_n + \beta_2 X_2^2, \\ \\ dX_n / dt = \alpha_n X_n + \gamma_{n1} X_n X_1 + ... + \gamma_{n(n-1)} X_n X_{n-1} + \beta_n X_n^2. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

У системі (2.28) можна виділити різні за характером поведінки в часі розв'язки (моди) X_i . Найбільший внесок у розв'язок робитимуть лінійні члени з коефіцієнтами α_i . Частину цих змінних з достатньо великими від'ємними за величиною α_i визначатимуть затухаючі моди. Тому всі підсистеми, визначені диференційними рівняннями в складній (багатовимірній) системі, наведеній вище, можна розділити на дві групи: $i = 1, 2, \dots, m$ – стійкі (згасаючі) моди; $i = m + 1, m + 2, \dots, n$ – нестійкі (незгасаючі) моди.

Очевидно, що при тривалому спостереженні за системою модами $i = 1, 2, \dots, m$ можна знехтувати і зберегти лише $i = m + 1, m + 2, \dots, n$. Тоді можна говорити про підпорядкування мод з індексами $i = 1, 2, \dots, m$ модам з індексами $i = m + 1, m + 2, \dots, n$. Отже, змінні X_1, \dots, X_m – «швидкі» змінні, а X_{m+1}, \dots, X_n – «повільні» змінні. У цьому випадку параметри $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$ можна вважати управляючими параметрами – параметрами порядку. Самоорганізація в системі відбуватиметься саме при зміні цих параметрів порядку. Структури самоорганізації виникатимуть завдяки взаємодії мод (сильних мод). Найсильніші моди при взаємодії можуть пригнічувати слабкі моди; створюється своєрідна конкуренція мод в системі, що розвивається, а в синергетичній моделі системи, що розвивається, процес самоорганізації розглядається як конкуренція мод. Для дослідження процесів самоорганізації, що виникають в системі (2.28), застосовують принципи підпорядкування.

Отже, для дослідження соціальних, економічних і екологічних процесів та систем і для управління ними важливо вміти виділяти невелику кількість параметрів, які визначають їхню динаміку, і виявляти взаємозв'язок між ними, тобто потрібний системний синтез.

Огляд нелінійних моделей складних процесів:

1. Рівняння Ферхюльста: $\dot{X} = \alpha X \frac{(X_0)}{X_0}$, X_0, X – максимально (гранично) можливе і поточне значення досліджуваної величини, причому X_0 не залежить від часу, тобто X_0 – максимальний ресурс.

2. Рівняння (модель) Лотки-Вольтерра:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_1(\alpha_1 - \gamma_1 X_2); \\ \dot{X}_2 = -X_2(\alpha_2 - \gamma_2 X_1). \end{cases}$$

3. Рівняння із запізнюванням (модель Хатчинсона):

$$x = x(t)(1 - x(t - \tau)).$$

4. Дискретний аналог рівняння Ферхюльста:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n).$$

5. Деякі модифікації моделі Ферхюльста:

$$x_{n+1} = \alpha x_n \cdot \exp(-x_n) - \text{модель Ріккера};$$

$$x_{n+1} = \alpha x_n \cdot (1 + \gamma x_n)^{-\beta} - \text{модель Хассела}.$$

6. Просторова модель:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = d_i x_i \left(1 - \frac{x_i}{x_i^*} \right) + D_i \nabla_r^2 x_i (t/r); r = (r_1, r_2, r_3).$$

7. Мультилогістичне рівняння (облік умов конкуренції):

$$\dot{x}_{ii} = x_{ii} \left[d_i - \beta_i x_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \gamma_{ij} x_{ij} \right] + D_i \nabla_r^2 x_{ii},$$

де $x_{ii} = x_i(r, t)$, r – вектор: $r = (r_1, r_2, r_3)$; $i = \overline{1, n}$.

8. Мультиплікативно-адитивна стохастична модель (МАСМ) нелінійної динаміки – узагальнене логістичне рівняння (УЛР):

$$\dot{x}_{ii} = \xi_{ii} x_{ii} \left[d_i - \beta_i x_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \gamma_{ij} x_{ij} \right] + D_i \nabla_r^2 x_{ii} + \eta_{ii}, i = \overline{1, n}.$$

9. МАСМ з управлінням:

$$x_{ii} = \xi_{ii} x_{ii} \left[v_i' - v_i'' x_{ii} - \sum_j v_{ij} x_{ij} \right] + D_i \nabla_r^2 x_{ii} + \eta_i + U_{ii},$$

де $\{v\}$ – множина контрольованих параметрів;

U_{ii}, ξ – управляючі змінні;

$v \in V, u \in U$.

10. Узагальнене логістичне відображення Сергеевої Л. Н.:

$$x_{t+1} = \lambda \cdot x_t^\alpha (1 - x_t^\beta)^\gamma, \quad x_t \in [0, 1].$$

Для нестационарної нелінійної моделі на основі МАСМ потрібно врахувати залежність: $v_{ij} = v_{ij}(t)$, $v' v'' = v''(t)$.

11. Модель конкуренції двох фірм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(\alpha_1 - \beta_1 x_1 - \gamma_1 x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2(\alpha_2 - \beta_2 x_2 - \gamma_2 x_1) \end{cases}$$

У цій моделі шість параметрів $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$. Залежно від значень цих управляючих параметрів динаміка поведінки системи може бути різною. Для аналізу моделі важливо зменшити кількість параметрів, тобто знайти канонічну форму її опису.

12. Модель Холлінга–Теннера. Припустимо в моделі «хижак–жертва» (модель Лотки–Вольтерра), що для підтримки життя одного хижака потрібно J жертв. Це припущення дуже резонансне.

Наявність хижаків приводить до появи в рівнянні складової вигляду $\omega x_1 x_2 / (D + x_1)$. Ця складова враховує зменшення жертв у зв'язку з полюванням хижаків:

$$\dot{x}_1 = rx_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \frac{\omega x_1 x_2}{D + x_1}, \quad \dot{x}_2 = sx_2 (1 - Jx_2 / x_1).$$

13. Система рівнянь Лоренца. Система трьох нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, названа системою рівнянь Лоренца –

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = x(r - z) - y, \quad \dot{z} = xy - bz$$

– є історично першою динамічною системою, в якій було показано існування нерегулярного атрактора (атрактора Лоренца з $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $24.06 < z < 28$).

14. Системи рівнянь Ресслера. Ресслер запропонував ряд нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь для моделювання деяких гіпотетичних хімічних реакцій, що мають хаотичну поведінку. Найвідоміша з яких має вигляд:

$$\dot{x} = -y - x, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b + z(x - \mu).$$

15. Система Чуа. Система Чуа моделює якесь електричне коло, запропоноване Л. Чуа для генерації хаотичних коливань. Поведінка цього електричного кола й однойменної системи звичайних диференціальних рівнянь широко вивчалась як у багатьох фізичних дослідах, так і математичними методами, включаючи чисельні експерименти і аналітичні розрахунки.

Зауваження. Моделі соціального та еколого-економічного управління, що враховують вплив стохастичних дій, повинні відображати ступінь, з яким ці екзогенні сили можуть вплинути на кінцеві результати моделювання. Функціонування і розвиток складної системи в умовах нестабільного зовнішнього середовища і конкуренції залежить від причин, прогнозувати які з абсолютною точністю неможливо. Такі причини звичайно описуються як флуктуючі (стохастичні) дії (шуми). Отже, узагальнену динамічну нелінійну модель можна навести, наприклад, у вигляді мультиплікативно-адитивної стохастичної сис-

теми рівнянь з розподіленими змінними і з хаотичною поведінкою, тобто:

$$\dot{x}_i = \left[\xi_i(t) x_i \left(1 - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j \right) + \sum_{l=1}^3 d_{il} \frac{\partial^2 x_i}{\partial r_l^2} + w_i \right] + u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.29)$$

де $x_i = x_i(r, t)$ – координати вектора стану системи $i = 1, 2, \dots, n$;

$r = (r_1, r_2, r_3)$ – вектор просторового розподілу;

$\xi_i(t)$ і $w_i(t)$ – стохастичні складові моделі із заданими характеристиками ймовірності, причому $\xi_i(t)$ може відігравати роль «малої» мультиплікативної управляючої дії для контролю хаотичної поведінки системи;

$a_{ij}(t)$ – екзогенні змінні (параметри), які визначають нестационарний вплив зовнішнього середовища на дану систему;

d_{il} – коефіцієнти дифузії;

u_i – зовнішні управляючі впливи, причому $u_i \in U_i$ – область припустимих управлінь.

Зокрема, дискретну модель еволюції системи, що складається з багатьох взаємодіючих підсистем (наприклад, фірм, підприємств), можна навести як такий ітераційний процес:

$$x_i(k+1) = \left[\xi_i(k) x_i(k) \left(1 - \sum_{j=1}^n a_{ij}(k) x_j(k) \right) + \sum_{l=1}^3 d_{il} \frac{\partial^2 x_i(k)}{\partial r_l^2} + w_i(k) \right] + u_i(k),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отже, запропоновані різні нелінійні моделі аналізу динаміки складних процесів, а також нелінійна стохастична мультиплікативно-адитивна модель системи з хаотичною поведінкою можуть бути використані для аналізу процесів у соціально-економічних системах.

ГЛАВА 4. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ СИСТЕМ

4.1. Аналіз нелінійних економічних систем, що розвиваються

4.1.1. Основні дослідження стійкості нелінійних динамічних систем

При моделюванні розвитку великих систем великий дуже цікавим є вивчення їхньої поведінки під дією різних зовнішніх збурень, тобто питання, яке розглядає *теорія стійкості*.

У класичних працях з теорії стійкості, як правило, аналізувалися збурення, що виникають у початковому стані системи або на її зовнішньому вході. Для сучасного підходу характерне вивчення збурень у структурі самої системи. І в тому, і в іншому випадку мета вивчення – визначити, чи буде істотно змінюватися поведінка системи в результаті незапланованих (у тому числі й небажаних) змін у режимі управління. Практична цінність такого дослідження полягає в можливості своєчасного передбачення виникаючої невідповідності в структурі розглянутої системи, визначення моменту потрапляння в критичну область, що служить своєрідним сигналом для розробки і впровадження заходів, які дозволяють впливати на об'єкт, не допускаючи падіння темпу зростання його ефективності. Іншими словами, результат такого дослідження дозволяє прогнозувати момент переходу системи на нові технології, сприяти виникненню нових технологій у рамках старих, впливати на хід науково-технічного прогресу.

Загальна якісна теорія динамічних систем. Нехай поведінка динамічної системи описується сукупністю звичайних диференційних рівнянь:

$$\dot{r}_i = f_i(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k), i = \overline{1, n},$$

де $R = (r_1, \dots, r_n)$ – стан (точка) системи, α_i – параметри системи. Тоді стаціонарний стан знаходиться з рівняння

$$f_i(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0, i = \overline{1, n}. \quad (*)$$

Якщо $r_i = a_i (i = \overline{1, n})$ – особлива точка – розв'язок системи кінцевих рівнянь (*), тоді питання про стійкість отриманого стаціонарного стану вирішується обчисленням коренів характеристичного рівняння

$$P(\lambda) = \det \{ A_{ik} - \lambda \delta_{ik} \} = 0, \quad A_{ik} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial r_k} \right)_{r_s = a_s}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \quad (**)$$

Стаціонарний стан стійкий, якщо $R_e \lambda_i < 0 (i = \overline{1, n})$, де λ_i – корені рівняння (**). Точки, в яких порушуються умови стійкості, називаються *критичними*, або *екстремальними*.

Найбільш розробленою є теорія динамічних систем другого порядку.

У цьому посібнику ми перейдемо від загальних понять до строгих кількісних визначень стійкості за Ляпуновим. Для цього розглянемо основи теорії систем, які описуються двома диференційними рівняннями другого порядку. Така двовимірна система може бути представлена в такому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = f_1(Y_1, Y_2), \\ \frac{dY_2}{dt} = f_2(Y_1, Y_2), \end{cases} \quad (2.30)$$

де $f_1(Y_1, Y_2)$, $f_2(Y_1, Y_2)$ – безперервні функції, які визначені в певній області G – евклідовій площині і мають у цій області безперервні похідні не нижче першого порядку. Змінні (Y_1, Y_2) , змінюючись у часі відповідно до системи рівнянь (2.30), визначають стан системи так, що кожному її стану відповідає визначена пара значень невідомих.

Стосовно до системи двох рівнянь визначення стійкості виглядає так. Стан рівноваги стійкий, якщо для будь-якої заданої області припустимих відхилень від стану рівноваги (область ε) ми можемо вказати область $\delta(\varepsilon)$, яка оточує цей стан рівноваги і має такі властивості, що жодна траєкторія зображуючої точки, яка починається всередині δ , ніколи не досягне границі області ε . І навпаки, стан рівноваги характеризується як нестійкий, якщо може бути вказана така область відхилень від станів рівноваги (область ε), для якої не існує області $\delta(\varepsilon)$, яка оточує стан рівноваги і має такі властивості, що жодна траєкторія, яка починається всередині δ , ніколи не досягне границі ε .

Дослідження властивостей стійкості базується на топологічних методах аналізу систем і уявленні про її фазовий портрет. Тому розглянемо площину з осями координат, на яких відкладено значення змінних u_1, u_2 . Кожна точка K на цій площині з координатами (Y_1, Y_2) відповідає визначеному стану системи. Ця площа називається *фазовою площиною*, або *площиною станів системи*, а точка $K(Y_1, Y_2)$ – *точкою*, що зображує або представляє (зображуючою точкою). Сукупність усіх точок $K(Y_1, Y_2)$ на фазовій площині (Y_1, Y_2) , положення яких відповідає станам системи в процесі зміни відповідно до рівнянь (2.30), називається *фазовою траєкторією*.

Фазова площа, розбита на траєкторії, дає фазовий портрет системи і дозволяє відразу охопити всю сукупність змін змінних (Y_1, Y_2) за будь-яких початкових умов. Методи дослідження стійкості дозволяють, не розв'язуючи систему рівнянь (2.30), а керуючись тільки виглядом рівнянь, побудувати фазовий портрет системи.

Топологічні методи аналізу систем, визначених диференціальними рівняннями, дозволяють одержати нове уявлення про якісний характер розв'язку і визначають ряд кількісних даних. У процесі дослідження стійкості поведінки систем топологічними методами розв'язки диференціальних рівнянь мають вигляд не явних функцій часу, а інтеграль-

них кривих у фазовому просторі. Особливо цікавими для аналізу є умови рівноваги системи в стані спокою, що відповідає особливій точці в просторі станів.

А. Пуанкаре ввів класифікацію особливих точок залежно від характеру інтегральних кривих поблизу цих точок, тобто залежно від виду коренів характеристичного рівняння розглянутої системи (2.30).

Для визначення виду особливих точок за коренями характеристичного рівняння двовимірної системи (2.30) введемо такі позначення:

$$Z_1 = Y_1 - Y_{1(s)}; \quad Z_2 = Y_2 - Y_{2(s)},$$

де $Y_{i(s)}$ – стаціонарні значення Y_i . Розкладемо функції $f_i(Y_1, Y_2)$ в ряд Тейлора в околі їхніх стаціонарних значень:

$$\begin{aligned} f_1(Y_1, Y_2) = f_1(Y_{1(s)}, Y_{2(s)}) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial Y_1} \right)_{Y_1=Y_{1(s)}, Y_2=Y_{2(s)}} \cdot (Y_1 - Y_{1(s)}) + \\ + \left(\frac{\partial f_1}{\partial Y_2} \right)_{Y_1=Y_{1(s)}, Y_2=Y_{2(s)}} + \dots \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} f_2(Y_1, Y_2) = f_2(Y_{1(s)}, Y_{2(s)}) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial Y_1} \right)_{Y_1=Y_{1(s)}, Y_2=Y_{2(s)}} \cdot (Y_1 - Y_{1(s)}) + \\ + \left(\frac{\partial f_2}{\partial Y_2} \right)_{Y_1=Y_{1(s)}, Y_2=Y_{2(s)}} + \dots \end{aligned} \quad (2.32)$$

Оскільки $f_1(Y_{1(s)}, Y_{2(s)}) = 0$; $f_2(Y_{1(s)}, Y_{2(s)}) = 0$, то після спрощення рівнянь (2.31), (2.32) одержимо таку систему:

$$f_1(Y_1, Y_2) = aZ_1 + bZ_2, \quad f_2(Y_1, Y_2) = cZ_1 + dZ_2,$$

де

$$a = \frac{\partial f_1}{\partial Y_1}; \quad b = \frac{\partial f_1}{\partial Y_2}; \quad c = \frac{\partial f_2}{\partial Y_1}; \quad d = \frac{\partial f_2}{\partial Y_2}. \quad (2.33)$$

З урахуванням (2.33) та нових позначень початкову систему (2.30) запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dZ_1}{dt} = aZ_1 + bZ_2, \\ \frac{dZ_2}{dt} = cZ_1 + dZ_2. \end{cases} \quad (2.34)$$

Для дослідження системи (2.30) порівняємо властивості дисипативних і консервативних систем на основі дослідження властивостей оператора:

$$L = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Отже, відомо, що для будь-якої консервативної системи існує гамільтоніан – такий, що ця система перетворюється і набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = f_1(Y_1, Y_2) = \frac{\partial H}{\partial Y_2}, \\ \frac{dY_2}{dt} = f_2(Y_1, Y_2) = -\frac{\partial H}{\partial Y_1}. \end{cases} \quad (2.36)$$

В області лінійних наближень (2.33) маємо

$$\frac{\partial f_1}{\partial Y_1} = \frac{\partial^2 H}{\partial Y_1 \partial Y_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial Y_2},$$

тобто

$$a = -d \text{ або } \text{Sp}(\text{tr})L = 0. \quad (2.37)$$

Отже, для консервативних систем слід, тобто $\text{Sp}(\text{tr})L$, лінійного оператора L дорівнює нулю, що свідчить про симетричність спектра цього оператора, власні частоти при цьому $\omega_1 = -\omega_2$.

Відомо, що для системи (2.34) розв'язок можна знайти так:

$$Z_i = X_i e^{\omega t}. \quad (2.38)$$

Підставляючи (2.38) у (2.34), отримаємо

$$\begin{cases} \omega X_1 e^{\omega t} = aX_1 e^{\omega t} + bX_2 e^{\omega t}, \\ \omega X_2 e^{\omega t} = cX_1 e^{\omega t} + dX_2 e^{\omega t}. \end{cases} \quad (2.39)$$

Скоротивши рівняння (2.39) на $(e^{\omega t})$, маємо

$$\begin{cases} \omega X_1 = aX_1 + \epsilon X_2, \\ \omega X_2 = cX_1 + dX_2. \end{cases} \quad (2.40)$$

Приведемо (2.40) до вигляду

$$(a - \omega)X_1 + \epsilon X_2 = 0, \quad cX_1 + (d - \omega)X_2 = 0. \quad (2.41)$$

Умова існування нетривіального розв'язку (2.41) приводить до наступного характеристичного рівняння для оператора:

$$L = \begin{bmatrix} a & \epsilon \\ c & d \end{bmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a - \omega & \epsilon \\ c & d - \omega \end{vmatrix} = 0 \text{ або } \omega^2 - (a + \epsilon)\omega + a\epsilon - \epsilon c = 0. \quad (2.42)$$

З урахуванням позначень $\mu = Sp(tr)L$ – слід матриці оператора L , Δ – визначник матриці оператора L , характеристичне рівняння має такий вигляд:

$$\omega^2 - \mu\omega + \Delta = 0. \quad (2.43)$$

Для аналізу характеру траєкторій системи на фазовій площині запишемо в загальному вигляді розв'язок (2.34):

$$\begin{cases} Z_1 = ae^{\omega_1 t} + \epsilon e^{\omega_2 t} \\ Z_2 = ce^{\omega_1 t} + de^{\omega_2 t}. \end{cases} \quad (2.44)$$

Застосуємо до першої частини системи (2.34) лінійне перетворення координат:

$$\begin{cases} \xi = \alpha Z_1 + \beta Z_2, \\ \eta = \gamma Z_1 + \delta Z_2. \end{cases} \quad (2.45)$$

Тоді система (2.34) приводиться до такого вигляду:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \omega_1 \xi, \\ \frac{d\eta}{dt} = \omega_2 \eta. \end{cases} \quad (2.46)$$

Розділивши одне канонічне рівняння системи (2.36) на інше, матимемо:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\eta}{\xi}. \quad (2.47)$$

Інтегруючи це рівняння, легко одержати

$$\eta = c_0 |\xi|^{\epsilon_0}, \quad \text{де } \epsilon_0 = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Вважатимемо, що ω_2 – великий корінь характеристичного рівняння.

Якщо ω_2, ω_1 одного знака, то ми маємо справу з інтегральними кривими параболічного типу. Всі інтегральні криві (крім осі η , якій відповідає $c_0 = \infty$) торкаються на початку координат осі ξ – також інтегральної кривої (2.47). З’ясуємо тепер напрямки рухів на фазовій площині. Якщо (ω_1, ω_2) – від’ємні, то, як випливає з рівнянь (2.46), $|\xi|, |\eta|$ зменшуються з часом. Зображуюча точка з часом наближається до початку координат, однак ніколи не досягає його в кінцеву мить, тому що це суперечило б теоремі Коші, яка затверджує, що через кожную точку фазової площини проходить лише одна фазова траєкторія системи (2.46).

Така особлива точка, через яку проходять інтегральні криві подібно до того, як сім’я парабол ($y = c_0 x^{\epsilon_0}$, $\epsilon_0 < 0$) проходить через початок координат, називається *вузол* (рис. 2.32).

Неважко помітити, що стан рівноваги, який відповідає вузлові (при $\omega_1 < 0, \omega_2 < 0$), стійкий за Ляпуновим, оскільки зображуюча точка за всіма інтегральними кривими рухається до початку координат (стійкий вузол – рис. 2.33(а)). Якщо ж $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$, то $|\eta|, |\xi|$ зростають з часом, то зображуюча точка віддаляється від початку координат (нестійкий вузол – рис. 2.33(б)). У загальному вигляді характер поведінки інтегральних кривих навколо стану рівноваги не буде змінюватися, однак дотичні, обумовлені коефіцієнтами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, можуть не співпадати з початком координат. Нижче наведено приклади стійкого і нестійкого вузлів (див. рис. 2.33).

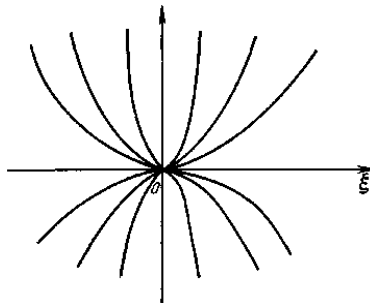


Рис. 2.32. Зображення особливої точки типу вузол на фазовій площині

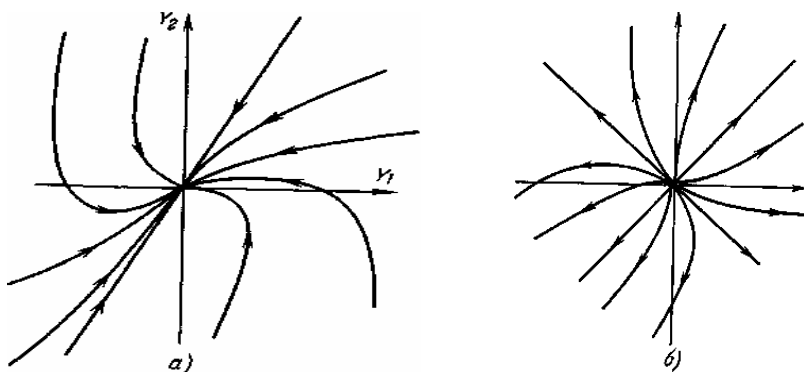


Рис. 2.33. Зображення на фазовій площині особливих точок:
а) стійкий вузол; б) нестійкий вузол

Розглянемо випадок, коли ω_1 і ω_2 – дійсні, але різних знаків. У цьому випадку маємо

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\epsilon_0 \frac{\eta}{\xi}. \quad (2.48)$$

Інтегруючи, одержимо

$$\eta = c_0 |\xi|^{-\epsilon_0}. \quad (2.49)$$

Вираз (2.49) визначає властивості кривих гіперболічного типу, що мають у якості асимптот обидві осі координат.

Розглянута сім'я інтегральних кривих має єдину особливу точку на початку координат, через яку проходять тільки дві інтегральні криві, що є асимптотами. Така особлива точка називається *особливою точкою типу сідло*. Загальний вид сідла наведено на рис. 2.34.

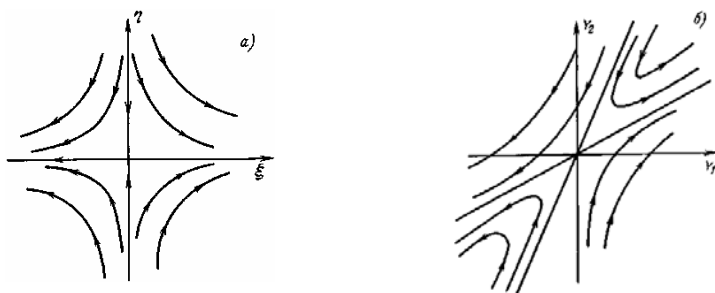


Рис. 2.34. Зображення особливої точки типу сідло:
а) на площині канонічних координат ξ , η ; б) на фазовій площині

Дослідимо поведінку зображуючої точки поблизу стану рівноваги. При $\omega_1 > 0$, $\omega_2 < 0$ ця точка, розміщена на ξ осі, буде віддалятися від початку координат, а розміщена на η осі – необмежено наближатися до початку координат, не досягаючи його в кінцеву мить. Отже, *особлива точка типу сідло завжди нестійка*.

Розглянемо випадок, коли ω_1 , ω_2 – комплексне спряження коренів характеристичного рівняння (2.45), які мають вигляд

$$\omega_1 = \nu_1 + i\nu_2, \quad \omega_2 = \nu_1 - i\nu_2. \quad (2.50)$$

Увівши певне проміжне перетворення, можна звести розгляд до дійсного лінійного однорідного перетворення

$$\xi = u + iv, \quad \eta = u - iv, \quad (2.51)$$

де ν_1 , ν_2 , u , v – дійсні величини. Очевидно, перетворення від (Z_1, Z_2) до (u, v) є дійсним, лінійним, однорідним, з визначником, відмінним від нуля.

Порівняємо (2.45) і (2.51) і одержимо:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt} = (\nu_1 + i\nu_2)(u + iv), \\ \frac{du}{dt} - i \frac{dv}{dt} = (\nu_1 - i\nu_2)(u - iv), \end{cases} \quad (2.52)$$

звідки маємо

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \nu_1 u - \nu_2 v \\ \frac{dv}{dt} = \nu_1 v + \nu_2 u. \end{cases} \quad (2.53)$$

Розділивши перше рівняння на друге, матимемо

$$\frac{dv}{du} = \frac{\nu_1 v + \nu_2 u}{\nu_1 u - \nu_2 v}. \quad (2.54)$$

Введемо полярну систему координат: $u = r \cos \varphi$, $v = r \sin \varphi$. Тоді $du = dr \cos \varphi - \sin \varphi d\varphi$, $dv = dr \sin \varphi + \cos \varphi d\varphi$. Після підстановки отримаємо

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\nu_1}{\nu_2} r, \quad (2.55)$$

звідки

$$r = c_0 e^{\frac{\alpha_1 \varphi}{\beta_1}}. \quad (2.56)$$

Рівняння (2.56) визначає на фазовій площині сім'ю логарифмічних спіралей із загальною асимптотичною точкою на початку координат (рис. 2.35).

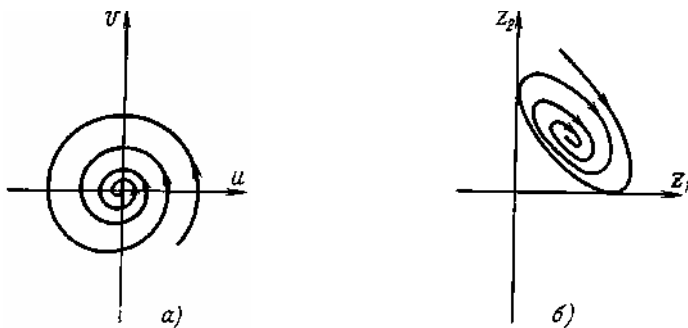


Рис. 2.35. Зображення сім'ї логарифмічних спіралей з особливою точкою типу центр:

а) на фазовій площині v, u ; б) у координатах Z_1, Z_2

Визначимо характер руху точки по фазових траєкторіях. Для цього перетворимо (2.53) до вигляду

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}u + \frac{dv}{dt}v = v_1 u^2 + v_1 v^2, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(u^2 + v^2) = v_1 (u^2 + v^2). \end{cases} \quad (2.57)$$

Отримаємо

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = v_1 \rho, \quad (2.58)$$

де $\rho = u^2 + v^2$.

Нехай $v_1 < 0$ ($v_1 = \text{Re} \omega$), тоді зображуюча точка безупинно наближається до початку координат (не досягаючи його в кінцеву мить). Фазові траєкторії відповідають коливальним, але згасаючим рухам, що наближаються до стану рівноваги. Особлива точка сім'ї інтегральних кривих, які мають вид спіралей, вкладених одна в одну, називається *фокусом*. Тому фокус є стійким.

Зауважимо, що у випадку стійкого фокуса виконується не тільки умова стійкості за Ляпуновим (як, утім, і для стійкого вузла), а й

більш важлива вимога. За будь-яких початкових відхилень за досить тривалий час система наблизиться як завгодно близько до стану рівноваги. Таку стійкість називають *абсолютною*.

При $\nu_1 > 0$ ($\nu_1 = \operatorname{Re} \omega$) маємо *нестійкий фокус*.

Розглянемо випадок, коли ν_1 звертається в нуль ($\nu_1 = 0$). Тоді $\rho = v^2 + u^2 = \text{const}$, тобто фазовими траєкторіями на площині (u, v) будуть концентричні окружності. Якщо перейти до початкових координат, то одержимо

$$bZ_2^2 + (a-d)Z_1Z_2 - cZ_1^2 = \text{const}, \quad (2.59)$$

тобто рівняння (2.59) є *рівнянням еліпса*.

Така ізольована точка, поблизу якої інтегральні криві є замкнутими кривими (наприклад, еліпсами), які «вкладені» одна в одну й оточують особливу точку, називається *центром* (рис. 2.36).

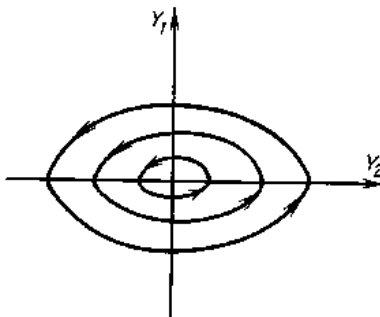


Рис. 2.36. Зображення особливої точки типу центр на фазовій площині (Y_1, Y_2)

Підсумовуючи здійснене дослідження, відзначимо, що залежно від властивостей лінійного оператора Z можливі чотири типи стану рівноваги, які наведено в табл. 2.2. Тепер перетворимо це в строго математичну форму.

Перепишемо характеристичне рівняння (2.43)

$$\omega^2 - \mu\omega + \Delta = 0, \quad \text{де } \mu = SpL,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

У загальному вигляді можна записати вираз для коренів характеристичного рівняння (2.43):

$$\omega_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\Delta}}{2}. \quad (2.60)$$

Таблиця 2.2

Класифікація типу особливих точок залежно від коренів характеристичного рівняння

Корені характеристичного рівняння	Стійка	Нестійка
1. ω_1, ω_2 – дійсні величини: а) $\omega_1, \omega_2 < 0$	вузол	
б) $\omega_1, \omega_2 > 0$		вузол
2. ω_1, ω_2 – дійсні величини а) $\omega_1 > 0, \omega_2 < 0$ б) $\omega_1 < 0, \omega_2 > 0$		сідло
3. ω_1, ω_2 – комплексні величини а) $\operatorname{Re} \omega > 0$ б) $\operatorname{Re} \omega < 0$	фокус	
4. ω_1, ω_2 – чисто уявні величини	центр	центр

Очевидно, що умовою стійкості буде наявність від'ємної дійсної частини в коренях характеристичного рівняння $\{\omega_i\}$. Необхідна і достатня умова цього – виконання нерівностей:

$$\mu < 0, \quad \Delta > 0. \quad (2.61)$$

Запишемо тепер аналітичні вираження для різних типів особливих точок:

$$\text{фокус } (\omega_1, \omega_2 \text{ – комплексні величини}) \quad \mu^2 - 4\Delta < 0; \quad (2.62)$$

$$\text{центр } (\omega_1, \omega_2 \text{ – чисто уявні величини}) \quad \mu = 0, \quad \Delta > 0; \quad (2.63)$$

$$\text{сідло } (\omega_1, \omega_2 \text{ – дійсні величини різних знаків}) \quad \Delta < 0; \quad (2.64)$$

Якщо коефіцієнти лінійного оператора

$$L = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

залежать від якогось параметра, то при зміні цього параметра будуть відповідно змінюватися μ і Δ . При зміні співвідношення між μ і Δ ,

відбувається зміна (деформація) фазового портрета системи.

На рис. 2.37 зображено біфуркаційну (граничну) криву в площині (μ, Δ) . Ця крива описується таким співвідношенням:

$$\frac{\mu^2}{4} = \Delta. \quad (2.65)$$

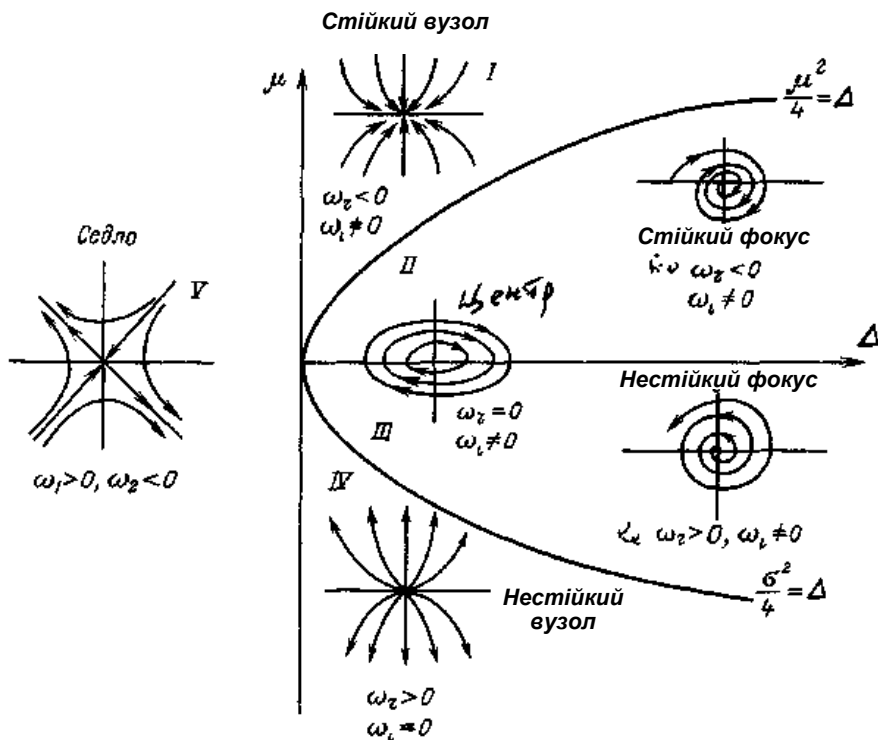


Рис. 2.37. Площина параметрів (μ, Δ)

На рис. 2.37 видно, що в результаті біфуркації:

- особлива точка типу сідло може переходити у вузол (як стійкий, так і нестійкий);
- стійкий вузол може перейти або в сідло, або в стійкий фокус;
- стійкий фокус може через центр переходити в нестійкий фокус і назад.

Випадок рівних коренів $(\mu^2 - 4\Delta = 0)$ відповідає границі між вузлами і фокусами.

Слід зауважити, що коефіцієнти лінійного оператора Z можуть залежати від двох і більше параметрів; у цьому випадку треба будувати площину цих параметрів і на ній діаграму.

Як впливає з проведеного дослідження, зміст стійкості за Ляпуновим полягає в тому, що якщо розв'язок починається на невеликій відстані від початку координат, то він має бути укладений усередині більш широкого «каналу», відзначеного на рис. 2.38 пунктирною лінією.

Визначення *асимптотної стійкості* (за Ляпуновим) відповідає вимозі $Y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, тобто необхідно, щоб система в кінцевому рахунку поверталася до точки рівноваги. Поняття стійкості й асимптотної (асимптотичної) стійкості незалежні, однак обидва вони мають на увазі наявність відомої точки рівноваги з її найближчим околom, що належить до типу центр.

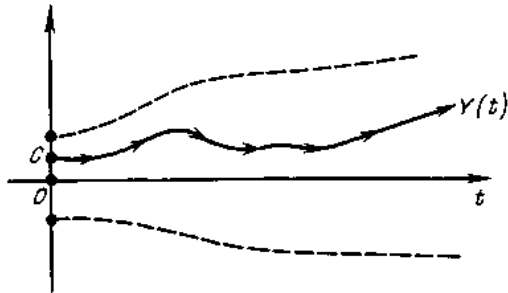


Рис. 2.38. Геометрична інтерпретація стійкості за Ляпуновим

Говорячи про стійку точку рівноваги, необхідно згадати про її навколишню відкриту область, що називається *областю тяжіння*. Така назва пов'язана з властивістю стійкості точки рівноваги, яка діє як магніт, що «втягує» будь-який початковий стан усередину своєї області тяжіння. Ця властивість точки рівноваги проілюстрована на рис. 2.38.

Особливість класичних понять стійкості полягає в тому, що вони стосуються конкретної системи і поведінки її траєкторій в околі точки рівноваги. Сучасний аналіз стійкості систем часто оперує поняттям «структурна стійкість» і вимагає іншого, відмінного від класичного, підходу до аналізу об'єкта. Особливість такого підходу – аналіз сім'ї траєкторій, «ближчих» до стандартної системи.

Концепція структурної стійкості тісно пов'язана з теорією біфуркацій та її сучасним різновидом – *теорією катастроф*. Далі буде наведено приклади якісного аналізу стійкості при дослідженні поведінки техніко-економічних систем (ЕС).

4.1.2. Якісний аналіз економічної системи, що знаходиться під впливом новітніх інформаційних технологій (НІТ)

Для прикладу візьмемо двовимірну макроекономічну структуру, яка добре моделює взаємодію двох суміжних галузей завдяки НІТ (газова промисловість, чорна металургія і т. д.).

Як відомо, рівняння, що описують таку макроекономічну систему, будуть мати такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = \alpha_1 Y_1 + \gamma_{12} Y_1 Y_2 + \beta_1^2 Y_1^2, \\ \frac{dY_2}{dt} = \alpha_2 Y_2 + \gamma_{21} Y_1 Y_2 + \beta_2^2 Y_2^2, \end{cases} \quad (2.66)$$

$$\text{де } \alpha_1 = \frac{1}{c_{11}(1 - a_{12}a_{21})}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{c_{12}(1 - a_{12}a_{21})};$$

$$\beta_1 = \frac{c_{11}(\eta_1 - a_{21}\eta_2) + (F_1 - a_{21}F_2)}{c_{11}(1 - a_{12}a_{21})}; \quad \beta_2 = \frac{c_{12}(\eta_2 - a_{12}\eta_1) + (F_2 - a_{21}F_1)}{c_{12}(1 - a_{12}a_{21})};$$

$$\gamma_{12} = -\frac{a_{21}}{c_{11}(1 - a_{12}a_{21})}; \quad \gamma_{21} = -\frac{a_{12}}{c_{12}(1 - a_{12}a_{21})};$$

$$\eta_1 = \sum_{i=1}^m b_{i1} \frac{X'_{i1}}{X_{i1}}; \quad \eta_2 = \sum_{i=1}^m b_{i2} \frac{X'_{i2}}{X_{i2}}.$$

Будемо вважати, що коефіцієнти γ_{ij} , β_i , α_i ($i=1,2$) мало змінюються в часі, і їх можна прийняти на інтервалі спостереження постійними. Тоді можна виділити праві частини:

$$\begin{cases} f_1(Y_1, Y_2) = \alpha_1 Y_1 + \beta_1^2 Y_1^2 + \gamma_{12} Y_1 Y_2, \\ f_2(Y_1, Y_2) = \alpha_2 Y_2 + \beta_2^2 Y_2^2 + \gamma_{21} Y_1 Y_2. \end{cases} \quad (2.67)$$

Знайдемо стан рівноваги. Прирівнюючи ліві частини рівняння (2.67) до нуля ($Y'_1 = 0$, $Y'_2 = 0$), одержимо

$$\begin{cases} Y_{10} = 0, \\ Y_{20} = -\frac{\alpha_2}{\gamma_{12}}, \end{cases} \quad \begin{cases} Y_{20} = 0, \\ Y_{12} = -\frac{\alpha_2}{\gamma_{21}}. \end{cases}$$

Очевидно, загальна кількість станів рівноваги буде дорівнювати комбінації отриманих станів, тобто їхня загальна кількість дорівнювати 4:

$$1) \begin{cases} Y_{10} = 0, \\ Y_{20} = 0, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} Y_{10} = 0, \\ Y_{20} = -\frac{\alpha_1}{\gamma_{12}}, \end{cases} \quad 3) \begin{cases} Y_{10} = -\frac{\alpha_2}{\gamma_{21}}, \\ Y_{20} = 0, \end{cases} \quad 4) \begin{cases} Y_{10} = \frac{\alpha_2 \gamma_{12} - \alpha_1 \beta_2}{\beta_1 \beta_2 - \gamma_{12} \gamma_{21}}, \\ Y_{20} = \frac{\alpha_1 \gamma_{21} - \beta_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2 - \gamma_{12} \gamma_{21}}. \end{cases}$$

Обчислимо, у загальному виді, матрицю лінійного наближення:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial f_1}{\partial Y_1} \bigg|_{\substack{Y_1=Y_{10} \\ Y_2=Y_{20}}} = \frac{\partial}{\partial Y_1} (\alpha_1 Y_1 + \beta_1 Y_1^2 + \gamma_{12} Y_1 Y_2) \bigg|_{\substack{Y_1=Y_{10} \\ Y_2=Y_{20}}} = \\ &= (\alpha_1 + 2\beta_1 Y_1 + \gamma_{12} Y_2) \bigg|_{\substack{Y_1=Y_{10} \\ Y_2=Y_{20}}} = \alpha_1 + 2\beta_1 Y_{10} + \gamma_{12} Y_{20}; \\ b &= \frac{\partial f_1}{\partial Y_2} \bigg|_{\substack{Y_1=Y_{10} \\ Y_2=Y_{20}}} = \frac{\partial}{\partial Y_2} (\alpha_1 Y_1 + \beta_1 Y_1^2 + \gamma_{12} Y_1 Y_2) = \gamma_{12} Y_{10}; \\ c &= \frac{\partial f_1}{\partial Y_2} \bigg|_{\substack{Y_1=Y_{10} \\ Y_2=Y_{20}}} = \frac{\partial}{\partial Y_2} (\alpha_1 Y_1 + \beta_2 Y_2^2 + \gamma_{21} Y_1 Y_2) = \gamma_{21} Y_{20}; \\ d &= \frac{\partial f_2}{\partial Y_2} \bigg|_{\substack{Y_1=Y_{10} \\ Y_2=Y_{20}}} = \alpha_2 + 2\beta_2 Y_{20} + \gamma_{21} Y_{10}. \end{aligned}$$

Для складання дисперсійного (характеристичного) рівняння маємо:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + 2\beta_1 Y_{10} + \gamma_{12} Y_{20} - \omega & \gamma_{12} Y_{10} \\ \gamma_{21} Y_{20} & \alpha_2 + 2\beta_2 Y_{20} + \gamma_{21} Y_{10} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

звідки дисперсійне (характеристичне) рівняння отримує такий вигляд:

$$\omega^2 - \mu\omega + \Delta = 0, \quad (2.68)$$

$$\text{де } \mu = a + d; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

1. Розглянемо перший з чотирьох станів рівноваги $Y_{10} = 0, Y_{20} = 0$.

У цьому випадку маємо $\mu = \alpha_1 + \alpha_2$; $\Delta = \alpha_1 \alpha_2$;

$$\omega_{1,2} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) \pm \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2}}{2}. \quad (2.69)$$

Оскільки $\alpha_1, \alpha_2 > 0$; $(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1 \alpha_2 > 0$, то ми отримаємо корені дійсні, одного знака, і отже, стан ($Y_{10} = 0$, $Y_{20} = 0$) є нестійким вузлом. Фізично це означає, що система не може знаходитися при нульовому випуску, і за найменших змін параметрів обов'язково спостерігається інтенсивне зростання випуску як у першій, так і в другій макросистемах.

2. Розглянемо другий стан рівноваги: $Y_{10} = 0$; $Y_{20} = -\frac{\alpha_1}{\gamma_{12}}$. Для цього

випадку маємо $\mu = \alpha_2 - 2\beta_2 \frac{\alpha_1}{\gamma_{12}}$; $\Delta = 0$, тому дисперсійне рівняння набуде такого вигляду:

$$\omega^2 - \left(\alpha_2 - 2\beta_2 \frac{\alpha_1}{\gamma_{12}} \right) \omega = 0, \quad (2.70)$$

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = \alpha_2 - 2\beta_2 \frac{\alpha_1}{\gamma_{12}}$$

Тут маємо критичну точку $\alpha_2 = 2\beta_2 \frac{\alpha_1}{\gamma_{12}}$, в якій корені стають нульовими. При $\alpha_2 < 2\beta_2 \frac{\alpha_1}{\gamma_{12}}$ система буде стійкою, стан рівноваги є стійким вузлом. При $\alpha_2 > 2\beta_2 \frac{\alpha_1}{\gamma_{12}}$ стан рівноваги є нестійким вузлом. Очевидно, критична точка $\alpha_2 = 2\beta_2 \frac{\alpha_1}{\gamma_{12}}$ – це стан нейтральної стійкості.

3. Тепер розглянемо третій стан рівноваги. У цьому випадку

$$\mu = \alpha_1 - 2\beta_1 \frac{\alpha_1}{\gamma_{21}}; \quad \Delta = 0.$$

Дисперсійне рівняння набуде такого вигляду:

$$\omega^2 - \left(\alpha_1 - 2\beta_1 \frac{\alpha_2}{\gamma_{21}} \right) \omega = 0, \quad (2.71)$$

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = \alpha_1 - 2\beta_1 \frac{\alpha_2}{\gamma_{21}}. \quad (2.72)$$

Тут маємо критичну точку $\alpha_1 = 2\beta_1 \frac{\alpha_2}{\gamma_{21}}$, в якій корені стають нульовими і система в ній нейтрально стійка. При $\alpha_1 < 2\beta_1 \frac{\alpha_2}{\gamma_{21}}$ система буде стійкою, стан рівноваги – стійким вузлом. При $\alpha_1 > 2\beta_1 \frac{\alpha_2}{\gamma_{21}}$ стан рівноваги є нестійким вузлом.

4. Розглянемо четвертий стан рівноваги:

$$Y_{10} = \frac{\alpha_2 \gamma_{12} - \alpha_1 \beta_2}{\beta_1 \beta_2 - \gamma_{12} \gamma_{21}}; \quad Y_{20} = \frac{\alpha_1 \gamma_{21} - \alpha_2 \beta_1}{\beta_1 \beta_2 - \gamma_{12} \gamma_{21}}.$$

У цьому випадку

$$\mu = -\{ \alpha_1 \beta_2 (\beta_1 - \beta_2) + \alpha_2 \beta_1 (\gamma_{12} + \beta_2) \},$$

$$\Delta = \gamma_{12} \gamma_{21} (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \gamma_{12}) (\alpha_1 \gamma_{21} - \alpha_2 \beta_1).$$

Дисперсійне рівняння буде виглядати так:

$$\omega^2 + [\alpha_1 \beta_2 (\beta_1 - \beta_2) + \alpha_2 \beta_1 (\gamma_{12} + \beta_2)] \omega + \gamma_{12} \gamma_{21} (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \gamma_{12}) (\alpha_1 \gamma_{21} - \alpha_2 \beta_1) = 0; \quad (2.73)$$

загальний розв'язок:

$$\omega_{12} = - \frac{[\alpha_1 \beta_2 (\beta_1 - \beta_2) + \alpha_2 \beta_1 (\gamma_{12} + \beta_2)]}{2} \pm \frac{\sqrt{[\alpha_1 \beta_2 (\beta_1 - \beta_2) + \alpha_2 \beta_1 (\gamma_{12} + \beta_2)]^2 - 4 \gamma_{12} \gamma_{21} (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \gamma_{12}) (\alpha_1 \gamma_{21} - \alpha_2 \beta_1)}}{2} \quad (2.74)$$

Якщо підкореневий вираз від'ємний, то стан рівноваги буде стійким вузлом, при зміні знака підкореневого виразу стан рівноваги перетвориться в стійкий фокус. У критичній точці, коли

$$[\alpha_1 \beta_2 (\beta_1 - \beta_2) + \alpha_2 \beta_1 (\gamma_{12} + \beta_2)]^2 = 4 \gamma_{12} \gamma_{21} (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \gamma_{12}) (\alpha_1 \gamma_{21} - \alpha_2 \beta_1), \quad (2.75)$$

система стрімко переходить зі стійкого фокуса в стійкий вузол.

4.2. Елементи теорії структурної динаміки

4.2.1. Основи теорії катастроф

На початку 70-х рр. став популярним термін «катастрофа», що позначає стрибкоподібні зміни, які виникають при плавних змінах значень параметрів. У популярних виданнях теорія катастроф рекламувалась як переворот у математиці, порівняно з винаходом диференційного й інтегрального обчислення. За останні двадцять років з'явилися сотні наукових публікацій з природознавства і техніки, в яких теорія катастроф успішно застосовувалась. Оприлюднено також праці про використання моделей теорії катастроф у економіці, психології, лінгвістиці, соціології.

Після періоду ейфорії, викликану широкою саморекламою, з'явилися більш тверезі оцінки застосування теорії катастроф, більш того, з'ясувалося, що багато серйозних результатів було отримано до «проголошення» теорії катастроф.

Один з провідних радянських математиків, В. І. Арнольд, відзначає, що обґрунтованість використання теорії катастроф істотно залежить від обґрунтованості початкових передумов: «Наприклад, у теорії ударів пружних конструкцій і в теорії перекидання кораблів прогнози теорії цілком підтверджуються експериментом. З іншого боку, в біології, психології та соціальних науках (скажімо, в додатках до теорії поведінки біржових гравців або до вивчення нервових хвороб) як початкові передумови, так і висновки мають швидше евристичне значення».

Розглянемо основні положення теорії катастроф на прикладі катастрофи «зборка», якій відповідає диференційне рівняння

$$x = -x^3 + bx + a. \quad (2.76)$$

При варіюванні значень параметрів a і b поведінка системи (кількість стаціонарних точок, їхнє розташування) буде також змінюватися. Для вивчення якісного характеру цих змін розглянемо потенційну функцію

$$F(x, a, b) = \frac{x^4}{4} - b \frac{x^2}{2} - ax. \quad (2.77)$$

Помітимо, що $-\partial F / \partial x = -x^3 + bx + a$. На рис. 2.39 наведено двовимірні графіки, які характеризують поведінку функції F .

На рис. 2.39(а) зображена крива, що називається біфуркаційною: $4b^3 - 27a^2 = 0$. Ця крива розділяє площину (a, b) на дві частини. Всередині кривої функція F має два мінімуми (рис. 2.39(б)). За межами

цієї кривої функція F має тільки один мінімум (рис. 2.39(с)). Як відомо, екстремальні значення функції F можна визначити, прирівнявши до нуля першу похідну:

$$x^3 - bx - a = 0, \quad (2.78)$$

але це ж рівняння визначає стаціонарні точки диференційного рівняння (2.76). Отже, крива $4b^3 - 27a^2$ розділяє площину (a, b) на дві області, у першій з яких є одна особлива точка, а у другій – дві.

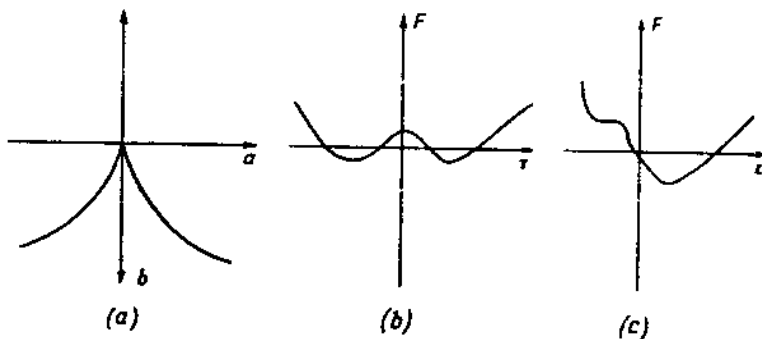


Рис. 2.39. Графіки потенційної функції

Якщо в тривимірному просторі на вертикальній осі відкласти положення особливих точок рівняння (2.76) x (теорія катастроф вивчає питання структурної стійкості спеціального класу диференціальних рівнянь, права частина яких може бути представлена у вигляді градієнтної системи, тобто як рух у полі потенційних сил з потенціалом

$$F(\bar{x}, \lambda): \bar{x}_i = -\partial F(\bar{x}, \lambda) / \partial x_i, \quad i = 1, \dots, n),$$

а на двох інших осях – значення параметрів a і b , то одержимо поверхню катастроф (рис. 2.40). Проекція на площину параметрів (a, b) точок поверхні, в яких є вертикальна дотична, є біфуркаційною кривою.

Припустимо, що безперервній зміні значень параметрів a і b на рис. 2.40 відповідає рух по кривій RT , тоді в точці T відбувається катастрофа – система стрибком переходить з одного стану рівноваги в інший (P).

Відзначимо, що кожному значенню параметрів a і b , що знаходяться всередині біфуркаційної кривої, відповідають два різні стани системи (бімодальність).

На поверхні катастроф можна спостерігати явище гістерезису, коли різка зміна в поведінці системи істотно залежить від передісторії

процесу. Наприклад, при зміні стану системи вздовж кривої RT , як було наведено вище, відбувається стрибок з верхнього аркуша на нижній, з точки T в точку P . Але при русі вздовж кривої PQ стрибок з нижнього аркуша на верхній відбудеться не в точці P , а в точці Q .

Параметр a одержав назву нормального фактора, параметр b – розщеплюючого фактора.

Монографія Постона і Стюарта була присвячена використанню теорії катастроф у проблемах соціологічного моделювання, зокрема в ній аналізуються дослідження порушень режиму у в'язниці Гартрі протягом 1972 р. Застосовуючи факторний аналіз, автори дослідження розділили фактори, що впливають на хаос, на дві загалом незалежні групи: напруженість (почуття розчарування і безвиході, тяжкий стан) та роз'єднаність (взаємне відчуження, відсутність спілкування, розподіл на два табори).

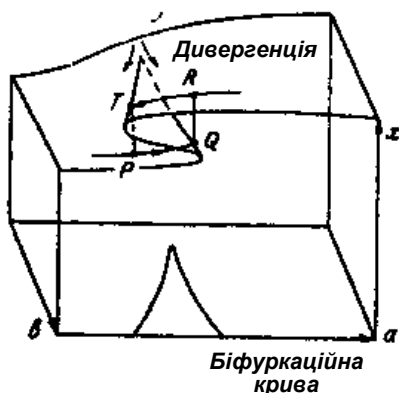


Рис. 2.40. Катастрофа «зборка»

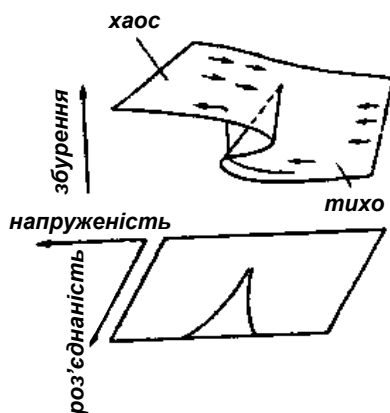


Рис. 2.41. Модель збурень у в'язниці

Аналіз показав, що зі зростанням напруженості підвищується імовірність збурень, а збільшення роз'єднаності пов'язане з характером збурень: вони стають більш раптовими і жорстокими.

Динаміка системи може бути проаналізована за допомогою катастрофи типу «зборки», з віссю напруженості, ортогональної до вістря, і віссю роз'єднаності, що йде вздовж вістря (рис. 2.41).

З рис. 2.41 видно, що при низьких значеннях роз'єднаності система прагне до стійкого стану помірного хвилювання, а при високому рівні роз'єднаності – змінює свій стан стрибком з нижнього аркуша на верхній і назад. Система робить коливання всередині біфуркаційної множини катастрофи «зборка», що підтверджується реальними даними.

В. І. Арнольд вважає, що застосування теорії катастроф за умов, коли не тільки не відомі досліджувані функції, але й саме їхнє існування є проблематичним, має спекулятивний характер. Яскравий приклад такого твердження належить англійському математикові К. Зіману, який запропонував модель творчої особистості.

Вважатимемо, що творчу особистість (вченого) можна описати трьома параметрами: «техніка», «захопленість», «досягнення». Припустимо, що катастрофа «зборки», зображена на рис. 2.42, задовільно описує досягнення вчених, умовно розділених на дві групи: «генії» та «маніяки».

Дослідимо, як залежать досягнення вченого від його техніки і захопленості. Якщо захопленість (y) мала, то досягнення (D) монотонно зростають разом зі зростанням техніки (T). Біфуркації відбуваються при досить великій захопленості. Наприклад, якщо техніка і захопленість змінюються вздовж кривої 1 на рис. 2.42, тоді в точці G досягнення зростають стрибком. При цьому ми переходимо в область високих досягнень (генії).

Однак якщо зростання захопленості не супроводжується ростом техніки, то рух відбувається по кривій 3 і досягнення стрибком потрапляють у точку M . Ми опиняємося в області малих досягнень («маніяки»). Зауважимо, що «маніяк» і «геній» у цій моделі можуть мати рівні техніку і захопленість, але при цьому їхні досягнення різко відрізняються – внаслідок того, що стрибки зі стану «геній» у стан «маніяк» відбуваються на різних лініях.

Моделі теорії катастроф є математичною інтерпретацією діалектики Гегеля – законів переходу кількості в якість, єдності та боротьби протилежностей.

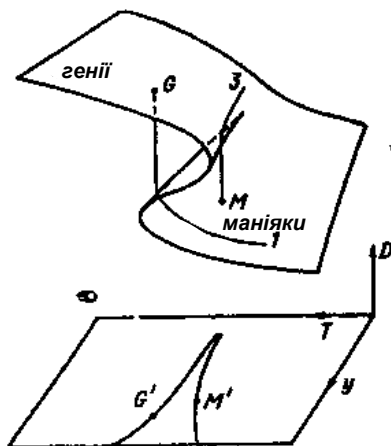


Рис. 2.42. Модель творчої особистості

4.2.2. Біфуркації на фазовій площині

Основними характеристиками фазового портрета на площині є стан рівноваги і граничні цикли. Сепаратиси зв'язують сідлове положення рівноваги з особливими точками і граничними циклами. Якщо змінювати параметри структурно стійкої системи, тоді її фазовий портрет буде теж змінюватися, але його топологічна структура у визначеному діапазоні значень параметра залишатиметься постійною. При досягненні критичних значень параметрів відбувається біфуркація – змінюється топологічна структура фазового портрета. Якісне дослідження динамічної системи, що залежить від параметрів, припускає опис усіх можливих у ній біфуркацій і визначення множини біфуркаційних значень параметрів.

Розглянемо системи, що залежать від одного параметра. Повернімося до рисунка, на якому зображені типові фазові портрети в околі точки рівноваги. У двох випадках стан рівноваги є стійким: стійкий фокус і сідло, а в третьому – нестійким: сідло, нестійкий вузол і фокус.

Якщо в процесі зміни системи параметр наближається до біфуркаційного значення, тоді або обидва стани рівноваги зливаються і «вмирають» (система здійснює стрибок в інший режим), або «народжується» два стани рівноваги. Причому з цих двох станів один – стійкий, а інший – нестійкий.

Ситуація виникнення граничного циклу може бути проілюстрована такою системою рівнянь:

$$\begin{aligned} dr/dt &= \lambda r - r^3; \\ d\varphi/dt &= c, \end{aligned} \tag{2.79}$$

де c – константа, r і φ – полярні координати ($x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$). Якщо $\lambda < 0$, то динамічна система (2.77) має один стійкий фокус. Якщо параметр λ змінюється і стає від'ємним, тоді відбувається біфуркація Хопфа, фокус втрачає стійкість і в системі виникає стійкий граничний цикл із радіусом $\sqrt{\lambda}$.

Фазовий портрет системи (2.77) у цьому випадку буде складатися з траєкторій, які зсередини і зовні «намотуються» на граничний цикл. Це означає, що незалежно від початкового стану система досить швидко перейде на режим періодичних коливань (автоколивальний режим).

Розглянемо біфуркації, пов'язані з граничними циклами. У цьому випадку можливі два варіанти. У першому варіанті зі стійкого фокуса при зміні параметра народжується стійкий граничний цикл (рис. 2.43).

У другому варіанті при зміні параметра нестійкий граничний цикл зникає і його нестійкість передається стану рівноваги – фокусу (рис. 2.44).

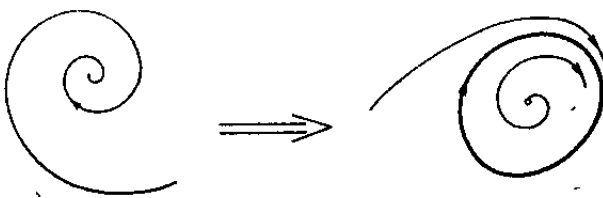


Рис. 2.43. Народження циклу

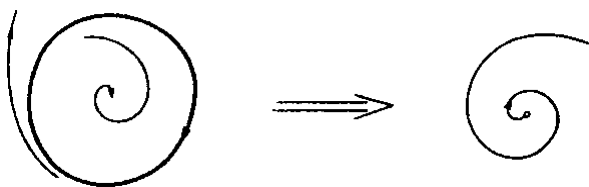


Рис. 2.44. Загибель циклу

У першому варіанті після втрати стійкості стану рівноваги встановлюється коливальний періодичний режим (м'яка втрата стійкості).

У другому варіанті система переходить зі стаціонарного режиму стрибком (жорстка втрата стійкості) до іншого режиму руху.

Множина точок, до яких притягаються траєкторії автономних систем, називається аттрактором. Для систем із двома змінними існує тільки два типи аттракторів: особлива точка і граничний цикл. У першому випадку всі досліджувані величини з часом виходять на постійні значення, у другому – на періодичний режим.

При кількості змінних у системі $N \geq 3$ і наявності у правій частині тільки лінійних і квадратичних членів можливе виникнення дивних аттракторів. Дивний аттрактор у деяких випадках схожий на клубок траєкторій і нагадує дві стрічки, склеєні між собою. Якщо спостерігати за поведінкою точки, яка характеризує стан системи, на екрані дисплея, то можна побачити, що точка «бігає» по аттрактору, випадково (хаотично) подається то на ліву, то на праву стрічку.

Дивні аттрактори чутливі до початкових даних. Якщо вибрати дві близькі точки, які лежать на аттракторі, і проаналізувати, як буде змінюватися відстань між ними з часом $r(t)$, то виявляється, що можливі наступні варіанти:

- якщо аттрактор – особлива точка, тоді $r(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (точки зливаються в одну);
- аттрактор – граничний цикл, $r(t)$ – періодична функція часу;

- дивний атрактор $r(t) \approx e^{\lambda t}$ ($\lambda > 0$), $r(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ (точки розбігаються з експоненціальною швидкістю).

Отже, у дивного атрактора дві близькі траєкторії згодом перестануть бути близькими. Це означає, що як би точно не вимірялися початкові дані, помилка згодом стане великою, і отже, поведінку системи на великих часових інтервалах спрогнозувати не можна.

З цим явищем пов'язаний так званий «ефект метелика».

Історія метелика, випадково роздавленого під час сафарі учасниками подорожі на машині часу, описана в блискучій розповіді Р. Бредбері «І грянув грім»: «Воно впало на підлогу – витончене маленьке створіння, здатне порушити рівновагу, повалити маленькі кісточки доміно... великі кісточки... величезні кісточки, з'єднані ланцюгом незліченних років, що складають Час». А в підсумку – замість гарного президента вибори виграв диктатор...

Дивні атрактори описав метеоролог Лоренц у 1963 р., моделюючи задачі прогнозу погоди. З наявності ефекту метелика випливає практична неможливість прогнозу погоди: якщо необхідно прогнозувати погоду на 1–2 місяці наперед з похибкою D , то початкові дані мають бути відомі з похибкою $D \cdot 10^{-5}$.

Перехід системи в режим дивного атрактора означає, що в ній спостерігаються складні неперіодичні коливання, які дуже чутливі до незначних змін початкових умов. Такий режим може бути названий хаотичним. Можливий сценарій хаотизації приведено на рис. 2.45.

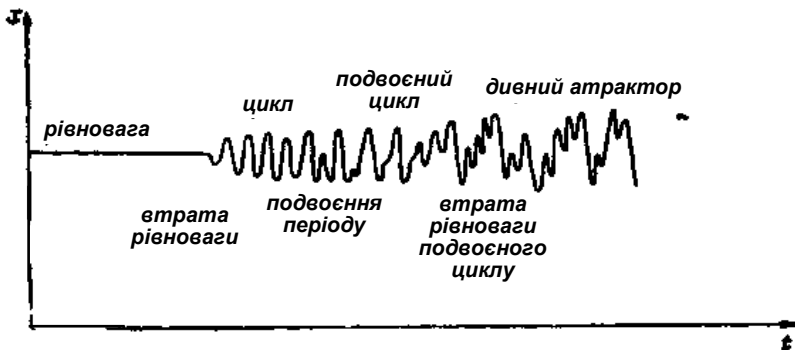


Рис. 2.45. Сценарій хаотизації

Дослідження екологічних моделей привело вчених до експериментального відкриття каскадів подвоєнь періоду. Універсальність цього явища довів М. Фейгенбаум (1978). Каскад подвоєнь періоду можна описати так. У певній області значення параметра система діє в період

дичному режимі з періодом T ; при переході через біфуркаційне значення параметра період подвоюється і дорівнює $2T$; подальша зміна параметра знову призводить до подвоєння періоду – він дорівнює $4T$ і т. д. Послідовні біфуркації подвоєння швидко відбуваються одна за одною – кінцевий відрізок зміни параметра містить нескінченну кількість подвоєнь (після P біфуркацій кількість циклів дорівнює 2^P).

Отже, досліджуваний еволюційний процес стає все складнішим. У ліміті з'являється надскладна організація – кількість циклів 2^∞ , процес стає неперіодичним, випадковим, виникає хаос.

4.2.3. Дисипативні структури І. Пригожина

Теорія дисипативних структур, розвинена І. Пригожиным і його школою, спочатку досліджувала процеси самоорганізації у фізико-хімічних системах. До праць І. Пригожина в природознавстві здебільшого вивчалися рівноважні структури, які можна розглядати як результат статистичної компенсації активності мікроскопічних елементів (молекул, атомів).

Якщо систему з рівноважною структурою ізолювати від зовнішнього середовища, тоді завдяки інертності ця рівноважна структура може існувати нескінченно довго. Однак у біологічних і соціальних системах ситуація, як правило, інша: система незамкнута, відкрита і, більше того, існує завдяки тому, що вона відкрита, живиться потоками речовини, енергії, інформації, які надходять із зовнішнього світу. У відкритих системах випадкові флуктуації «намагаються» вивести систему з рівноважного стану. У реальних системах незначні флуктуації зазвичай придушуються і система залишається стабільною. Якщо ж сили, що впливають на систему, стають достатньо великими і змушують її досить далеко відхилитися від стану рівноваги, тоді стан системи стає нестійким. Деякі флуктуації можуть не згасати, а підсилюватися і охопити всю систему. Внаслідок дії невід'ємного зворотного зв'язку флуктуації підсилюються і можуть призвести до руйнування існуючої структури та переходу її до нового стану. Причому можливий перехід і на більш високий рівень упорядкованості, що називається дисипативною структурою. Виникає явище самоорганізації.

Досліджуючи динаміку дуже нерівноважних систем, І. Пригожин прийшов до такого висновку: «Коли система, еволюціонуючи, досягає точки біфуркації, детерміністичний опис стає непридатним. Флуктуація змушує систему вибрати те відгалуження, за яким якою буде відбуватися подальша еволюція системи. Перехід через біфуркацію – такий же випадковий процес, як кидання монети. Існування нестійкості можна розглядати як результат флуктуації, що спочатку була лока-

лізована в малій частині системи, а потім поширилася і привела до нового макроскопічного стану».

Відомий американський футуролог О. Тоффлер відзначає, що «Пригожинська парадигма особливо цікава тим, що вона акцентує увагу на аспектах реальності, найбільш характерних для сучасної стадії прискорених соціальних змін: розупорядкованість, нестійкість, розмаїтість, нерівноважність нелінійних співвідношень, у яких незначний сигнал на вході може викликати який завгодно сильний відгук на виході, і темпоральності – підвищеної чутливості до ходу часу».

Принципи, розроблені Пригожиным для аналізу хімічних процесів, були поширені на широкий клас явищ фізики, молекулярної біології, процесів еволюції в біології, а потім і соціології.

Нині у природничих науках ведеться активне дослідження явищ, пов'язаних з виникненням структур, самоорганізацією в найпростіших нелінійних середовищах. Здійснюються спроби виявити прообрази появи організації й у більш складних, зокрема соціальних, системах. Сучасні вчені досліджують найпростіші моделі, аналіз яких не може замінити вивчення складних соціальних процесів, але може дати дослідникам корисну підказку, допомогти помітити приховані закономірності, сформулювати плідні гіпотези.

У працях І. Пригожина і І. Стенгерса розглядається поняття логістичної еволюції, тобто процесів, що описуються логістичними рівняннями. Досліджується наступна модель еволюції популяцій з N осіб. Нехай r і m – коефіцієнти народжуваності та смертності, K – «носійна тримкість» навколишнього середовища. Тоді процес еволюції популяції може бути описаний таким рівнянням:

$$dN/dt = r \cdot N (K - N) - m \cdot N. \quad (2.80)$$

Система має стійкий стаціонарний стан $N_c = K - m/r$. При будь-якому початковому значенні N_0 чисельність популяції наближається до значення N_c , що залежить від різниці між носійною тримкістю середовища і відношенням коефіцієнтів смертності та народжуваності. У стаціонарному стані в кожен момент народжується стільки індивідів, скільки гине.

Зрозуміло, що в процесі еволюції параметри K , r , m можуть змінюватися (наприклад, під впливом кліматичної флуктуації). Живі співтовариства намагаються збільшити параметр K , вишукуючи нові способи експлуатації природних ресурсів. Інстинкт життя обумовлює прагнення до збільшення народжуваності та зниження смертності. «Кожна екологічна рівновага, обумовлена логістичним рівнянням, має лише тимчасовий характер, і задана логістично послідовно екологічна

ніша заповнюється серією видів, кожен з яких витісняє попередні, коли його «здатність» до використання ніші, яка вимірюється величиною $K - m/r$, стає більшою, ніж у них». На рис. 2.46 показано часову еволюцію популяції X , яка складається з видів X_1 , X_2 , X_3 . Кожному виду відповідає зростаюче значення $K - m/r$.

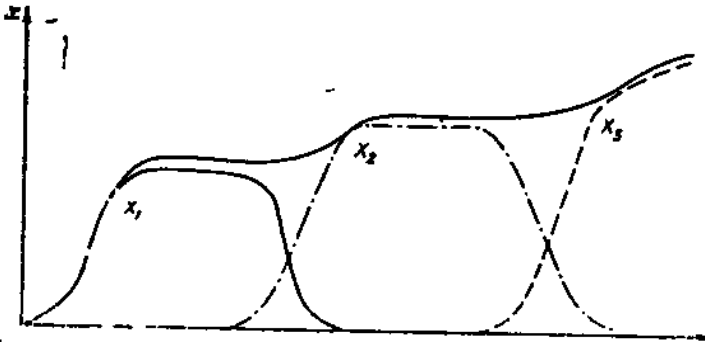


Рис. 2.46. Еволюція популяції X

Логістичне рівняння дозволяє кількісно сформулювати дарвінівську ідею про виживання найбільш пристосованого – в припущенні, що найбільш пристосованим є вид з найбільшим значенням $(K - m/r)$. Схожим чином можуть бути пояснені процеси еволюції соціуму, пов'язані з упровадженням технологічних інновацій. Моделі, побудовані на основі поняття «порядок через флуктуацію», будуть відповідати більш точному формулюванню «складної взаємодії між індивідуальним і колективним аспектами поведінки».

Моделі такого типу «відкривають перед нами нестійкий світ, у якому малі причини породжують великі наслідки, але світ цей не довільний. Навпаки, причини посилення малих подій – цілком «законний» предмет раціонального аналізу... Якщо флуктуація стає некерованою, це ще не означає, що ми не можемо локалізувати причини нестійкості, викликані посиленням флуктуації».

РОЗДІЛ III

МОДЕЛІ ТА АНАЛІЗ СКЛАДНИХ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ

ГЛАВА 5. МОДЕЛЮВАННЯ І АНАЛІЗ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

5.1. Деякі базові математичні моделі та їхнє застосування в дослідженні соціально-економічних процесів

Праці останніх років з моделювання складних систем різної природи дозволили сформулювати концепцію ієрархії спрощених моделей. В основі такої концепції лежить набір базових математичних моделей, що дають можливість ефективно будувати і досліджувати великі класи моделей різних явищ. Образно кажучи, базові моделі виступають в якості складових частин, за допомогою яких конструюють опис конкретного явища. Важливо підкреслити два принципових факти, виявлені в останні двадцять років. По-перше, базових математичних моделей небагато. Навіть гранично прості нелінійні математичні моделі можуть виявитися глибокими і змістовними. По-друге, з їхньою допомогою, не проходячи всі ступені ієрархії, пов'язані з деталізацією та ускладненням математичного опису, стало можливим прогнозувати явища природи.

5.1.1. Модель Мальтуса

Т. Мальтусом наприкінці XVIII ст. було запропоновано модель експоненційного зростання населення планети з плином часу. Він припустив, що швидкість росту населення dx/dt пропорційна чисельності населення x . Математично закон Мальтуса може бути описаний диференціальним рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

де k – коефіцієнт, що відображає природний приріст населення (різниця між рівнями народжуваності та смертності приймається постійною);

x – чисельність населення в момент часу t .

Рішенням цього рівняння є функція $x = x_0 \cdot e^{kt}$, де $x_0 = x(t_0)$ – чи-

сельність населення в початковий момент часу. За законом Мальтуса, зростання чисельності населення відбувається дуже швидко, подвоюючись через час $\ln 2 / k$. Коли кількість населення стає надто великою, мальтусівська модель з постійним коефіцієнтом k перестає бути придатною. Однак якщо нас цікавлять недовготривалі процеси, лінійна модель Мальтуса може виявитися цілком відповідною. Наприклад, вона може бути застосована до опису процесу розвитку науки в 1700–1950 рр., що характеризується, скажімо, чисельністю наукових статей.

Зауважимо, що в моделі Мальтуса замість чисельності населення можна розглядати зміну продуктивності праці, обсягу інвестицій, рівня освіти і т. д.

5.1.2. Логістична модель

Недоліком моделі Мальтуса є те, що вона не враховує системний характер розвитку. Виробництво, наприклад, продуктів харчування і відтворення населення взаємообумовлені за допомогою безлічі зв'язків. Природно, що за дуже великих x конкуренція за ресурси (їжу) призводить до зменшення k . Тому жорстка модель Мальтуса потребує уточнення, що враховує залежність коефіцієнта k від чисельності населення.

Повертаючись до моделі розвитку науки, зауважимо, що подальше експонентційне зростання за моделлю Мальтуса призвело б до того, що в XX ст. вичерпалися б запаси паперу і чорнила, а кількість вчених досягла б половини населення земної кулі. Зрозуміло, що суспільство не може цього допустити і, отже, розвиток науки має бути стримано, що й спостерігається нині в багатьох країнах (у тому числі в Росії) у вигляді здійснення всіляких реформ академічної науки.

Замість жорсткої моделі Мальтуса розглянемо м'яку модель

$$\frac{dx}{dt} = k(x) \cdot x,$$

яка передбачає вибір різних функцій $k(x)$. Найпростішим прикладом є $k(x) = a - bx$, що призводить до так званої логістичної моделі

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2. \quad (3.1)$$

Вибір цієї функції може бути обґрунтований певними міркуваннями. Оскільки ресурси обмежені, то природно припустити, що рівень народжуваності зі зростанням чисельності населення буде падати, а рівень смертності – збільшуватися. Задамо рівень народжуваності функцією

$$r = r_0 - k_r x,$$

де r_0 – початковий рівень народжуваності;

k_r – швидкість падіння рівня народжуваності із збільшенням чисельності населення x .

Аналогічно, рівень смертності може бути знайдений як $d = d_0 + k_d x$, де d_0 – початковий рівень народжуваності; k_d – швидкість зростання рівня смертності зі збільшенням чисельності населення. Тоді для коефіцієнта k в рівнянні Мальтуса маємо:

$$k = r - d = (r_0 - k_r x) - (d_0 + k_d x) = (r_0 - d_0) - (k_r + k_d) \cdot x.$$

Нехай $a = (r_0 - d_0)$, $a \cdot b = (k_r + k_d)$. Підставивши наведені вирази в рівняння Мальтуса, отримаємо диференційне рівняння (3.1).

На рис. 3.1 зображено залежність кількості населення від часу за різних початкових умов. Коли чисельність населення мала, модель дуже близька до мальтузіанської (пунктирна лінія), але далі її поведінка різко відрізняється від мальтузіанського зростання: замість виходу x в нескінченність кількість населення наближається до стаціонарного стану. Чисельність населення Землі нині становить 6 млрд осіб. Стаціонарне значення його (за різними оцінками) – 16–20 млрд чоловік.

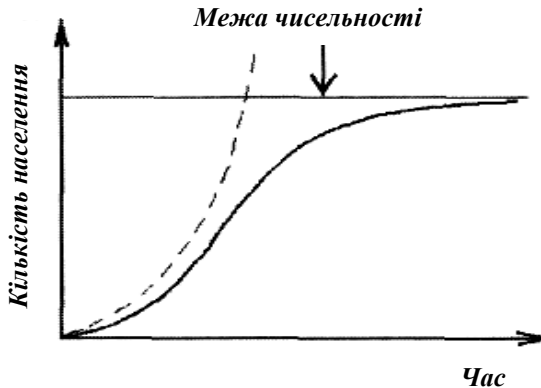


Рис. 3.1. Приклад логістичної кривої

Зауважимо, що зроблені висновки справедливі для широкого класу моделей з різними спадними функціями $k(x)$. Логістична модель задовільно описує численні явища насичення. Емпіричний аналіз величезної кількості природних, техніко-економічних та соціокультурних

процесів показав, що їхнє зростання, розвиток, поширення улягають логістичному закону. У книзі Ю. М. Плотинського «Моделі соціальних процесів» наведено багато прикладів, починаючи від розвитку транспорту і комунікацій до зростання народонаселення. S-подібні криві добре описують зміну одного виду техніки іншим, зміну технологій, еволюційні процеси в економічній та соціокультурній сферах.

Ще одним прикладом логістичної моделі може бути класична модель дифузії інновацій. Позначимо кількість людей, які прийняли певну інновацію до моменту часу t , через y_t . Нехай M – ємність ринку, тобто максимально можлива кількість осіб, здатних сприймати це нововведення. Припустимо, що приріст прихильників новинки пропорційний числу можливих зустрічей між ними й тими, хто поки що сумнівається. Число таких зустрічей пропорційно $y_t \cdot (M - y_t)$. Отримуємо логістичне рівняння $y_{t+1} = y_t + ay_t (M - y_t)$, де a – коефіцієнт пропорційності. Чисельні експерименти з отриманою моделлю продемонстрували безліч режимів, включаючи хаотичні, які описують еволюцію процесу поширення нововведень. Здійснення таких експериментів дозволяє визначити межі параметрів, у яких система веде себе стабільно, а також виробити стратегію управління при різних режимах поведінки.

Логістична модель дифузії інновацій використовувалась американськими політологами Дж. Модельські та Г. Пері (1991) при прогнозуванні процесу демократизації. Процес поширення демократичної форми правління при цьому розглядався як процес дифузії інновацій. З 1450 по 1800 р. частка населення, яка обрала демократичні форми правління, не перевищувала 1–2 % усього населення земної кулі. Однак далі процес дифузії почав набирати обертів. До 1990 р. частка населення, що живе в умовах демократії, досягла 50 %, а до 2100 р. за прогнозом авторів моделі це значення складе 90 %.

Можна навести ще чимало прикладів успішного використання цієї моделі на практиці.

5.1.3. Експоненційна модель з відловом

У цій моделі не враховується конкуренція, проте передбачається, що внаслідок промислу з популяції з постійною швидкістю вилучається певна кількість особин за одиницю часу. Цю фіксовану чисельність позначимо через c і назовемо *квотою відлову*. Дискретний варіант такої моделі має вигляд

$$x_{n+1} = ax_n - c, \quad a > 1. \quad (3.2)$$

Можлива економічна інтерпретація отриманої моделі може бути

наступною: x_n – прибуток фірми в n -й момент часу; a – коефіцієнт, що демонструє здатність працівників фірми збільшувати прибуток за один період часу ($a > 1$); c – постійні платежі, які не залежать від n і x_n .

Стаціонарна траєкторія $x^* = \frac{c}{a-1}$ є критичною: падіння чисельно-

сті популяції нижче зазначеної величини веде до її загибелі. В економічній інтерпретації це означає, що існує певне критичне значення початкового прибутку. Якщо початковий прибуток фірми перевищує критичне значення x^* , то далі цей прибуток необмежено зростає. Якщо ж початковий прибуток менше критичного, то з часом фірма розоряється. При великих платежах критичний рівень прибутку зростає до високого значення і фірмі потрібен високий стартовий капітал, щоб вижити на ринку.

Приклад. Нехай персонал фірми здатний збільшувати її прибуток кожен рік на 10 % порівняно з рівнем минулого року. Щорічні платежі фірми дорівнюють 1 млн грн. Знайдемо величину початкового стартового капіталу фірми, необхідного для її безпечної життєдіяльності.

У цьому випадку рівняння (3.2) набуває вигляду $x_{n+1} = 1,1 \cdot x_n - 1$.

Критичне значення досягає величини $x_n^* = \frac{1}{1,1-1} = 10$ млн грн. На

рис. 3.2 представлено результати розрахунку декількох траєкторій при зміні n від 1 до 15.

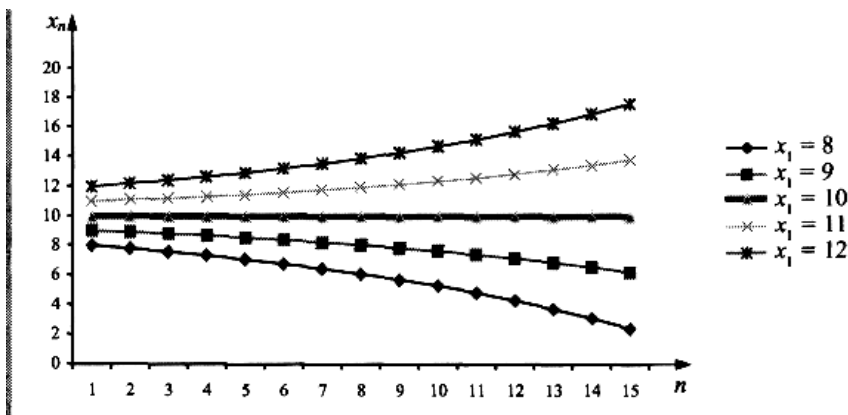


Рис. 3.2. Динаміка фінансів фірм з різним стартовим капіталом

5.1.4. Логістична модель з відловом

Ця модель є синтезом двох попередніх моделей: вона враховує конкуренцію і передбачає регулярний *відлов*. Модель визначається формулою

$$x_{n+1} = (a - bx_n) \cdot x_n - c. \quad (3.3)$$

Економічна інтерпретація цієї моделі полягає в тому, що вона описує поведінку фірми в умовах можливого насичення ринку і за наявності платежів, що не залежать від часу, прибутку або капіталу фірми.

Модель при малих значеннях квоти відлову c має два стаціонарних стани:

$$x_1^* = \frac{a-1 + \sqrt{(a-1)^2 - 4bc}}{2b} \quad (\text{стійкий корінь}),$$

$$x_2^* = \frac{a-1 - \sqrt{(a-1)^2 - 4bc}}{2b} \quad (\text{нестійкий корінь}).$$

Результати розрахунку декількох траєкторій за формулою $x_{n+1} = (1,1 - 0,1 \cdot x_n) \cdot x_n - 0,02$ представлено на рис. 3.3.

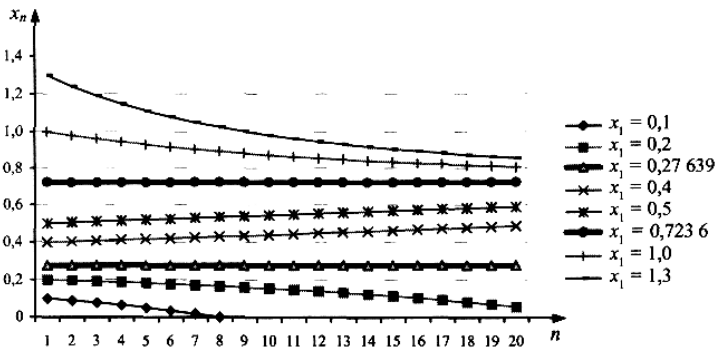


Рис. 3.3. Траєкторії логістичної моделі з помірним відловом

Якщо $c = \frac{(a-1)^2}{4b}$, то корені x_1^* і x_2^* зійдуться. Квота відлову при

цьому досягне максимального значення. Однак таку ситуацію фахівці називають: «оптимізація як шлях до катастрофи». Справа в тому, що якщо внаслідок будь-яких зовнішніх причин розмір популяції вия-

виться хоч трохи нижчим рівня $x^* = \frac{a-1}{2b}$, то надалі популяція буде знищена повністю за скінченний час (рис. 3.4).

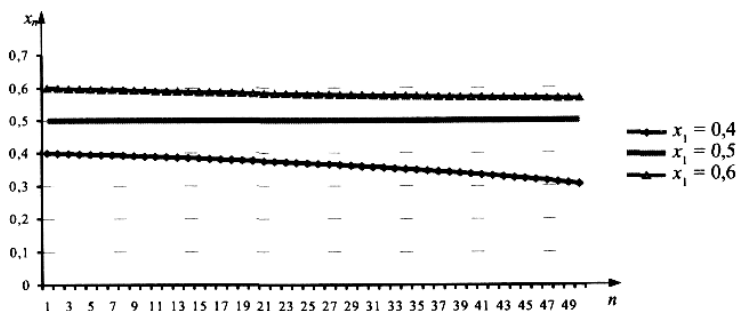


Рис. 3.4. Оптимізація як шлях до катастрофи

Якщо квота відлову c стане більшою за критичний рівень: $c > \frac{(a-1)^2}{4b}$, то на популяцію чекає загибель за будь-яких початкових умов. Ситуація перелову наведена на рис. 3.5, де показано траєкторії моделі $x_{n+1} = (1,1 - 0,1 \cdot x_n) \cdot x_n - 0,05$.

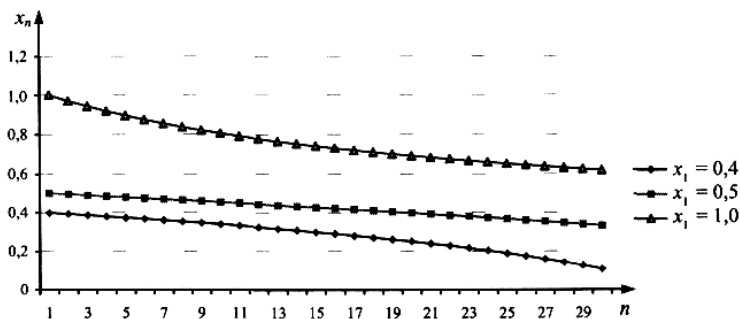


Рис. 3.5. Траєкторія логістичної моделі в ситуації перелову

В економічній інтерпретації ситуація перелову може означати розорення фірми під тягарем постійних платежів c , неспівмірних з можливостями фірми та з жорсткістю умов ринку, що у формулі (3.3) характеризуються параметрами a та b відповідно.

На думку академіка В. І. Арнольда, чисельність населення Росії ще не знизилася до цього смертельно небезпечного рівня, але наближа-

ється до нього. Наука ж у Росії знаходиться на сьогодні в умовах «перелову». Швидкість зменшення чисельності вчених у Росії через їхній масовий виїзд за кордон («витік умів») в основному обмежується дискримінаційними заходами, прийнятими на Заході для охорони своїх робочих місць від напливу фахівців з Росії.

5.1.5. М'яка логістична модель з відловом

З моделі (1.3) зрозуміло, що вибір значення параметра c є надзвичайно важливим моментом в управлінні експлуатацією популяції x . Прагнучи до збільшення квоти експлуатації c , організація, яка розумно планує свою діяльність, не повинна допускати перевищення її критичного рівня. Оптимізація параметрів (прибуток від експлуатації за одиницю часу досягає максимально можливого значення) призводить до вибору саме критичного значення c , за якого експлуатована популяція ще не знищується, але незначне випадкове зменшення x здатне викликати її повне знищення за скінченний час. Цей випадок є прикладом того, як оптимізація параметрів може призводити до повного знищення планованої системи внаслідок нестійкості, що через неї виникає.

Стійкість відновлюється шляхом введення зворотного зв'язку. Інакше кажучи, рішення щодо величини експлуатації (квоти відлову, податкового тиску і т. д.) слід приймати не директивно ($c = \text{const}$), а залежно від стану системи $c = kx$. У цьому випадку логістична модель з відловом набуде вигляду

$$x_{n+1} = (a - bx_n) \cdot x_n - kx_n. \quad (3.4)$$

Чисельне дослідження моделі (3.4) після введення зворотного зв'язку показує, що за будь-яких початкових умов чисельність популяції наближається до стаціонарної (рис. 3.6).

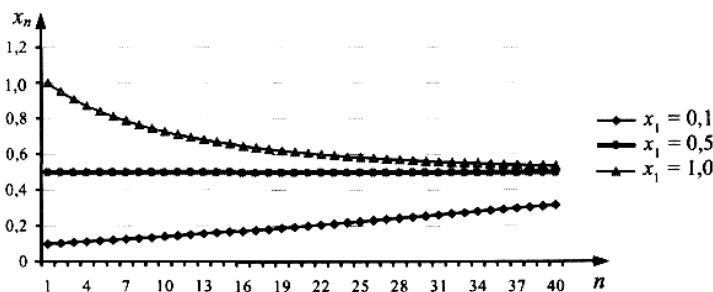


Рис. 3.6. Траєкторії м'якої логістичної моделі з відловом
($a = 1,1$; $b = 0,1$; $k = 0,05$)

5.1.6. Модель Лотки–Вольтерра

Розглянемо модель взаємодії двох популяцій, одну з яких назвемо хижаком, іншу – жертвою. Нехай x – чисельність популяції жертв, а y – чисельність популяції хижаків. Умовимося, що між особинами одного виду немає суперництва.

Припустимо, що відносний приріст жертв дорівнює $a - by$, $a > 0$, $b > 0$, де a – швидкість розмноження жертв за відсутності хижаків; $-by$ – втрати від хижаків (b – імовірність того, що при зустрічі з хижакком жертва буде з'їдена). Розвиток популяції хижаків залежить від кількості їжі (жертв). За відсутності їжі ($x = 0$) відносна швидкість зміни розміру популяції хижаків дорівнює $-c$, $c > 0$; наявність їжі компенсує спадання, і при $x > 0$ відносний приріст чисельності популяції хижаків становить $-c + dx$, $d > 0$.

Отже, система диференціальних рівнянь, що описують модель Лотки–Вольтерра, має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by)x \\ \frac{dy}{dt} = (-c + dx)y \end{cases}, \quad (3.5)$$

де $a, b, c, d > 0$.

Модель (3.5) може описувати поведінку конкуруючих фірм, зростання народонаселення, зміну чисельності воюючих армій, екологічного стану, розвиток науки та ін.

Побудуємо фазовий портрет і дослідимо динаміку популяцій системи Лотки–Вольтерра для $a = 0,1$; $b = 0,01$; $c = 0,05$; $d = 0,001$. Початкові умови: $x(0) = 50$, $y(0) = 15$ (рис. 3.7, 3.8).

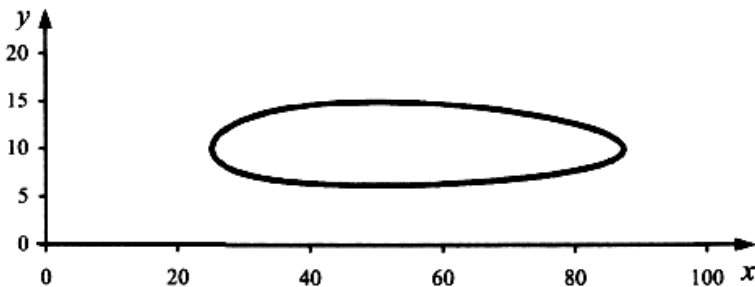


Рис. 3.7. Фазовий портрет системи Лотки–Волтерра

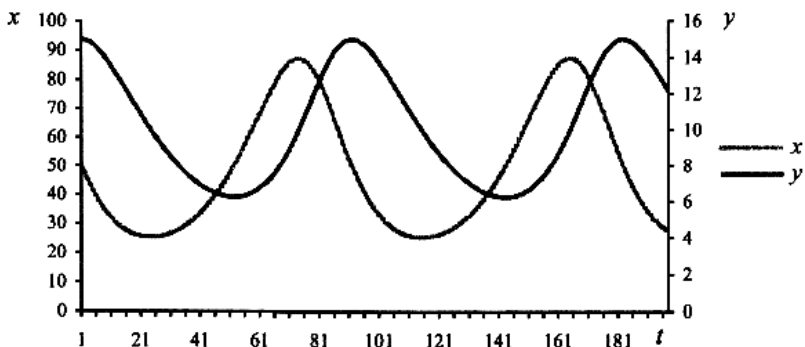


Рис. 3.8. Динаміка популяцій жертв та хижаків

Процес має коливальний характер. Кількість жертв і хижаків коливається поблизу величин $x = 50$, $y = 10$ відповідно. Мовою диференціальних рівнянь це означає, що система має стаціонарний стан $x' = 0$, $y' = 0$, що досягається в точці $x = 50$, $y = 10$. Якщо в початковий момент система перебувала в стаціонарній точці, то розв'язки $x(t)$, $y(t)$ не будуть змінюватися в часі, залишаться постійними.

Будь-який інший початковий стан призводить до періодичного коливання розв'язків. Періодичність процесу видно на фазовій площині: фазова крива ($x(t)$, $y(t)$) – замкнута лінія. Крайня ліва точка цієї кривої – це точка, в якій число жертв досягає найменшого значення. Крайня права точка – точка піку розміру популяції жертв. Між цими точками кількість хижаків спочатку спадає до нижньої точки фазової кривої, де досягає найменшого значення, а потім зростає до верхньої точки фазової кривої. Фазова крива охоплює точку $x = 50$, $y = 10$.

Слід відзначити, що розглянута модель Лотки–Вольтерра демонструє структурну нестійкість. За малої зміни параметрів моделі фазова крива перестає бути замкнутою. Модель Лотки–Вольтерра нестійка щодо збурень, оскільки її стаціонарний стан – центр. Більшість моделей є ідеалізацією дійсності: в них увага зосереджена на певних, основних, змінних і співвідношеннях між ними. Тому стійкість моделей щодо малих збурень надзвичайно важлива в застосуваннях.

Ця модель широко застосовується при моделюванні соціальних взаємодій. Наприклад, модель співпраці та конкуренції, модель творчого процесу, моделі індивідуальної поведінки та групової діяльності і т. д. У цьому посібнику модель Лотки–Вольтерра використовується в якості базової для дослідження фаз соціально-економічного розвитку людства.

5.2. Приклад моделювання і аналізу соціально-економічних процесів

5.2.1. Стійкість ринкових механізмів

Основним напрямком розвитку економічної науки є дослідження ринкової рівноваги та умов її досягнення. Складним економічним системам відповідають моделі, які є істотно нелінійними.

Нині методологія аналізу нелінійних динамічних систем сформувалася в новий науковий напрямок, орієнтований на пошуки загальних принципів еволюції та самоорганізації складних систем у різних галузях знання.

Поняття «катастрофа», «біфуркація», «граничний цикл», «дивний атрактор», «дисипативна структура», «хвиля, що біжить» і т. д., які виникли при використанні порівняно простих нелінійних моделей, дозволяють глибше сягнути суті багатьох процесів.

Недивно, що ця універсальна методологія, яка виникла порівняно недавно і добре зарекомендувала себе в природознавстві, стала проникати до традиційно гуманітарних наук, і в першу чергу – в економіку.

Складність поведінки динамічної системи обумовлена її нелінійністю і багатовимірністю. Однак складну і навіть хаотичну (квазістохастичну) поведінку можуть демонструвати і найпростіші одновимірні системи з дискретним часом, властивості яких описуються рекурентними співвідношеннями нелінійних точкових відображень.

Розглянемо узагальнену динамічну макроекономічну модель Кейнса–Фрідмена.

Класична теорія аж до перших десятиліть ХХ ст. служила досить добре і для розуміння макроекономічних процесів, і для обґрунтування державної економічної політики. Загальний принцип економічної поведінки держави було сформульовано у вигляді принципу нейтральності щодо економічної діяльності приватних осіб – як фізичних, так і юридичних. За цим принципом, держава повинна була мінімізувати несприятливі економічні наслідки своєї власної діяльності та утримуватися від безпосереднього впливу на прийняття рішень суб'єктів, які діють в умовах конкуренції.

Отже, завдання держави в галузі економічної політики полягало в забезпеченні умов функціонування конкурентного ринку, при цьому державний бюджет мав постійно орієнтуватися на рівність доходів і витрат.

Однак класична теорія не могла дати пояснень багатьох проблем, що виникли після першої світової війни, і особливо під час економічної кризи 30-х років.

Так, наприклад, згідно з нею, в 1931–1935 рр. у Великобританії ви-

мушеного безробіття не мало бути. Між тим, у цей період безробіття там жодного разу не опускалося нижче 20 %.

Для пояснення нових економічних проблем здійснювалися різні спроби вдосконалити теорію, але лише теорія англійського економіста Дж. М. Кейнса, який стверджував, що економіка не може існувати на основі саморегулювання і що держава повинна взяти на себе завдання управління економічними процесами, отримала найбільше визнання.

Це завдання, за Кейнсом, зводилося головним чином до того, щоб підтримувати і стимулювати попит, для чого необхідно створювати умови, за яких товаровиробникам було б вигідно здійснювати інвестиції та розширяти виробництво, збільшуючи кількість робочих місць і тим самим скорочуючи безробіття. За короткий термін після опублікування Кейнсом своєї теорії його ідеї були прийняті найширшими колами фахівців, а економічна політика майже всіх західних країн стала спиратися на аналіз відповідних моделей.

Слід сказати, що *кейнсіанська теорія* сукупного попиту досить складна, оскільки включає практично всі агреговані макропоказники – як грошові, так і реальні. Основним припущенням цієї теорії служить гіпотеза: «*Попит створює пропозицію*». Ця формула є помітною, а тому добре запам'ятовується, – вона є, по суті, коротким виразом іншого припущення, відповідно до якого «підприємцям вигідно розширювати виробництво (а отже, збільшувати пропозицію) за наявності надмірного попиту».

У теорії Кейнса закладено умову, згідно з якою національна економіка має потенціал для розширення виробництва (наприклад, є резерв робочої сили, обладнання, матеріалів і т. д.). На жаль, модель Кейнса часто застосовується для обґрунтування шляхів переходу деяких країн колишнього Радянського Союзу до ринку, хоча її основне припущення свідомо не виконується, і отже, модель ніякого стосунку до реальної ситуації не має.

Гіпотеза «попит створює пропозицію» дозволяє побудувати цілу систему моделей, що пояснюють функціонування ринкової економіки.

Розглянемо в якості прикладу спрощений варіант кейнсіанської моделі, який, тим не менше, дає наочне уявлення про дію ринкових механізмів. У цій моделі, яку часто називають також *моделлю мультиплікатора*, аналізується один макроекономічний ринок – ринок товарів і послуг, а стан всієї економіки описується двома змінними.

Перша змінна Y_s – вироблений національний дохід, який використовується на споживання і накопичення. Ця змінна трактується як пропозиція товарів і послуг. Друга змінна Y_d – сукупний попит на товари та послуги; вона є сумою двох складових – попиту на інвестиції I і попиту на поточне споживання C :

$$Y_D = I + C. \quad (3.6)$$

Істотним допущенням моделі є те, що попит на поточне споживання C є зростаючою функцією національного доходу: $C = C(Y_s)$. При цьому вважають, що попит змінюється повільніше, ніж національний дохід, внаслідок чого похідна функції споживання $C'(Y_s)$ – так звана гранична схильність до споживання – задовольняє умові $0 < C'(Y_s) < 1$.

Далі для спрощення аналізу моделі приймемо, що попит на поточне споживання C змінюється за лінійним законом:

$$C(Y_s) = a + cY_s, \quad (3.7)$$

де a і c – невід’ємні константи (оскільки $C'(Y_s) = c$, то $0 < c < 1$).

Нехай до якогось моменту часу T економіка перебувала в стані рівноваги, тобто при $t < T$ сукупний попит дорівнював пропозиції:

$$Y_D(t) = Y_s(t).$$

Що відбудеться, якщо з якоїсь причини в момент T сукупний попит збільшиться (наприклад, за рахунок зростання попиту на інвестиції)?

Логіка спрощеної (канонічної) моделі Кейнса, яка застосовується для отримання відповіді на це питання, така.

По-перше, зі збільшенням попиту на інвестиції станеться зсув лінії сукупного попиту, внаслідок чого система буде характеризуватися новим станом рівноваги.

По-друге, зростання сукупного попиту призведе (внаслідок дії гіпотези Кейнса «*попит створює пропозицію*») до збільшення пропозиції.

Збільшення пропозиції (національного доходу), спричинене зростанням виробництва товарів та послуг, викликає зростання значення сукупного попиту. Але оскільки гранична схильність до споживання менша за одиницю, різниця між попитом і пропозицією скорочується.

Цю різницю $E = Y_D - Y_s$ називають надлишковим попитом на товари та послуги.

Отже, невід’ємний надлишковий попит на товари і послуги викликає в кожен наступний момент часу зростання їхньої пропозиції, що призводить до скорочення надлишкового попиту. Точно так само, якщо надмірний попит є від’ємним, відбувається скорочення національного доходу.

При формалізації описаного механізму в спрощеній моделі Кейнса

зазвичай виходять з того, що національний дохід у момент $t + 1$ дорівнює сукупному попиту в попередній момент t , тобто

$$Y_s(t+1) = Y_D(t), \quad (3.8)$$

де $t = T, T + 1, \dots, J$.

Рівняння (3.8) – це ітераційний процес (одновимірне відображення).

Виникає питання, чи призведе цей процес до нового рівноважного значення національного доходу Y_E ?

Для отримання відповіді зручно ввести нову змінну

$$y_t = Y_s(t) - Y_E,$$

яка дорівнює відхиленню поточного значення національного доходу від його нового рівноважного значення Y_E .

Можна показати, що динаміка цієї змінної на підставі рівнянь (3.6)–(3.8) описується формулою геометричної прогресії:

$$y_{t+1} = cy_t. \quad (3.9)$$

А оскільки гранична схильність до споживання задовольняє умові $0 < c < 1$, то, як відомо зі шкільного курсу алгебри, рівняння (3.9) задає нескінченно спадну геометричну прогресію, внаслідок чого $y_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Тому національний дохід $Y_s(t)$ спрямовується до свого нового рівноважного значення Y_E .

Розглянута нами динаміка національного доходу має назву «*мультиплікативний процес*».

Графічно цей процес зображується у вигляді ламаної лінії за допомогою так званого хреста Самуельсона–Хансена (рис. 3.9).

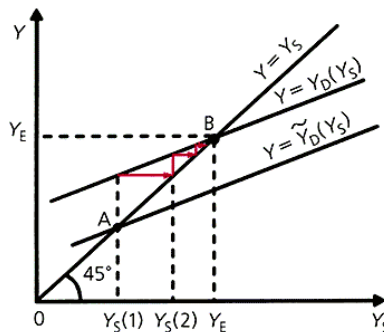


Рис. 3.9. Мультиплікативний процес

Тут лінія $Y = Y_s$ (бісектриса координатного кута) є графіком функції пропозиції, а лінія $Y = Y_D(Y_s)$, де $Y_D \cdot (Y_s) = C \cdot (Y_s) + I$, – графіком функції сукупного попиту.

Спочатку попит характеризувався прямою $Y = Y_D$, і система перебувала в стані рівноваги А. Потім попит зріс (пряма $Y = Y_D$), і в результаті ітераційного процесу система перейшла в новий стан рівноваги В.

Отже, дія гіпотези «попит створює пропозицію» приводить макроекономічну систему (в цьому випадку ринок товарів та послуг) до нового стану рівноваги. Тому в методологічному плані спрощена модель Кейнса використовується в економічній теорії для демонстрації тези про дію ринкових механізмів, які приводять систему в стан рівноваги, якщо товаровиробникам вигідно здійснювати інвестиції та розширяти виробництво за наявності надлишкового попиту. Нагадаємо, що ключова гіпотеза Кейнса «попит створює пропозицію» відображає дію саме цього механізму.

Спрощена модель Кейнса, викладена в такому вигляді практично в усіх підручниках макроекономіки, формує в читачів переконання, що макроекономічна система завжди стійка в зазначеному вище сенсі і будь-яка зміна точки рівноваги пов'язана в кінцевому підсумку зі зсувом функції попиту. Виявляється, однак, що однієї дії розглянутого механізму недостатньо: новий стан рівноваги, як ми побачимо далі, може і не настати.

5.2.2. Народження хаосу

Статистичні дані, що характеризують динаміку національної економіки, свідчать про нерівномірність розвитку: темпи економічного зростання змінюються в часі.

Відкриття Кондратьєвим «довгих хвиль економіки» (тобто періодичних спадів і підйомів темпів зростання макроекономічних показників приблизно через кожні 50 років) дало імпульс для розвитку теорії циклів; у результаті в економічній теорії було розроблено різноманітні моделі з властивістю циклічності. До них належить, наприклад, модель Самуельсона–Хікса, в якій коливання національного доходу пояснюються єдиною причиною – коливаннями сукупного попиту.

Однак дія гіпотези Кейнса може і без додаткових припущень призводити до циклічної, а то й хаотичної динаміки змінних.

В якості прикладу розглянемо таку модифікацію спрощеної моделі Кейнса, для побудови якої знову повернемося до її ключової гіпотези. Як було сказано, традиційне, більше того – загальноприйняте трактування цього принципу формалізується за допомогою рівняння (3.8).

Однак із гіпотези Кейнса аж ніяк не випливає, що значення пропозиції (національного доходу) в кожен наступний момент часу має дорівнювати значенню попиту в попередній момент. Строго кажучи, вона визначає лише напрямок зміни національного доходу, тому більш послідовною і загальною є така її формалізація: знаки збільшень національного доходу та надлишкового попиту збігаються. У цьому випадку зростання національного доходу відбувається, якщо попит вищий за пропозицію, а зниження національного доходу – якщо попит нижчий за пропозицію. Таку умову задовольняє не тільки розглянута модель, а й таке, вже нелінійне, одновимірне відображення:

$$Y_s(t+1) = Y_s(t) e^{g(Y_D(t) - Y_S(t))}, \quad (3.10)$$

де $g > 0$ – коефіцієнт реакції економіки на дисбаланс між попитом і пропозицією.

Рівняння (3.10) може бути зведене суто формально до рівняння Ріккера, яке задає ітераційний процес:

$$y_{t+1} = Ay_t e^{-y_t}. \quad (3.11)$$

Тут $y_t = qY_s(t)$, де $q = g(1-c)$, $A = e^{qY_E}$.

Рівняння Ріккера (3.11) вперше було використано в математичній біології для аналізу динаміки популяцій. Воно має властивість біфуркації подвоєння періоду, яка полягає в наступному: при порівняно малих значеннях біфуркаційного параметра A рівноважний розв'язок рівняння є стійким; при збільшенні цього параметра рівновага порушується – виникають цикли періоду 2, 4, 8 і т. д., а при ще більших значеннях біфуркаційного параметра настає детермінований хаос.

Це добре видно на рис. 3.10 і 3.11 (ліворуч), де ітераційний процес (3.11) зображений на площині при різних значеннях біфуркаційного параметра A з використанням графіків функцій $y = xAe^{-x}$ і $y = x$. Тут застосовується той же прийом, що й при розгляді динаміки національного доходу в спрощеній моделі Кейнса (див. рис. 3.9).

Тут з часом встановлюються цикли: змінна y_t набуває послідовно значень y_1 і y_2 (у першому випадку) або значень y_1 , y_2 , y_3 і y_4 (у другому).

Ліворуч зображено фазову діаграму, що характеризує динаміку змінної y_t , праворуч – відповідну зміну y_t у часі.

Розглянемо уважно рис. 3.11 (правий), де показано динаміку змінної y_t на невеликому часовому проміжку. Може скластися враження, що тут змінна y_t змінюється випадково, хаотично. Але оскільки дина-

міка системи описується детермінованим рівнянням (3.11), цю особливість стали називати *детермінованим хаосом*.

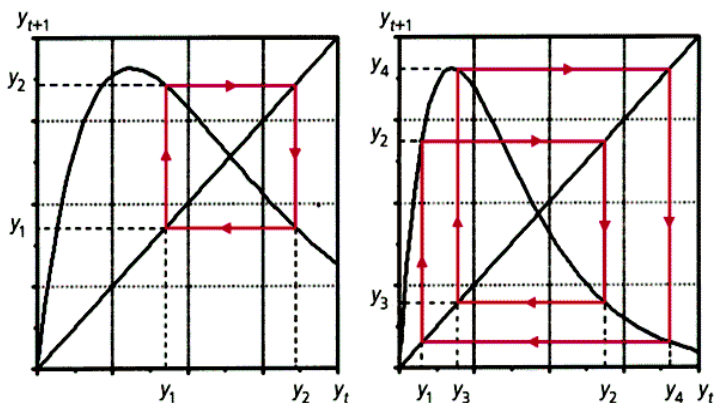


Рис. 3.10. Динамічна спіраль – цикли періоду 2 (ліворуч) і 4 (праворуч)

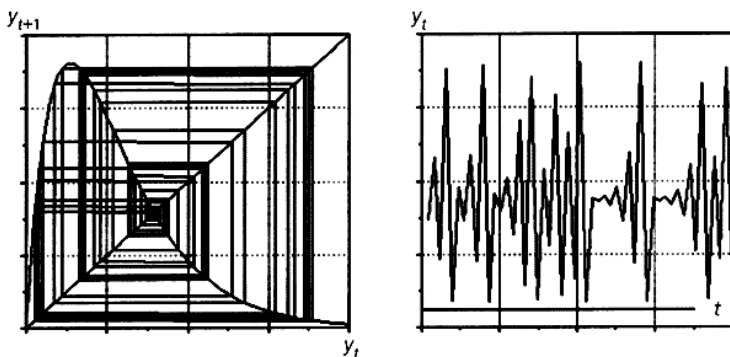


Рис. 3.11. Детермінований хаос

Для ілюстрації властивості біфуркації зручно використовувати біфуркаційні діаграми, які в разі одновимірного відображення є множиною точок площини, абсциси яких дорівнюють значенням біфуркаційного параметра, а ординати – сталим значенням цієї змінної (рис. 3.12). На рисунку видно, як зі зростанням параметра A змінюється характер розв'язку. Спочатку розв'язок відповідає стану рівноваги, потім стає періодичним, з циклічними коливаннями змінної y_t між двома значеннями (крива «роздвоюється»), і, нарешті, переходить до детермінованого хаосу (тонована область на діаграмі).

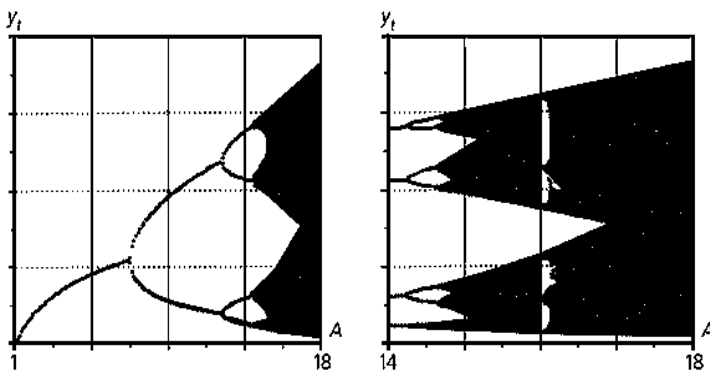


Рис. 3.12. Біфуркаційна діаграма одновимірного відображення та його збільшений фрагмент (праворуч)

Досі ми говорили про одновимірне відображення, яке виникало при моделюванні динаміки національного доходу в руслі спрощеної моделі Кейнса. Однак макроекономіка – складна система, і її розвиток характеризується багатьма змінними. Розроблено різні нелінійні динамічні моделі, в яких розглядалася динаміка ряду макрозмінних, у тому числі ставки відсотка і рівня цін. Закономірно, що ускладнення об’єкта дослідження (зокрема облік взаємовпливу товарного та грошового ринків) призводило до ускладнення моделі: збільшувалась не тільки розмірність відображення, а й число біфуркаційних параметрів.

Виконані обчислювальні експерименти свідчать, що при збільшенні розмірності моделі ускладнюється поведінка динамічної системи, що видно з порівняння рисунків 3.12 і 3.13. Однак основна властивість одновимірного відображення (3.11) – властивість біфуркації – також властива побудованим двовимірним і тривимірним точковим відображенням, моделюючим взаємовплив кінцевого продукту, рівня цін і ставки відсотка.

Тут, як і в одновимірному випадку, стан рівноваги макроекономічної системи змінюється циклами періодів 2, 4, 8 і т. д., які переходять в область хаосу; хаотична змінна змінюється на циклічну з періодами 5, 6 і вище, після чого період може знизитися, потім знову можлива хаотична поведінка і т. д. При цьому область стійкості рівноважного розв’язку досить вузька.

На рис. 3.12 на осі абсцис відкладаються значення параметра A , на осі ординат – значення змінної y_t при $4\,900 < t < 5\,000$.

На рис. 3.13 на осі абсцис відкладаються значення коефіцієнта реакції рівня цін, на осі ординат – значення ставки відсотка.

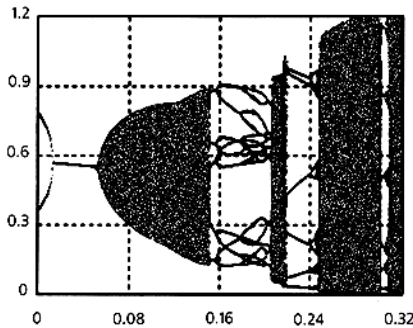


Рис. 3.13. Проекція біфуркаційної діаграми тривимірного відображення (випадок взаємовпливу ставки відсотка, рівня цін та кінцевого продукту)

Отже, дослідження економічних процесів за допомогою багатовимірних нелінійних відображень, які характеризують динаміку макроекономічних змінних, приводить до висновку, що цим процесам властиві, залежно від значень параметрів, різні динамічні режими: рівновага, циклічність і досить складна квазістохастична поведінка (детермінований хаос). При відносно невеликих значеннях коефіцієнтів реакції ціни і ставки відсотка на дисбаланс між попитом на товари та їх пропозицією, а також коефіцієнтів реакції економіки на невідповідність попиту та пропозиції, система в перспективі веде себе просто: з часом встановлюється або рівновага, або періодичні коливання з малим періодом. Однак при збільшенні навіть одного з коефіцієнтів реакції відбувається ускладнення динаміки змінних моделей. Це означає, що в загальному випадку рівноважне рішення є нестійким, а динаміка змінних узагальненої макроекономічної моделі може бути досить складною і при деяких значеннях параметрів набувати стохастичних властивостей. Слід зазначити, що складний характер розв'язків не є наслідком випадкового зовнішнього впливу, а внутрішньою властивістю використовуваної детермінованої моделі.

Більше того, аналіз динаміки розглянутих моделей дозволяє припустити: складна поведінка змінних (циклічність, хаотичність та ін.) є невід'ємною властивістю самої макроекономічної системи. Тому застосування квазістаціонарних підходів до прогнозування макроекономіки може мати сенс лише в тому випадку, коли коефіцієнти реакції відповідної динамічної моделі лежать в області стійкості її рівноважного розв'язку. Це відбувається, наприклад, при такому державному регулюванні змін відсоткової ставки та рівня цін і такій реакції еко-

номіки на відхилення системи від рівноваги, коли не допускаються різкі злети і падіння макроекономічних змінних.

Сказане означає, що квазістаціонарний підхід може бути ефективним лише при аналізі макроекономічних тенденцій економіки, яка склалася і змінюється еволюційно, в якій діють механізми державного регулювання, спрямовані не тільки на стимулювання попиту, а й на усунення відхилень макроекономічної системи від траєкторії еволюційного розвитку. Мабуть, лише в цьому випадку можна говорити про «автоматичну дію» рівноважних ринкових механізмів, які, як і «невидима рука» А. Сміта, забезпечують стійкість рівноваги макроекономічних ринків.

5.3. Елементи теорії м'якого моделювання

Далі в нашому посібнику використано текст доповіді, прочитаної академіком В. І. Арнольдом у 1997 р. на семінарі при Президентській раді РФ. Доповідь була присвячена застосуванням теорії диференціальних рівнянь у таких науках, як екологія, економіка та соціологія.

Прикладом жорсткої моделі є таблиця множення. Найпростіший приклад м'якої моделі – принцип «чим далі в ліс, тим більше дров». Можливість корисної математичної теорії м'яких моделей відкрито відносно недавно. У доповіді В. І. Арнольда на простих прикладах було показано, як ця теорія може застосовуватися в економічних, екологічних та соціологічних моделях.

5.3.1. Модель війни або битви

У простій моделі боротьби двох супротивників (скажімо, двох армій) – моделі Ланкастера – стан системи описується точкою (x, y) невід'ємного квадранта площини. Координати цієї точки, x і y – це чисельності армій. Модель має такий вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -ax \end{cases}$$

Тут a – потужність зброї армії x , а b – армії y . Простіше кажучи, передбачається, що кожен солдат армії x вбиває за одиницю часу a солдатів армії y (і, відповідно, кожен солдат армії y вбиває b солдатів армії x). Крапка над буквою тут і далі означає похідну у часі t , тобто швидкість зміни позначеної буквою величини.

Це – жорстка модель, яка передбачає точний розв'язок:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{ax}$$

$$axdx = bydy \quad ax^2 - by^2 = \text{const.}$$

Еволюція чисельностей армій x і y відбувається вздовж гіперболи, яку задано цим рівнянням (рис. 3.14). За якою саме гіперболою піде війна, залежить від початкової точки.

Ці гіперболи розділені прямою $\sqrt{ax} = \sqrt{by}$. Якщо початкова точка лежить вище цієї прямої (випадок 1 на рис. 3.14), то гіпербола виходить на вісь y . Це означає, що в ході війни чисельність армії x зменшується до нуля (за скінченний час). Армія y виграє, противника знищено.

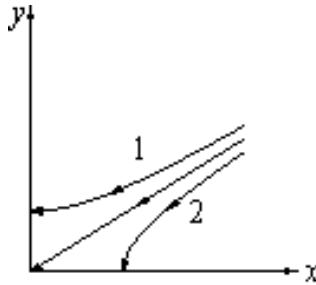


Рис. 3.14. Жорстка модель війни

Якщо початкова точка лежить нижче (випадок 2), то виграє армія x . У розділяючому ці випадки стані (на прямій) війна закінчується знищенням обох армій. Але на це потрібно нескінченно багато часу: конфлікт продовжує тліти і тоді, коли обидва супротивники вже знесилені.

Висновок моделі такий: для боротьби з удвічі більш чисельним противником потрібна в чотири рази потужніша зброя, з утричі більш чисельним – у дев'ять разів і т. д. (на це вказують квадратні корені в рівнянні прямої).

Зрозуміло, що ця людиноненависницька модель занадто ідеалізована і було б небезпечно безпосередньо застосовувати її до реальної ситуації. Постає питання: як зміниться результат, якщо модель буде дещо іншою? Приміром, коефіцієнти a і b можуть бути не строго постійними, а, скажімо, залежатимуть від x і y , і точний вигляд цієї залежності буде невідомим.

У такому разі йдеться про систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -b(x, y)y \\ \dot{y} = -a(x, y)x \end{cases},$$

для якої вже немає явного розв'язку.

Однак у математиці розроблено методи, які дозволяють зробити висновки загального характеру і без знання точного явного вигляду функцій a і b . У цій ситуації прийнято говорити про м'які моделі – моделі, які піддаються змінам (за рахунок вибору функцій a і b – у нашому прикладі).

Загальним висновком у цьому випадку є твердження про структурну стійкість похідної моделі: зміна функцій a і b змінить криві, які описують хід військових дій на площині (x, y) (які вже не будуть гіперболами і прямою, що їх розділяє), але ці поправки не впливають на основний якісний висновок.

Висновок цей полягає у тому, що стани « x виграє» і « y виграє» розділені нейтральною лінією «обидві армії знищують одна одну за нескінченний час».

Математики вважають, що топологічний тип системи на площині (x, y) не змінюється при зміні функцій a і b , – остання приводить лише до викривлення нейтральної лінії (рис. 3.15).

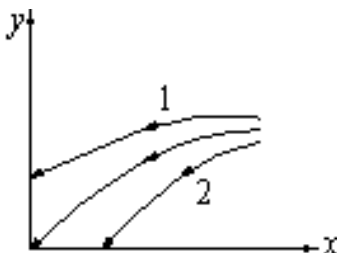


Рис. 3.15. М'яка модель війни

Цей математичний висновок не є самоочевидним. Можна уявити й іншу ситуацію, наприклад таку, яка зображена на рис. 3.16. Математична теорія структурної стійкості стверджує, що ця ситуація не реалізується, в усякому разі для не занадто патологічних функцій a і b (скажімо, вона не реалізується, якщо це – невід'ємні в нулі багаточлени).

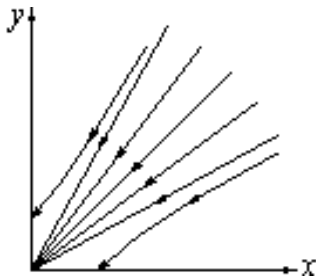


Рис. 3.16. Нереалізовна модель війни

Ми можемо зробити висновок про якісну застосовність найпростішої моделі війни для наближеного опису подій у цілому класі моделей, причому для цього навіть не потрібно знати точного вигляду жорсткої моделі: висновки справедливі для м'яких моделей. Насправді найпростіша модель дає навіть корисний кількісний прогноз: нахил нейтральної прямої в нулі визначається формулою $\sqrt{ax} = \sqrt{by}$, де a і b – значення коефіцієнтів у нулі.

Тобто принцип «якщо противників удвічі більше, то треба мати в чотири рази потужнішу зброю» справедливий на кінцевому етапі протистояння, тоді як на початковому етапі війни число 4 потрібно, можливо, відкоригувати (з огляду на значення коефіцієнтів a і b). Для цього коригування в математиці м'яких моделей теж розроблено ефективні методи (незважаючи на те, що явна формула для розв'язання рівнянь моделі не тільки невідома, а й – це строго доведено – не існує взагалі).

Є підстави вважати, що описана модель почасти пояснює як невдачі Наполеона і Гітлера, так і успіх Батия і надії мусульманських фундаменталістів.

5.3.2. Оптимізація як шлях до катастрофи

Найпростішу модель зростання $\dot{x} = kx$ запропоновано Мальтусом (для зростання населення Землі). Вона приводить, як добре відомо, до експоненційного (тобто дуже швидкого) зростання населення x із плином часу. Ця жорстка модель застосовна (зрозуміло, із застереженнями), наприклад, до розвитку науки в 1700–1950 рр. (який вимірюється, скажімо, чисельністю наукових статей) (рис. 3.17). Продовження експоненційного зростання науки в наступне століття швидко призвело б до вичерпання паперу і чорнила, причому чисельність учених мала б досягти половини населення земної кулі.

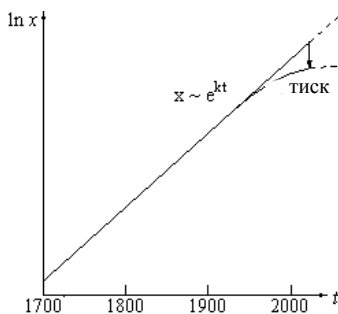


Рис. 3.17. Зростання науки

Аналогічні явища насичення відбуваються в будь-якій популяції (і, ймовірно, незабаром відбудуться з людством у цілому): коли населення стає надто великим, Мальтусівська жорстка модель з постійним коефіцієнтом зростання k перестає бути придатною. Закономірно, при дуже великих x конкуренція за ресурси (їжу, гранти тощо) призводить до зменшення k , і жорстка модель Мальтуса має бути замінена м'якою моделлю

$$\dot{x} = k(x)x$$

із залежним від населення коефіцієнтом розмноження. Найпростішим прикладом є вибір $k(x) = a - bx$, що призводить до так званої логістичної моделі (рис. 3.18):

$$\dot{x} = ax - bx^2, \text{ наприклад } \dot{x} = x - x^2.$$

Вибором системи одиниць x і t можна перетворити коефіцієнти a і b в 1. Зазначимо, що висновки, які будуть зроблені нижче, залишаються (з точністю до числових значень констант) справедливими і за будь-яких значень коефіцієнтів a і b та навіть для широкого класу моделей з різними (спадними з x) функціями $k(x)$. Іншими словами, подальші висновки стосуються всієї м'якої моделі, а не тільки жорсткої логістичної моделі.

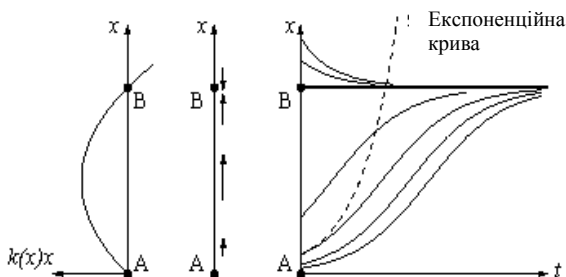


Рис. 3.18. Логістична модель

На рис. 3.18 ліворуч зображено графік функції $k(x)x$, невід'ємної між точками А і В. У центрі зображено векторне поле осі x , яка відображає всі можливі стани системи. Це векторне поле показує швидкість еволюції стану. У точках А і В швидкість дорівнює нулю: це стаціонарні стани. Між А і В швидкість невід'ємна (населення зростає), а за точкою В – від'ємна (населення зменшується). Праворуч зображено висхідна залежність населення від часу за різних початкових умов.

Модель передбачає, що з плином часу встановлюється стаціонар-

ний режим В, який є стійким: більша чисельність населення зменшується, менша – збільшується.

Логістична модель задовільно описує численні явища насичення. Поблизу А, коли населення мало, вона дуже близька до мальтузіанської моделі. Але за досить великих x (близько $1/2$ при нашому виборі коефіцієнтів) спостерігається різка відмінність від мальтузіанського зростання (позначеного на рис. 3.18 пунктиром): замість спрямування x до нескінченності чисельність населення наближається до стаціонарного значення В. Нагадаємо, що чисельність населення Землі нині наближається до 7 млрд, а стаціонарне його значення (за різними оцінками) становить 16–20 млрд чоловік.

Логістична модель є звичайною в екології. Можна уявити, наприклад, що x – це кількість риби в озері чи в Світовому океані. Подивимося, як позначиться на долі цих риб рибальство з інтенсивністю c :

$$\dot{x} = x - x^2 - c.$$

Обчислення показують, що відповідь різко змінюється при певному критичному значенні квоти відлову c . Для нашої жорсткої моделі це критичне значення $-c = 1/4$; аналогічні явища застосовні і для м'якої моделі:

$$\dot{x} = x - k(x)x - c$$

(критичне значення в цьому випадку – максимум функції $k(x)x$).

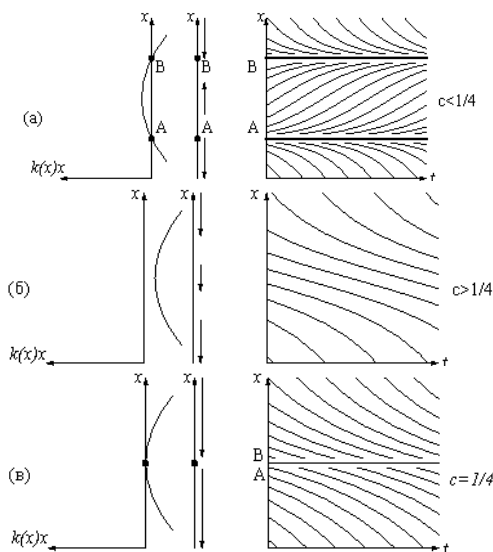


Рис. 3.19. Недолов (а), перелов (б) та оптимізація (в) рибальства

Хід еволюції числа риб x з плином часу t зображено на рис. 3.19. Якщо квота c мала, то зміни (порівняно з вільною популяцією, для якої $c = 0$) полягають у наступному.

Система має два рівноважні стани, А і В. Стан В – стійкий: популяція в цьому випадку трохи менша, ніж без відлову, але вона відновлюється при малих відхиленнях x від рівноважного значення В.

Стан А – нестійкий: якщо внаслідок якихось причин (скажімо, браконьєрства або мору) розмір популяції впаде хоч трохи нижче рівня А, то надалі популяція (хоч і повільно, якщо відмінність від А невелика) буде знищена повністю за скінченний час.

При більших за критичну квоту відлову c популяція x знищується за скінченний час, якою б великою вона не була спочатку.

Це – доля мамонтів, бізонів, багатьох китів: екологи підраховали, скільки видів гине щодня під впливом діяльності людини, і ці цифри вражають. Такі моделі описують також банкрутство фірм, концернів та держав. Небезпека знищення в цій моделі виникає тоді, коли нестійкий стан А наближається до стійкого стану В, тобто коли величина x опускається приблизно до половини вихідної стаціонарної величини популяції без відлову.

Вибір значення параметра c є надзвичайно важливим моментом управління експлуатацією популяції x . Прагнучи до збільшення квоти експлуатації c , розумна організація планування не має перевищувати критичного рівня (у нашому випадку $c \leq 1/4$). Оптимізація призводить до вибору саме критичного значення $c = 1/4$, за якого експлуатована популяція ще не знищується, але прибуток від експлуатації за одиницю часу досягає максимально можливого значення $c = 1/4$ (більший прибуток у нашій популяції протягом тривалого часу неможливий, оскільки максимальна швидкість приросту навіть у неексплуатованих популяціях становить $1/4$).

У нижній частини рис. 3.19 ми бачимо, що відбудеться при такому «оптимальному» виборі, тобто коли $c = 1/4$. Якою б не була початкова популяція $x > 1/2$, з часом вона вийде на стаціонарний режим $A = B = 1/2$. Але ця стаціонарна популяція є нестійкою. Незначне випадкове зменшення x призводить до повного знищення популяції за скінченний час.

Отже, *оптимізація параметрів плану може призводити* (і призводить у багатьох випадках, з яких наша модель – лише найпростіший приклад) *до повного знищення планованої системи внаслідок виникнення (через оптимізацію) нестійкості.*

Однак наша м'яка модель, при всій своїй очевидній примітивності, дозволяє показати спосіб боротьби з зазначеним злом. Виявляється, стійкість відновлюється, якщо замінити жорстке планування зворот-

ним зв'язком. Інакше кажучи, рішення щодо величини експлуатації (квоти відлову, податковий тиск і т. д.) слід приймати не директивно ($c = \text{const}$), а залежно від досягнутого стану системи: $c = kx$, де параметр k («диференційна квота») підлягає вибору.

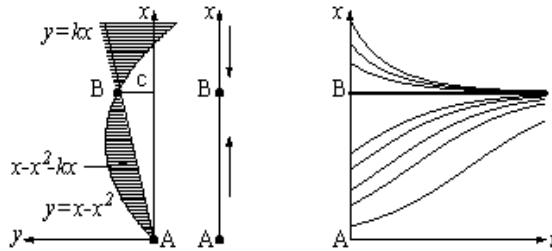


Рис. 3.20. Стійка система зі зворотним зв'язком

У цьому випадку модель набуває вигляду (рис. 3.20):

$$\dot{x} = x - x^2 - kx.$$

При $k < 1$ з плином часу встановлюється стаціонарний стан В, який є стійким. Середній багаторічний прибуток $c = kx$ у цьому стані оптимальний, коли пряма $y = kx$ проходить через вершину параболи $y = x - x^2$, тобто коли $k = 1/2$. При цьому виборі диференційної квоти k середній прибуток $c = 1/4$ досягає максимально можливого в нашій системі значення. Але, на відміну від жорстко планованої системи, система зі зворотним зв'язком є стійкою і за оптимального значення коефіцієнта k (незначне випадкове зменшення відносно стаціонарного рівня $x = B$ призводить до автоматичного відновлення стаціонарного рівня самою системою).

Більше того, незначне відхилення коефіцієнта від оптимального значення $k = 1/2$ призводить не до самознищення системи (як це було при невеликому відхиленні від оптимального жорсткого плану c), а лише до невеликого зменшення доходу.

Отже, введення зворотного зв'язку (тобто залежності прийнятих рішень від реального стану справ, а не тільки від планів) стабілізує систему, яка без зворотного зв'язку при оптимізації параметрів зруйнувалася б.

Усе сказане вище є справедливим і для м'яких моделей (з відповідним перерахунком коефіцієнтів). Слід наголосити, що саме ця незалежність від деталей жорсткої моделі (які, як правило, не дуже добре відомі) робить результати м'якого моделювання корисними.

Спроби замінити м'яке моделювання жорстким зазвичай призводять до ієрархії все більш складних і громіздких математичних побу-

дов, дослідження яких надає чудовий матеріал для великої кількості дисертацій, але реальна їхня цінність часто не перевершує по суті простих (хоча без математики і не очевидних) результатів, заснованих на аналізі саме найпростіших моделей, подібних до описаної вище.

5.3.3. Жорсткі моделі як шлях до помилкових передбачень

Важливо, щоб найпростіша модель була структурно стійкою, тобто щоб результати витримували незначну зміну параметрів і функцій, які описують цю модель. Подана вище модель цю властивість структурної стійкості має. Приклад моделі, яка не має такої властивості, – знаменита модель Лотки–Вольтерра боротьби за існування (рис. 3.21):

$$\dot{x} = ax - cxy, \quad \dot{y} = -by + dxy.$$

У цій моделі x – число карасів, y – число щук (бажаючи можуть вважати, що x – трудівники, а y – організовані злочинці). Коефіцієнт a описує швидкість природного приросту числа карасів за відсутності щук, b – природне вимирання щук за відсутності карасів. Імовірність взаємодії карася та щуки вважається пропорційною як до кількості карасів, так і до кількості щук (xy). Кожен акт взаємодії зменшує популяцію карасів, але сприяє збільшенню популяції щук (члени cxy і dxy в правій частині рівняння).

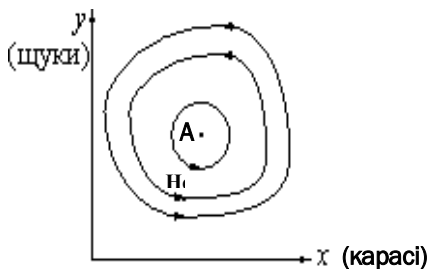


Рис. 3.21. Еволюція популяції карасів та щук у моделі Лотки–Вольтерра

Математичний аналіз цієї (жорсткої) моделі показує, що існує стаціонарний стан (A на рис. 3.21); будь-який інший початковий стан (B) призводить до періодичного коливання чисельності як карасів, так і щук, тож через якийсь час система повертається до стану B.

При незначних змінах моделі

$$\dot{x} = ax - cxy + ef(x, y), \quad \dot{y} = -by + dxy + eg(x, y), \quad e \ll 1,$$

до правих частин додаються малі члени (що враховують, наприклад, конкуренцію карасів за їжу і щук за карасів). У результаті висновок про періодичність (повернення системи до початкового стану В), справедливий для жорсткої системи Лотки–Вольтерра, втрачає силу. Залежно від виду незначних поправок f і g можливі, приміром, сценарії 1–3, які вже є структурно стійкими (див. рис. 3.22).

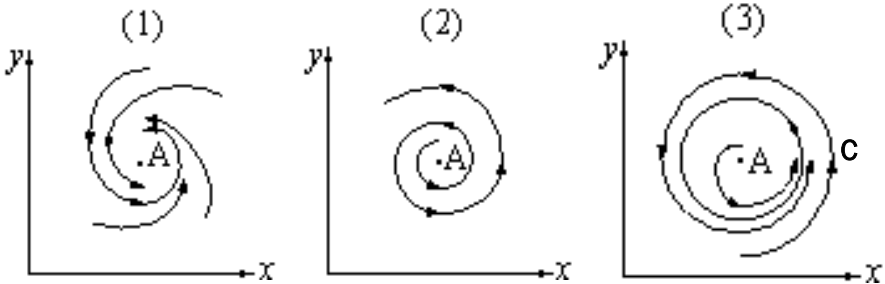


Рис. 3.22. М'яка структурно-стійка модель боротьби за існування

У випадку 1 рівноважний стан А є стійким. За будь-яких інших початкових умов через певний тривалий час встановлюється саме він.

У випадку 2 система розвалюється. Стаціонарний стан – нестійкий. Еволюція призводить то до різкого зростання чисельності злочинців, то до їх майже повного зникнення (оскільки вони так пограбували трудящих, що відбирати в останніх уже нічого). Ця система, зрештою, потрапляє в область настільки великих або малих значень x та y , що модель стає непридатною: відбувається зміна законів еволюції, тобто революція.

У випадку 3 в системі, яка перебуває в нестійкому стаціонарному стані А встановлюється з плином часу періодичний режим С (в якому, скажімо, радикали і консерватори періодично змінюють один одного). На відміну від початкової жорсткої моделі Лотки–Вольтерра, у цій моделі усталений періодичний режим не залежить від початкової умови. Спочатку незначне відхилення від стаціонарного стану А призводить не до незначних коливань поблизу А, як у моделі Лотки–Вольтерра, а до коливань цілком визначеної (і такої, яка не залежить від величини відхилення) амплітуди. Можливі й інші структурно стійкі сценарії (наприклад, з кількома періодичними режимами).

Висновок: жорстку модель завжди потрібно досліджувати на структурну стійкість отриманих при її вивченні результатів відносно малих змін моделі (які роблять її м'якою).

У випадку моделі Лотки–Вольтерра для висновку про те, який же зі сценаріїв 1–3 (або інших можливих) реалізується в цій системі, абсо-

лютно необхідна додаткова інформація про систему (про величину незначних поправок f і g у нашій формулі). Математична теорія м'яких моделей вказує, яку саме інформацію для цього потрібно мати. Без цієї інформації жорстка модель може призвести до якісно помилкових прогнозів. Довіряти висновкам, зробленим на підставі жорсткої моделі, можна лише тоді, коли вони підтверджуються дослідженням їхньої структурної стійкості.

5.3.4. Небезпека багатоступеневого управління

Явище, описане нижче, добре відоме в теорії управління технічними системами. Воно має надзвичайно загальний характер, але тут описується його найпростіша модель, в якій лише замінено технічні терміни на терміни управління.

Нехай виробництво якогось продукту x управляється керівником, який приймає рішення про швидкість виробництва: $\dot{x} = y$.

У свою чергу, поведінка керівника у управляється керівником другого рангу, який приймає рішення про те, як потрібно змінювати швидкість виробництва: $\dot{y} = z$.

Поведінка керівника другого рангу z управляється керівником третього рангу, і так далі, аж до генерального керівника (рангу n).

Генеральний керівник у нашій моделі реалізовує зворотний зв'язок: його рішення ґрунтуються не на бажанні виконати наказ начальства (як у керівників попередніх рангів), а з огляду на корисність справи. Наприклад, він може бажати досягти рівня X величини x і буде впливати на керівника попереднього рангу у невід'ємному напрямку, якщо рівень X не досягнуто, і у від'ємному – якщо він перевищений.

Наприклад, для $n = 3$ найпростіша модель матиме вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -k(x - X) \end{cases}.$$

Цю систему можна переписати у вигляді лінійного диференційного рівняння порядку n :

$$x^{(n)} = -k(x - X).$$

Рівняння цієї (жорсткої) моделі легко вирішуються в явному вигляді.

Стійкість бажаного стаціонарного стану ($x = X$, $y = z = \dots = 0$) визначається тим, чи від'ємними є речові (дійсні) корені λ характеристичного рівняння

$$\lambda^n = -k.$$

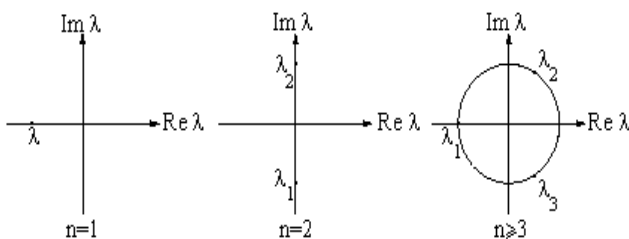


Рис. 3.23. Нестійкість багатоступеневого управління

Ці корені – комплексні числа, зображені на рис. 3.23. Вони утворюють на площині комплексної змінної λ вершини правильного n -кутника. Якщо $n > 3$, деякі вершини обов'язково лежатимуть у правій (нестійкій) півплощині ($\text{Re } \lambda > 0$). При $n = 1$ корінь $\lambda = -k$ лежить у стійкій півплощині, а при $n = 2$ корені $\lambda_1, 2$ знаходяться на межі стійкості.

Висновок. Багатоступеневе управління, що описується нашою моделлю при $n > 3$, є нестійким. Двоступеневе управління призводить до періодичних коливань, але не викликає катастрофічного наростання коливань, що відбувається при трьох- і більше ступеневому управлінні.

Справжню стійкість забезпечує тільки одноступеневе управління, за якого особа, яка управляє, більш зацікавлена в інтересах справи, ніж у заохоченні з боку начальства.

Ці висновки, зроблені на підставі аналізу найпростішої жорсткої моделі, справді витримують перевірку на структурну стійкість, за винятком лише випадку, коли $n = 2$: двоступеневе управління може виявитися як стійким, так і нестійким, залежно від деталей організації справи, якими ми знехтували при складанні нашої моделі.

Тривале і, очевидно, стійке функціонування системи багатоступеневого управління в СРСР пояснювалося, ймовірно, невиконанням директивних вказівок та існуванням «тіньової» системи заохочення керівників різних рангів в інтересах справи. Без такої реальної зацікавленості (яка в сучасних умовах уже не обов'язково забезпечується корупцією) багатоступеневе управління завжди веде до занепаду або руйнації.

5.3.5. Математичні моделі «перебудови» в СРСР

Найпростіші та найзагальніші математичні моделі аж ніяк не «лінійного» періоду в історії СРСР приводять до висновків, які можуть видатися несподіваними для управлінців, звиклих мати справу з лінійними системами, де результати пропорційні зусиллям.

Розглянемо нелінійну систему, що перебуває у сталому стійкому стані, визнаному поганим, оскільки є очевидним кращий, детально визначений стійкий стан системи, якому віддасться перевага (рис. 3.24).



Рис. 3.24. «Перевбудова» з точки зору перебудов

Ось кілька простих висновків:

1. Поступовий рух у бік кращого стану спочатку призводить до погіршення. Швидкість погіршення при рівномірному русі до цього стану зростає.

2. У міру руху від гіршого стану до кращого опір системи зміні її стану зростає.

3. Максимум опору досягається раніше, ніж найгірший стан, який треба подолати для досягнення кращого стану. Після проходження максимуму опору стан продовжує погіршуватися.

4. З наближенням до найгіршого стану на шляху перебудови опір з якогось певного моменту починає зменшуватися і, щойно найгірший стан пройдено, повністю зникає, а система починає притягатися до кращого стану.

5. Величина погіршення, необхідного для переходу в кращий стан, порівнянна з фінальним поліпшенням і зростає в міру вдосконалення системи. Слабо розвинена система може перейти до кращого стану майже без попереднього погіршення, тоді як розвинена система, через свою стійкість, на таке поступове, безперервне поліпшення не здатна.

6. Якщо систему вдасться відразу, стрибком, а не безперервно, перевести з поганого сталого стану досить близько до гарного, то далі вона буде самостійно еволюціонувати у бік гарного стану.

Цих об'єктивних законів функціонування нелінійних систем не можна не враховувати. Вище сформульовано лише прості якісні висновки. Теорія надає також кількісні моделі, але якісні висновки видаються важливішими і водночас більш надійними: вони мало залежать від деталей функціонування системи, принципи функціонування якої та чисельні параметри можуть бути недостатньо відомими.

Наполеон критикував Лапласа за «спробу ввести в управління дух нескінченно малих». Математична теорія перебудов – це та частина сучасного аналізу нескінченно малих, без якої свідоме управління складними і маловідомими нелінійними системами практично не можливе.

Теорія м'якого моделювання – це мистецтво отримувати відносно надійні висновки з аналізу малонадійних моделей. Нижче наведено ще одну модель, яка пояснює досить несподівані спостережені закони.

5.3.6. Математика і математична освіта у сучасному світі

«No star wars – no mathematics» (Нема зіркових воєн – немає математики), – кажуть американці. Той сумний факт, що з (тимчасовим?) припиненням військового протистояння математика, як і всі фундаментальні науки, перестала фінансуватися, є ганьбою для сучасної цивілізації, яка визнає тільки «прикладні» науки і поведінка якої нагадує поведінку свині під дубом.

Насправді жодних прикладних наук не існує і ніколи не існувало, як це зазначив понад сто років тому Луї Пастер (якого важко запідозрити в заняттях, не потрібних людству). За Пастером, існують лише «науки і додатки наук, зв'язані між собою, як плід і дерево, що його породило».

Досліди з бурштином і котячим хутром здавалися марними правителям та військовим XVIII ст. Але саме вони змінили наш світ після того, як Фарадей і Максвелл вивели рівняння теорії електромагнетизму. Ці досягнення фундаментальної науки окупили всі витрати людства на неї на сотні років наперед. Відмова сучасних правителів платити за цим рахунком – надзвичайно недалекоглядна політика, за яку відповідні країни, поза сумнівом, будуть покарані технологічною і, отже, економічною (а також і військовою) відсталістю.

Людство в цілому (перед яким стоїть важке завдання вижити в умовах мальтузіанської кризи) змушене буде заплатити важку ціну за короткозоро-егоїстичну політику складаючих його країн.

Математична спільнота несе свою частку відповідальності за той посушний тиск з боку урядів і суспільства в цілому, який спрямований на знищення математичної культури як частини культурного багажу кожної людини, і особливо – на знищення математичної освіти.

Вихолощене і формалізоване викладання математики на всіх рівнях стало, на жаль, системою. Виросли цілі покоління професійних математиків і викладачів математики, які вміють тільки це і не уявляють якогось іншого викладання цієї дисципліни.

Вже Пуанкаре відзначав, що є тільки два способи вивчити дробі – розрізати (хоча б подумки) пиріг чи яблуко. При будь-якому іншому

способі навчання (аксіоматичному або алгебраїчному) школярі вважають за краще «складати» чисельники з чисельниками, а знаменники – зі знаменниками.

Математика є експериментальною наукою – частиною теоретичної фізики і членом родини природничих наук. Основні принципи побудови та викладання всіх цих наук можна застосувати й до математики. Мистецтво строгого логічного мислення і можливість отримувати цим методом надійні висновки не повинно залишатися привілеєм Шерлока Холмса – кожен школяр мусить опанувати цим умінням. Уміння складати адекватні математичні моделі реальних ситуацій має становити невід’ємну частину математичної освіти. Успіх забезпечує стільки застосування готових рецептів (жорстких моделей), скільки математичний підхід до явищ реального світу. При всьому величезному соціальному значенні обчислень (і computer science, тобто інформатики), сила математики не в них, і її викладання не повинно зводитися до обчислювальних рецептів.

В історії Росії був прем’єр-міністр з математичною освітою (закінчив Санкт-Петербурзький університет з математики в школі Чебишева). Ось як він описує різницю між м’яким і твердим математичним моделюванням:

«Серед математиків є два типи людей: 1) математики-філософи, тобто математики вищої математичної думки, для яких цифри та обчислення є ремеслом; для цього типу математиків цифри та обчислення не мають ніякого значення, їх захоплюють не цифри та обчислення, а самі математичні ідеї. Одним словом, це математики, так би мовити, чистої філософської математики; 2) навпаки, є такі математики, яких філософія математики, математичні ідеї не хвилюють, які всю суть математики вбачають в обчисленні, цифрах і формулах...

Математики-філософи, до яких належу і я, завжди ставляться з презирством до математиків-обчислювачів, а математики-обчислювачі, серед яких є багато вчених дуже знаменитих, дивляться на математиків-філософів як на людей, у певному сенсі «схиблених».

Нині ми знаємо, що описані Вітте відмінності мають фізіологічне походження. Наш мозок складається з двох півкуль. Ліва відповідає за множення многочленів, мови, шахи, інтриги і послідовності силогізмів, а права – за просторову орієнтацію, інтуїцію і все необхідне в реальному житті. У «математиків-обчислювачів», за термінологією Вітте, гіпертрофована ліва півкуля, зазвичай за рахунок недорозвиненості правої. Це захворювання становить їхню силу (згадаймо «Захист Лужина» Набокова). Але домінування математиків цього типу і призвело до того засилля аксіоматичної-схоластичної математики, особливо у викладанні (у тому числі і в середній школі), на яке суспільство при-

родно і законно реагує різко негативно. Результатом стала повсюдна відроза до математики і прагнення всіх правителів «помститися» за перенесені в школі приниження і знищити її.

М'яке моделювання вимагає гармонійної роботи обох півкуль мозку. Після закінчення університету Вітте не знайшов роботи за фахом і прийняв пропозицію приватної компанії стати начальником дистанції на Південно-Західній залізниці. Для зайняття цієї посади йому довелося пройти тижневе стажування на посаді кожного зі своїх підлеглих (стрілочника, колійного обхідника, роздавальника багажу, квиткового касира, кочегара, машиніста, начальника станції) – неоціненний досвід для майбутнього прем'єр-міністра.

Одного разу швидкість царського потяга, який прямував до Криму, за наказом Вітте на його дистанції було знижено. Незважаючи на обурення Олександра III, машиніст підкорився не царському наказу, а наказу начальника своєї дистанції. Коли потяг перейшов на наступну, вже не підпорядковану Вітте, дистанцію, швидкість було, зрозуміло, підвищено. Незабаром царський поїзд зійшов з рейок і перекинувся (катастрофа біля станції Борки). Цар запам'ятав ім'я непокірного начальника дистанції, і Вітте був призначений міністром (шляхів сполучення), а згодом став і прем'єр-міністром. З його ім'ям пов'язана вся грандіозна епоха «розвитку капіталізму в Росії», в тому числі – будівництво діючої й нині мережі залізниць.

Але Вітте краще розбирався в реальному житті країни та в проблемах економіки і техніки, ніж у політичних інтригах (до яких більший талант мають люди «лівопівкульні»). З приходом до влади діячів на зразок Распутіна його відправили у відставку. Вітте знову «запрошували» до влади для ліквідації критичних ситуацій, створених політиками (російсько-японська війна, революція 1905 року); і можливо, якби Вітте залишався при владі в Росії протягом наступного десятиліття, вітчизняна історія була б зовсім іншою...

Звичайно, сила Вітте полягала аж ніяк не в застосуванні якоїсь математики («обчислення»), а в тому способі мислення, який він називає «математикою-філософією» і який змушує людину з математичною освітою розмірковувати про всі реалії навколишнього світу за допомогою (свідомого або несвідомого) м'якого математичного моделювання.

Ідея про необхідність такого мислення для успіху в будь-якій економічній чи виробничій діяльності (крім, можливо, політичних інтриг) була добре зрозуміла вже сто років тому.

На жаль, і в наш час залишаються актуальними слова класика математичної економіки Парето. Економісти, які не знають математики, перебувають у становищі людей, що бажають вирішити систему рів-

нянь, не знаючи ні того, що вона собою являє, ні навіть того, що являє собою кожне вхідне в неї одиничне рівняння.

Висновки: плановане в усіх країнах придушення фундаментальної науки і, зокрема, математики (за американськими даними, на це їм потрібно років 10–15) принесе людству (і окремим країнам) шкоду, яку можна порівняти зі шкодою, заподіяною західній цивілізації (та Іспанії) багаттями інквізиції.

Математична освіта має бути невід’ємною частиною культурного багажу кожного школяра. Але вона не повинна жодним чином зводитися до рецептур (на зразок таблиці множення чи Windows).

Основною метою математичної освіти має стати набуття вміння математично досліджувати явища реального світу, вміння, так добре описаного Вітте в його характеристиці «математики-філософії» і так блискуче використаного ним у зовсім не математичній діяльності. Ми-стецтво складати і досліджувати м’які математичні моделі є найважливішою складовою частиною цього вміння.

5.4. Моделі нелінійної економічної динаміки з урахуванням швидкості встановлення змінних

Загальна модель економічної динаміки (ЕД) з різними швидкостями встановлення має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda^j f(x) \text{ або } \dot{x}_i = \lambda^j f_i(x_1, \dots, x_n), \\ i &= \overline{1, n}, \quad j = -1, 0, 1, \dots, m, \quad n \geq m, \end{aligned} \quad (3.12)$$

де x_i – компоненти вектора x економічних (соціальних) змінних монетарних, кількісних або технологічних;

f_i – функції, що безперервно диференціюються;

λ – параметр, який визначає ступінь швидкості встановлення економічних змінних (ЕЗ). Для простоти будемо вважати, що параметр λ набуває невеликих значень.

У різних економічних теоріях швидкості встановлення одних і тих же ЕЗ можуть бути дуже різними, тобто швидкості встановлення ЕЗ по-різному трактуються економістами. Швидкість установлення ЕЗ визначається багатьма факторами і, зокрема, тісно пов’язана з економічним устроєм у країні. Зміна структури в економіці (тобто перехід «від капіталізму до соціалізму» або «від соціалізму до капіталізму») завжди викликає зміни у швидкостях установлення ЕЗ.

З точки зору «чистої» економіки, всі економічні системи в світі є змішаними – в тому сенсі, що немає країн з суто плановою економікою (ПЕ) або ідеальною конкурентною економікою (КЕ), хоча ступінь

перемішування для різних країн різних. А який цей ступінь перемішування? Тобто, яким є співвідношення ПЕ \oplus КЕ, де \oplus – символ перемішування.

5.4.1. Окремі моделі нелінійної економічної динаміки

Динамічна модель Вальраса (ДМВ):

$$\begin{aligned}\dot{k} &= \lambda^{-1} f(k, p, z), \quad \dot{p} = g(p, k, z), \\ \dot{z} &= \lambda h(z, k, p),\end{aligned}\tag{3.13}$$

де k – кількісні змінні (величина капіталу та зайнятість);
 p – монетарні змінні (рівень заробітної плати і ціни);
 z – технологічні змінні;
 λ – малий параметр. У цьому випадку k, p, z – векторні змінні.

Якщо $\lambda \approx 0$, то технологія – інваріант, тобто її можна трактувати як постійний параметр і при цьому $f(k, p, z) = 0$ або $f(k, p) = 0$.

Звідси $k = \tilde{f}(p)$ і $\dot{p} = g(p, k) \equiv g(p, \tilde{f}(p)) = \tilde{g}(p)$.

Отже, вся динамічна система обумовлюється зміною монетарних змінних.

Динамічна модель Маршалла (ДММ):

$$\begin{aligned}\dot{k} &= f(k, p, z), \\ \dot{p} &= \lambda^{-1} g(p, k, z), \\ \dot{z} &= \lambda h(p, k, z).\end{aligned}\tag{3.14}$$

У цій моделі при $\lambda \approx 0$ динаміка системи визначається змінами кількісних змінних, тоді як технологія залишається постійною, а монетарні змінні стають функціями кількісних змінних, тобто $g(p, k) = 0$.

Динамічна модель Шумпетера (ДМШ):

$$\begin{aligned}\dot{k} &= f(k, p, z) \\ \dot{p} &= g(k, p, z) \\ \dot{z} &= \lambda h(p, k, z)\end{aligned}\tag{3.15}$$

Динамічна модель Кейнса (ДМК) на короткому інтервалі часу:

$$\dot{k} = f(k, p, z),$$

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \lambda g(k, p, z), \\ \dot{z} &= \lambda h(p, k, z).\end{aligned}\tag{3.16}$$

Динамічна модель Тобіна (ДМТ) – монетарне наближення:

$$\begin{aligned}\dot{k} &= f(k, p, z), \\ \dot{p} &= g(p, k, z), \\ \dot{z} &= \lambda^j h(p, k, z),\end{aligned}\tag{3.17}$$

де $j = 0$ або 1 (у різних авторів).

Стандартна неокласична модель зростання:

$$\begin{aligned}\dot{k} &= f(k, p, z), \\ \dot{p} &= \lambda^{-1} g(p, k, z), \\ \dot{z} &= \lambda^j h(p, k, z) \quad j = 0 \text{ або } 1\end{aligned}\tag{3.18}$$

Варіант загальної моделі динаміки поведінки людини:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda f(x, y, t), \\ \dot{y} &= g(x, y, t), \\ \dot{z} &= \lambda^j h(p, k, z) \quad j = 0 \text{ або } 1,\end{aligned}\tag{3.19}$$

де λ – малий параметр;

x – повільні змінні (ставлення до грошей або матеріальних цінностей, до кохання, дружби та праці);

y – швидкі змінні (набір предметів споживання, розподіл часу, зарплати, вибір місця проживання та якості житла і т. д.).

Функції f та g явно залежать від часу, тому що зовнішні умови мінливі.

5.4.2. Узагальнена модель динаміки економіки

Нижче наведено узагальнену модель динаміки (УМД) економіки в цілому, без урахування випадкових впливів на систему.

Отже, припустимо, що система складається з n підприємств (включаючи фірми і домогосподарства). Економічна поведінка кожного підприємця характеризується m -вимірним вектором

$x_i = (x_{1i}, \dots, x_{mi}) \ (i = \overline{1, n})$. Змінні x_{ij} можуть відображати, наприклад, реальні споживання або виробництво підприємця.

Нехай також існують r макроскопічних змінних $y_k, \ k = \overline{1, r}$, які відображають ціни, зарплату, ставку відсотка т. д. Змінні y_k і x_{ij} залежать від часу.

Приміром, у кожен момент часу кожен підприємець має ідеально повну інформацію про макроскопічні параметри. Передбачається також, що кожен підприємець приймає рішення про споживання (виробництво) на базі поточного споживання (виробництва) і значень макроскопічних змінних.

Знехтувавши «прямими взаємодіями» між підприємцями, динамічну поведінку i -го підприємця можна описати у вигляді:

$$\dot{x}_{ij} = \lambda f_{ij}(x, y), \quad (3.20)$$

де λ – параметр швидкості встановлення змінних, а динаміка макроекономіки описується системою рівнянь вигляду:

$$\dot{y}_k = g_k(x, y), \quad (3.21)$$

де g_k – безперервно диференційована функція.

Отже, УМД економіки є поєднанням (3.20) та (3.21).

Якщо, наприклад, λ достатньо велике, а y_k – ціна i -го товару, то

$$\begin{aligned} f_{ij}(x, y) &= 0, \\ \dot{y}_k &= g_k(x, y). \end{aligned}$$

Отже, динамічна модель економіки містить тільки динаміку цін.

Розмірність повної УМД зазвичай дуже висока. Оскільки система потенційно нестабільна, то з теорії синергетичної економіки відомо, що вона може виявляти дуже складну поведінку. Однак, застосовуючи *принцип підпорядкування Хакена* (ППХ) і *теорему про центральну многостатність (многovid)* (ТЦМ), можна звести цю багатовимірну складну задачу до відносно низьковимірної, так що стає можливим зрозуміти деякі властивості таких динамічних систем.

ГЛАВА 6. СИНЕРГЕТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І УПРАВЛІННЯ СКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ

6.1. М'яке нелінійне управління: синергетичний підхід в управлінні

Синергетичний підхід до управління складними системами допомагає відповісти на найважливіші методологічні питання сучасного управління. Не є таємницею, що традиційний, панівний досі підхід до управління ґрунтується на лінійному уявленні про функціонування систем природи і суспільства. Відповідно до цього уявлення, результат зовнішнього впливу є однозначним і лінійним, прямо пропорційним наслідком зусиль, що відповідає схемі «керуючий вплив – бажаний результат». Чим більше вкладаєш енергії та докладаєш зусиль, тим нібито більшою є віддача, результат – кращим.

Однак ця позиція не тільки спрощено відображає процес управління – вона може виявитися небезпечною. Прагнення до напористої, насильницької переробки «всього і вся» може призвести до зворотного – до непередбачуваних, стихійних наслідків, власне, до небажаного кризового стану, який важко подолати. З таким ефектом бумеранга стикається той керівник, який не враховує зворотних дій соціальних систем, неоднозначності та нелінійності зворотних зв'язків.

Знання принципів самоорганізації складних систем, які досліджує синергетика, як і кожне нове наукове знання взагалі, дає нам надії. Воно відкриває нові способи підвищення ефективності управління соціальними організаціями. Одна з ключових у синергетиці ідей – це ідея про те, що існує поле можливих шляхів розвитку для будь-якої складної системи, *спектр структур – атракторів розвитку*, яке потенційно міститься в ній, – «мовчазне знання» цієї системи. Вже одна ця важлива ідея дозволяє керівникові більш оптимістично дивитися в майбутнє і розуміти, в якому напрямку застосовувати власні зусилля для ефективного управління своєю організацією. Чому?

По-перше, якщо ми усвідомили, що існує безліч шляхів розвитку, що той чи інший шлях не визначений, не єдиний, то це означає, що в керівника завжди є право вибору кращого, оптимального, найбільш пріоритетного для цієї організації шляху.

Майбутнє не однозначно визначається існуючими початковими умовами нелінійної системи. Завтрашній день не можна передбачити, спираючись тільки на попередній, накопичений нами досвід. Це сумно і кепсько, але це водночас і добре – відкриваються простори для творчості, пошуку нових напрямків до успіху. Отже, перед кожним керівником стоїть завдання вибору оптимального шляху розвитку, оптимальної організації своїх дій. Цей оптимальний шлях потрібно знайти,

ним необхідно управляти!

По-друге, слід розуміти, що хоча шляхів розвитку може бути дуже багато, їхня кількість усе ж не є нескінченною. Отже, в конкретній соціальній системі чи організації можна реалізувати далеко не всі ті напрямки дій, які є бажаними особисто для керівника. Він повинен чітко усвідомлювати все це, щоб «не наламати дров» у своїх керівних діях.

По-третє, знання обмежень, тобто того, що взагалі не можна здійснити в даній системі, знання своєрідних «принципів заборони» – це вже дуже цінне знання. Ми знаємо, наприклад, що не можна винайти вічний двигун, отримувати енергію з нічого і т. д. Багато чого в цьому світі зробити не можна, тому що це суперечить природі реальності та її законам. Знаючи набір жорстких і ймовірних обмежень, керівник не буде витрачати даремно свої матеріальні та духовні ресурси, час, ентузіазм, енергію підлеглих йому людей.

Принцип резонансу можна сформулювати інакше: *«Дій у потрібному місці та в потрібний час»*

Конфуціанський мудрець застерігає володаря одного з царств: «Зараз воно (Небо) спостерігає за вами, тому не поспішайте з розробленням планів. Необхідно чекати настання сприятливого часу, бо того, хто силою прагне до успіху, чекають нещастя ... При сприятливому ж моменті не можна виявляти недбалість, бо сприятливий момент не приходить двічі. Якщо ж сприятливий час настає, але його не використовують для досягнення мети, Небо відвертає своє обличчя». В образі Неба, безстороннього божественного начала, виступає загальне активне середовище. Вона містить у собі безліч потенційних станів і актуалізується не без впливу дій людей у Піднебесній. Відгук середовища на зовнішній вплив визначається відповідністю або невідповідністю впливу потенціалу середовища. Отже, йди природним шляхом (дао) – і результат буде сприятливим, якщо ж ти будеш опиратися природі речей – потрапиш у халепу.

Йдеться, власне, про м'яке управління – управління за допомогою розумних і належних дій. Слабкі, але відповідні, резонансні впливи надзвичайно ефективні. Вони повинні відповідати внутрішнім тенденціям розвитку складної системи. Правильні резонансні впливи, тобто впливи своєчасні й доречні, дії тут-і-тепер, можуть вивільнити потужні внутрішні сили і можливості окремої людини або соціальної організації.

Отже, керувати в більшості випадків слід м'яко, але розумно, тоді в управлінні можна домогтися великих результатів.

У «Дао де цзін» сказано: «Те, що треба стиснути, спершу розтягнемо. Те, що треба послаблювати, ми зміцнимо спершу. Те, що піде у

відходи, спочатку виростимо. Те, що відняти належить, спочатку подаруємо. Таким є Найтонше Світло, яке перемагає, діючи м'яко, долає грубе і сильне. Рибі краще не виходити з води, а знаряддя царські ріжучі краще нікому не показувати».

«Малим викличеш велике, але великим не завжди досягнеш і малого». У цьому правилі найбільш яскраво виражається принцип нелінійності. Великі витрати енергії в нелінійних системах не гарантують отримання пропорційного їм результату. З іншого ж боку, незначний або навіть іноді випадково здійснений правильний вплив здатен резонансно розгойдати систему, пробудити дремаючі в середовищі потенції. Він дієвий, якщо «вколює» середовище в потрібну точку.

Оптимізація управління полягає в тому, щоб уміти утримувати управляючі зусилля за другорядними функціями даної системи в межах «золотої середини» і максимізувати їх за головними функціями системи. У такому випадку екстремістами управління слід називати людей, які, ставши «біля керма», максимізують свої зусилля безладно і, як правило, за другорядними напрямками, витрачаючи даремно власні сили, а також сили та енергію персоналу організації. Прислів'я «Сила є – розуму не треба!», вживане зазвичай в іронічному значенні, говорить про те, що саме розум в управлінні і потрібен найбільше. Резонансний вплив, по суті, означає, що важлива не величина, не сила керуючого впливу на систему, а його правильна просторова організація (топология), «архітектура», його належна симетрія.

По-четверте, відповідно до загальних закономірностей самоорганізації, в управлінні необхідно навчитися орієнтуватися на власні природні тенденції розвитку самої природи цієї організації, «вирахувати» і розуміти її суть. Тоді керівник знатиме, як потрапляти в резонанс із діями керованої ним організаційної структури. І тоді не виникатиме потреби в насильстві над суттю та природою даної організації.

Мистецтво м'якого, нелінійного управління полягає в способах самоврядування і самоконтролю.

«Дозволь системі самій організувати себе!» – ось у чому суть.

Головна проблема полягає в тому, як управляти не керуючи, як малим резонансним впливом підштовхнути систему на один із власних і сприятливих для суб'єкта шляхів розвитку, як забезпечити самоврядний і самопідтримуваний розвиток. Фактично ці синергетичні засади узгоджуються з відомими на Сході правилами поведінки, перш за все з принципом ненасильства. За вченням даосизму, правителі у своїй діяльності повинні слідувати природному закону (дао). «Добрий той правитель, який керує якомога менше», – стверджували даоські мудреці.

«Думай глобально, щоб ефективно діяти локально!» – ось гасло

ефективного управління в епоху глобалізації.

Нелінійний синтез – це об'єднання не жорстко встановлених, фіксованих структур, а структур, які мають різний «вік» і знаходяться на різних стадіях розвитку. Це – конфігураційно правильне (резонансне) поєднання елементів «пам'яті», причому «пам'яті різної глибини».

Принципи нелінійного синтезу, коеволюції дисипативних структур у складне ціле, розроблені В. І. Арнольдом спільно з С. П. Курдюмовим, можуть бути підсумовані у вигляді наступних основних позицій:

- саме загальний темп розвитку є ключовим індикатором зв'язку структур в єдине ціле, показником того, що ми маємо справу з цілісною структурою, а не з конгломератом розрізнених фрагментів;

- існує багато способів складання цілого з частин;

- ціле збирається не по крихтах, а великими шматками, великими блоками, воно збирається не з окремих елементів, скажімо атомів, а з проміжних середовищ, що вибудовуються – у випадку прогресивної еволюції – у вигляді ієрархії середовищ, які мають різну нелінійність;

- структури-частини входять у ціле не в незмінному вигляді, а певним чином трансформуються, деформуються відповідно до особливостей еволюційного цілого;

- для об'єднання «різновікових структур» (хоча б як структур минулого, сучасного і майбутнього) в єдину стійку еволюціонуючу структуру, необхідно порушити симетрію; шлях до зростаючої складності світу – це шлях збільшення кількості моментів порушення симетрії в конфігурації складних структур;

- для утворення стійкої цілісної структури є важливою належна топологія з'єднання структур (скажімо, у випадку структури горіння нелінійного дисипативного середовища – правильний конфігураційний розподіл максимумів і мінімумів інтенсивності горіння структури);

- для складання нової складної структури, для перекристалізації середовища потрібно створити ситуацію «на межі хаосу», коли незначні флуктуації здатні ініціювати фазовий перехід, скинути систему в інший стан, задати інший хід процесу морфогенезу, інший спосіб збирання складного цілого. «Сама природа коеволюції полягає у досягненні цієї межі хаосу» (С. Кауфман).

Зауважимо, що коеволюція – не просто процес припасуння частин одна до одної при утворенні складного цілого, а їх й процес їхнього резонансного взаємного розташування та синхронізації.

6.2. Глобальне моделювання і аналіз світової динаміки

У наш час широко обговорюється коло проблем, пов'язаних із глобалізацією. Під глобалізацією часто розуміють нинішню тенденцію до збільшення свободи руху капіталів і робочої сили, до зростання

геоекономічної залежності різних країн та регіонів. Із системної точки зору первинним у цьому процесі є не товари, фінанси і люди, а інформація, точніше кажучи, «правила гри». Відмінною рисою цих правил є те, що вони диктують спосіб дій і самовідтворюються. До таких правил можна віднести, наприклад, вірування, смисли і цінності, мову, прийняті норми, поведінкові стратегії. У глобалізації головну роль відіграють процеси поширення ліберально-демократичних цінностей, лібералізації економічної політики, уніфікації законодавства, американізації культури. У світовій історії схожа «експансія інформації» мала місце вже не раз. При цьому в більшості випадків відбувається «уніфікація», коли, врешті-решт, залишається один тип інформації. Різноманітність знищується, поступаючись місцем єдності. Ці процеси можуть бути описані в рамках комп'ютерних моделей, запропонованих Д. С. Чернавським, С. Ю. Малковим і А. С. Малковим.

При розгляді нинішніх реалій у розвитку світу, на наш погляд, природно виділити провідні змінні («параметри порядку» – в термінах нелінійної динаміки). Очевидно, на найвищому, узагальнюючому рівні їх три. *Перший* – кількість людей, які живуть на Землі. Зрозуміло, що у згорнутому вигляді вона відображає підсумок пройденого історичного шляху, а також показує, який обсяг ресурсів необхідний людству. *Другий* параметр відображає технологічний рівень, досягнутий світовою спільнотою. Технології – це кошти, які жорстко визначають коридор можливостей у досягненні поставлених суспільством цілей. *Третій* параметр характеризує самі цілі, «великі проекти», які свідомо чи несвідомо реалізовує людство. Аналіз змін, що відбуваються, і сучасних тенденцій засвідчує, що динаміка кожного з цих параметрів істотно змінилася за останні десятиліття.

Як стверджують дані палеодемографів, чисельність населення Землі протягом останніх 100 тисяч років зростала за гіперболічним законом. Інакше кажучи, швидкість зміни чисельності населення планети була пропорційна квадрату числа людей. Протягом останніх десятиліть цей закон кардинально змінився: швидкість зростання чисельності жителів планети зменшилась. Це явище отримало назву демографічного переходу. Названий перехід пов'язаний не з нестачею ресурсів, а зі зміною поведінкових стратегій (особливо помітно впала народжуваність в економічно розвинених країнах). Побудовані глобальні демографічні моделі прогнозують стабілізацію населення світу на рівні 10–12 млрд людей у другій половині нинішнього століття – за сприятливого сценарію розвитку світової системи.

Питання про причини демографічного переходу є дискусійним. Наприклад, професор С. П. Капіца вважає, що причиною нелінійної залежності швидкості росту народонаселення від кількості людей у по-

передні історичні епохи була інформаційна взаємодія. За цією теорією, створення і передача від покоління до покоління інформації полегшували людям освоєння доступної їм екологічної ніші або її розширення. Інформаційна взаємодія залежить не від чисельності учасників, а від числа зв'язків між ними. Останнє ж, очевидно, пропорційне квадрату числа учасників.

Демографічний перехід, на думку С. П. Капіци, обумовлений тим, що при дуже високих темпах зростання кількості населення обмежуючу роль починають відігравати запізнювання, пов'язані з часом вступу у вік статевої зрілості.

Інший підхід був запропонований А. В. Подлазовим. Цей підхід спирається на теорію С. П. Капіци, використану в ній фактичну базу, але переносить акцент на технологічний імператив. Відповідно до нього, ключову роль у нелінійному зростанні чисельності людства відігравали життєзберігаючі технології, які дозволяли зменшити смертність і тим самим подовжити тривалість життя людини. За такого підходу демографічний перехід виявляється обумовленим насиченням цих технологій. Іншими словами, технологічний прогрес і економічне зростання тривають, але їхній вплив на тривалість життя стає все меншим. Як бачимо, ці глобальні моделі вказують на очікувані обмеження зростання та пов'язані з ними структурні зміни.

Схожі висновки давала вже перша глобальна модель, побудована в 1970–1971 рр. Її автором був професор Дж. Форрестер, який багато років займався створенням методології міждисциплінарних досліджень складних систем, що отримала назву «системна динаміка». На основі цієї методології, апробованої раніше (для дослідження промислових підприємств і процесів урбанізації), було створено динамічну модель світової системи. Навіть через тридцять років підхід Форрестера до побудови моделі видається досить цікавим і розумним, а сама модель встигла стати класикою і посісти почесне місце в низці глобальних моделей.

Модель Форрестера, по суті, відкрила світову динаміку – новий напрямок математичного моделювання в розв'язанні насущних завдань, які знаходяться на стику гуманітарних і природничих наук, пов'язаних з аналізом і прогнозом основних світових тенденцій. Підхід, запропонований у цій моделі, отримав подальший розвиток. Праця Форрестера дала важливий поштовх до появи нових досліджень, що згодом отримали назву «глобальне моделювання».

У згаданій моделі світ розглядається як єдина система різних взаємодіючих факторів. Форрестер виділяє *п'ять основних змінних*, що змінюються з часом і характеризують стан усього світу. Це – населення, основні світові фонди, частка фондів у сільському господарстві,

рівень глобального забруднення і запас світових невідновлюваних природних ресурсів. Впливи одних змінних на інші задаються через допоміжні фактори. Для цього спочатку будується діаграма причинно-наслідкових зв'язків, яким потім надається кількісний характер (вид функціональних залежностей). Це робиться або за відомими даними, або на підставі експертних оцінок, або виходячи з якихось розумних гіпотез. Динаміку цих п'яти змінних Форрестер і досліджує. Для них складаються звичайні диференційні рівняння. У підсумку виходить проста модель, яку досить легко аналізувати.

Результати моделювання показали, що загальне системне зростання рано чи пізно змінюється загальною кризою. Це відбувається, перш за все, через вичерпування ресурсів. У цьому випадку спрацьовує наступний ланцюжок причинно-наслідкових зв'язків: зменшення запасу ресурсів веде до зниження рівня життя, це, в свою чергу, призводить до зростання смертності та зниження інвестицій, а звідси, як наслідок, – різке скорочення чисельності населення і падіння промислового виробництва (фондів).

Якщо спробувати знизити споживання ресурсів (або збільшити їх запаси), то криза настає внаслідок великих забруднень. Тут нагадує про себе інший ланцюжок зв'язків: зростання забруднення призводить до падіння народжуваності та зростання смертності, що, знову-таки, веде до скорочення населення і занепаду промисловості (падіння фондів). Ці два ланцюжки зв'язків і викликають кризу в процесі еволюції системи. Завжди діє або перший ланцюг, або другий, а спроби їх «придушити» шляхом зміни відповідних коефіцієнтів лише відтягують кризу на кілька десятків років (тобто призводять до тимчасового полегшення), але кардинально змінити якісну картину вони не можуть.

Отже, з моделі випливає зрозумілий висновок: за збереження сучасних тенденцій розвитку суспільства серйозна криза у взаємовідносинах людини і навколишнього середовища є неминучою. Зростання не може тривати нескінченно довго, рано чи пізно воно буде зупинено. Питання, на яке шукав відповідь Форрестер: яким чином зростання припиниться? Оскільки відповідь, яку давала модель, вченого не задовольняла, він висунув концепцію глобальної рівноваги. У термінах моделі це означало вихід усіх змінних на стаціонарний режим, стабілізацію. З огляду на структуру моделі та характер її результатів, така стабілізація справді означала б якийсь успіх, однак досягти її в рамках моделі принципово неможливо – через дії названих ланцюжків зв'язків.

Після Форрестера дослідники пішли шляхом ускладнення моделей, врахування все більшого числа факторів, змінних, рівнянь, параметрів і т. д. Першою «ластівкою» в цьому напрямку стала модель Медоуза,

учня Форрестера, далі з'явилися моделі Месаровіча–Пестеля, Еррери, Кайя, В. Леонтьєва, глобальні імітаційні моделі, а в СРСР моделі було створено колективами Всесоюзного науково-дослідного інституту системних досліджень і Обчислювального центру.

Успіхи, досягнуті на цьому шляху пошуків, дуже скромні: тільки одному колективу, на чолі з академіком М. М. Моїсєєвим, удалось здійснити вплив на масову свідомість і на політиків порівнянний з тим, який зробили перші глобальні моделі. Йдеться про «розрахунок» «ядерної зими». Результати, отримані групою М. М. Моїсєєва, надзвичайно вплинули на наше життя, і продовжують впливати, продемонструвавши неможливість глобальної ядерної війни і тим самим окресливши межі дозволеного людині.

Інших моделей світової динаміки, які давали б такий самий зрозумілий і наочний результат, ми не знаємо. Надскладні моделі, побудовою яких займалися математики, майже завжди виявлялися незадовільними: їх важко верифікувати, оскільки життя не стоїть на місці, а ми маємо справу з динамічною, складною системою; в них важко зрозуміти, які чинники є визначальними, а які – супутніми; є небезпека підміни розуміння обчисленнями.

Практичний результат переважної більшості таких моделей можна визначити словами Сократа: «Ми дізналися, що нічого не знаємо».

Отже, глобальне моделювання зайшло в глухий кут, з якого потрібно вибиратися. Як це вже не раз було в історії науки, ми зробили виток по спіралі – і тепер повертаємося до першоджерела (точки біфуркації), але вже на новому рівні розуміння. Тимчасом життя ставить нові невідкладні завдання з прогнозування світової динаміки.

Сучасний світ перебуває в зоні невизначеності, ми вступили в область хаосу і підвищених ризиків. Як наслідок – зменшився горизонт прогнозу. Нам терміново потрібні моделі, що дають уявлення про основні тенденції (розуміння того, що відбувається, що чекає світ і який коридор потенційних можливостей), які дозволяють будувати прогноз і відповідно давати рекомендації.

Тепер, через тридцять років, ми починаємо усвідомлювати, що розуміння якісних закономірностей і тенденцій можливе лише на рівні простих, доступних для розгляду моделей. Саме цим і приваблює модель Форрестера: тверезістю підходу та очевидністю результатів.

Повернімося до глобальної рівноваги. Форрестеру не вдалося коректно визначити, як її досягти в модельованій ним світовій системі. Важлива робота в цьому напрямі була зроблена групою дослідників Інституту прикладної математики АН СРСР під керівництвом В. А. Єгорова в середині 70-х років XX ст. Єгоров запропонував створити гігантську індустрію з відновлення (вторинної переробки) ре-

сурсів, з очищення забруднень (повертаючи «відходи» у виробничий цикл) і рекультивації земель у величезних масштабах. На ці «планетозберігаючі» технології повинні йти досить значні відрахування від загального капіталу. Крім того, цими відрахуваннями можна керувати. Щоб визначити, скільки буде потрібно капіталовкладень у такі технології, які дають шанс уникнути кризи, передбаченої моделлю Форрестера, Єгоров запропонував для цих відрахувань скласти і розв'язувати задачу оптимального управління, як це зазвичай робиться в технічних задачах. Модифікувавши таким чином модель Форрестера, В. А. Єгоров з колегами показав, що в рамках такої керованої моделі світова система може уникнути кризи за Форрестером на досить тривалому часовому інтервалі (до кінця ХХІ ст.). Виявилось, що модель передбачає ненульові стаціонарні розв'язки, стійкі за необмеженого зростання часу. По суті, це і є реалізація стратегії сталого розвитку.

Такий підхід – підхід фахівців у теорії управління – цінний саме своїм розумінням того, що таке рівновага і як у рамках математичної моделі вона може бути досягнута. У цьому його сила, але в цьому ж і його слабкість. До простої моделі, якою є модель Форрестера, застосовувати такий тонкий і потужний апарат, яким є теорія оптимального управління, видається невиправданим. Для того щоб викопати невелику яму, не потрібен екскаватор, інакше можна викопати більше необхідного. А головне – важко сподіватися, що ми зможемо так точно керувати світовим розвитком, як це передбачав В. А. Єгоров.

З іншого боку до проблеми глобальної рівноваги підійшли В. М. Матросов і К. В. Матросова. Вони здійснили серйозну модифікацію моделі Форрестера у трактуванні В. А. Єгорова. Зокрема були введені такі фактори, як біомаса рослинності Землі, науково-технічний прогрес, політична напруженість. На відміну від Єгорова, ці вчені нічого не оптимізували, а включили управління в систему рівнянь, жорстко задавши закон їхньої зміни і зв'язавши з іншими факторами. У рамках отриманої моделі вдалося знайти стаціонарні розв'язки і показати їхню стійкість на як завгодно великих часових інтервалах.

Тут мінусом виявилася саме складність модифікацій, які заступають суть справи. А сутність, за всіх модифікацій, та ж сама, що і в моделі Форрестера: без «планетозберігаючих» технологій криза є неминучою. Плюсом же є відмова від оптимізації, тобто в якомусь сенсі спрощення концепції управління, а це наштовхує на думку, що простою моделлю і управляти просто, що і складною моделлю можна управляти просто. Умовно кажучи, в Єгорова – проста модель і складне управління, у Матросових – складна модель і просте управління. Ми ж хочемо уникнути складностей, діючи за принципом: лікуй подібне

подібним (кесарю кесарево). Йдучи таким шляхом, вдалося довести існування стаціонарних режимів для керованої моделі Форрестера у спрощеній постановці В. А. Єгорова.

Виявилося, що для досягнення стабілізації не потрібно тонкого налаштування й ускладнення моделі. Достатньо лише задати правило (концепція Матросових), за яким у кожен момент часу будуть визначатися розміри відрахувань, що спрямовуються на відновлення ресурсів і на боротьбу із забрудненнями (ідеї Єгорова). А правило може бути простим: чим більшим є споживання ресурсів і виробництво відходів, тим значнішими мають бути відрахування. Це й дозволяє досягти рівноваги. Зрозуміло, йдеться не про якісь конкретні цифри, що показують, яким має бути відсоток відрахувань. Про це можна буде говорити тільки після створення відповідної індустрії, а нині – мова лише про якісне розуміння того, як можна уникнути кризи і досягти стабілізації. Стало зрозуміло, що вирішальне значення для досягнення глобальної рівноваги має запровадження відновлення ресурсів і штучного очищення забруднення. Тільки так можна зупинити (суттєво послабити) дію зазначених вище ланцюжків зв'язків, що викликають кризу в системі.

Які висновки з цього можна зробити? Як показує історія, в житті здатні стабільно працювати тільки прості ідеї. Дати серйозний результат у суспільстві можуть тільки прості речі, зрозумілі багатьом. Простота часто є не слабкістю, а силою (а сила всіх вищезгаданих моделей – саме в їхній простоті). Складні та гігантські проекти «мають звичку» не виконуватися і залишаються тільки на папері. Реалізувати часто вдається лише достатньо простий проект. Світ рухають прості ідеї. Тому при вирішенні багатьох питань стратегічного характеру так важливо спиратися на прості, зрозумілі, доступні для розгляду та розуміння моделі.

Світова спільнота – складна система, яка є нерівноважною, саморозвивається і самоорганізовується. Складність, багатофакторність і суперечливість розвитку світового співтовариства, взаємозалежність економічних, демографічних та геополітичних процесів наводять на думку, що цей розвиток неможливо описати простими універсальними законами. Однак це не так. Еволюція людства як глобальної системи, як і еволюції будь-якої відкритої нерівноважної системи, улягає законам нелінійної динаміки та синергетики. Застосовуючи методи і теоретичні уявлення синергетики, визначаючи параметри порядку соціального розвитку, що відповідають тому чи іншому ієрархічному рівню організації, та головні діючі сили, можна створювати досить прості моделі, здатні адекватно описувати і передбачати сценарії розвитку того чи іншого процесу в цій глобальній системі.

Завдяки застосуванню синергетики в наш час значних успіхів досягнуто в галузі глобальної демографічної ситуації. Тут є ряд математичних моделей, які теоретично пояснюють різке зростання у XX ст. народонаселення Землі в режимі з загостренням – *демографічний вибух* і глобальний *демографічний перехід*, який відбувається нині.

Найглибшою розробкою в цій сфері вважається математична модель, створена С. П. Капицею. Він уперше запропонував розглядати населення світу як єдину систему, що самоорганізується, розвиток якої більшою мірою підпорядковується власним внутрішнім законам, ніж зовнішнім факторам. Він показав, що загальна чисельність населення Землі N є провідною повільною змінною (головний параметр порядку), до якої підлаштовуються всі інші змінні. Тим самим він проголосив *принцип демографічного імперативу*: саме демографія, зростання народонаселення Землі, зумовлює характер соціальних, економічних та геополітичних процесів, що відбуваються в глобальній системі людства.

При аналізі глобального демографічного процесу всі інші параметри та процеси, що впливають на зростання народонаселення, такі як розподіл людей у просторі, вікові, расові та майнові відмінності, в моделі усереднюються і так враховуються в загальній взаємодії. У результаті С. П. Капіці вдалося описати, всебічно проаналізувати і пояснити гіперболічне зростання народонаселення впродовж майже всієї історії людства – понад півтора мільйона років, і обґрунтувати закономірність сучасного глобального демографічного переходу.

Але людство не тільки збільшувало свою чисельність, воно досить довго розселялося по всій планеті. Антропологи вважають, що заселення Землі відбулося протягом середньої епохи кам'яного віку, яка тривала близько півмільйона років. За цей час змінювалась географія Землі та клімат, роз'єднувались і знов з'єднувались цілі материки, а людина заселяла все нові й нові землі. І навіть після того, як люди розселилися по всій планеті і в результаті соціальної еволюції утворилися держави та державні кордони, які перешкоджають вільній міграції, перерозподіл народонаселення продовжувався, йшли численні війни за переділ існуючих кордонів, створювались і руйнувались нові імперії. І чим інтенсивніше зростала чисельність людства, тим гострішими і масштабнішими ставали ці процеси. Але, незважаючи на війни, катаклізми та епідемії, що іноді забирали помітну частку населення, закон зростання народонаселення відносно швидко відновлювався і знову виходив на гіперболічну криву.

Стійкість закону зростання загальної чисельності людей у режимі з загостренням і поглибленням нестабільності розвитку світової спільноти в цілому, а також дві протилежні тенденції, що спостерігаються в

історії людства, – прагнення до об'єднання, з одного боку, і розпад існуючих імперій, прагнення до національного та етнічного самовизначення – з іншого, можна описати лише за допомогою моделі, яка враховує просторовий розподіл народонаселення і природні флуктуації його чисельності. Ідея побудови такої моделі, в основі якої лежить квазілінійне рівняння теплопровідності з джерелом, була вперше висунута С. П. Курдюмовим.

6.2.1. Модель світової динаміки Форрестера

Модель Форрестера побудована за принципами системної динаміки – методом вивчення складних систем з нелінійними зворотними зв'язками, який раніше сам же Форрестер і розробляв зі своїми співробітниками протягом майже п'ятнадцяти років (з кінця 50-х рр.). Аналітичні основи побудови моделі, призначеної для імітації світових процесів, були розглянуті в його попередніх працях, присвячених вивченню промислових і урбанізованих систем: певний «стрибок» полягав лише в тому, щоб перейти від таких мікросистем до глобальної макросистеми.

Метод системної динаміки передбачає, що для основних фазових змінних (так званих системних рівнів) записуються диференціальні рівняння одного типу:

$$\frac{dy}{dt} = y^+ - y^-, \quad (3.22)$$

де y^+ – невід'ємний темп швидкості змінної y , що включає в себе всі фактори, які викликають зростання змінної y ;

y^- – від'ємний темп швидкості, що включає всі фактори, які викликають зменшення змінної y .

Передбачається, що ці темпи виражаються через добуток функцій, що залежать тільки від так званих факторів – допоміжних змінних, які є комбінаціями основних змінних:

$$y^+ = g(y_1, y_2, \dots, y_n) = f(F_1, F_2, \dots, F_n) = f_1(F_1) f_2(F_2) \dots f_k(F_k),$$

де $F_j = g_j(y_{i_1}, \dots, y_{i_m})$ – фактори, причому $m = m(j) < n, k < n$ (n – число рівнів), тобто факторів менше, ніж змінних, що дозволяє спростити задачу і розглядати тільки функції однієї змінної.

Безпосереднє моделювання світової динаміки проводилося Форрестером поетапно.

1. *Концептуалізація* – виділення головного. На цьому етапі виділяються найбільш істотні, на погляд Форрестера, світові процеси,

такі як: 1) швидке зростання населення; 2) індустріалізація і пов'язане з нею промислове зростання; 3) брак продовольства (їжі); 4) зростання відходів виробництва; 5) брак ресурсів.

Звідси основні змінні (рівні): 1) населення P ; 2) основні фонди K ; 3) частка фондів у сільському господарстві (тобто в галузі забезпечення їжею) X ; 4) рівень забруднення (або просто забруднення) Z ; 5) кількість невідновлюваних природних ресурсів R .

Фактори, через які здійснюється взаємовплив змінних при побудові диференційних рівнянь: 1) відносна чисельність населення P_p (населення, нормоване на його чисельність у 1970 р.); 2) питомий капітал K_p ; 3) матеріальний рівень життя C ; 4) відносний рівень харчування (кількість їжі на особу) F ; 5) нормована величина питомого капіталу в сільському господарстві X_p ; 6) відносне забруднення Z_s ; 7) частка ресурсів, що залишаються, R_r .

Крім наведених змінних, Форрестер увів також поняття «якість життя» Q . Цей фактор є своєрідною мірою функціонування досліджуваної системи, тобто має характер індикатора. Залежить цей індикатор від чотирьох факторів: P_p , C , F і Z_s .

Де кілька слів про одиниці вимірювання основних змінних. Населення природно оцінювати числом людей; частка фондів у сільському господарстві – безрозмірна величина між 0 і 1. Одиницею капіталу вважається умовна величина – капітал, який припадає на душу населення в 1970 р.; одиницею ресурсів вважається їхнє річне споживання в 1970 р.; за одиницю забруднення приймається умовна величина – забруднення, що припадає на одну людину в 1970 р.

2. *Складання рівнянь.* Для системних рівнів записується система диференційних рівнянь, спрощений вигляд якої такий:

$$\frac{dP}{dt} = P(B - D) \quad (3.23)$$

$$\frac{dK}{dt} = K_+ - \frac{K}{T_K} \quad (3.24)$$

$$\frac{dX}{dt} = X_+ - \frac{X}{T_x} \quad (3.25)$$

$$\frac{dZ}{dt} = Z_+ - \frac{Z}{T_z} \quad (3.26)$$

$$\frac{dR}{dt} = -R_- \quad (3.27)$$

де $B = B(C, F, P_p, Z_s) = c_B \cdot B_C(C) \cdot B_F(F) \cdot B_P(P_p) \cdot B_Z(Z_s)$ – темп народжуваності, $D = D(C, F, P_p, Z_s) = c_D \cdot D_C(C) \cdot D_F(F) \cdot D_P(P_p) \cdot D_Z(Z_s)$ – темп смертності, $K_+ = K_+(P, C) = P \cdot K_C(C)$ – швидкість виробництва нових фондів, $T_K = 40$ років – стала зносу основних фондів, $X_+ = X_+(F, Q) = X_F(F) \cdot X_Q(Q) / T_X$ – приріст частки сільськогосподарських фондів, $T_X = 15$ років – час вибуття частки сільськогосподарських фондів, $Z_+ = Z_+(P, K_p) = P \cdot Z_K(K_p)$ – швидкість генерації забруднення, $R_- = R_-(P, C) = P \cdot R_C(C)$ – швидкість споживання ресурсів.

Рівняння для допоміжних змінних:

$$P_p = \frac{P}{P_H} - \text{відносна щільність населення} \quad (3.28)$$

$$K_p = \frac{K}{P} - \text{питомий капітал} \quad (3.29)$$

$$Z_s = \frac{Z}{Z_H} - \text{відносне забруднення} \quad (3.30)$$

$$R_R = \frac{R}{R_0} - \text{частка ресурсів, що залишилися} \quad (3.31)$$

$$X_p = K_p \frac{X}{X_H} - \text{відносна величина сільськогосподарських фондів} \quad (3.32)$$

$$Q_{CF} = \frac{Q_C}{Q_F} - \text{так звана відносна якість життя} \quad (3.33)$$

$$F = F_X F_P F_Z - \text{рівень харчування} \quad (3.34)$$

$$C = K_p \frac{1 - X}{1 - X_H} E_K - \text{так званий матеріальний рівень життя} \quad (3.35)$$

Усі зазначені вище букви з підрядковими символами (B_C , B_F , K_C і т. д.) є, власне, таблицями з лінійної інтерполяцією. Ці таблиці будувалися (задавалися) або експертами в тій чи іншій галузі, або – якщо експертів не було – самим Форрестером:

$B_C = T_1(C)$ – залежність народжуваності від матеріального рівня

життя (рис. 3.25);

$B_p = T_2(P_p)$ – залежність народжуваності від щільності населення;

$B_F = T_3(F)$ – залежність народжуваності від харчування (рис. 3.26);

$B_Z = T_4(Z_s)$ – залежність народжуваності від забруднення;

$D_C = T_5(C)$ – залежність смертності від матеріального рівня життя;

$D_p = T_6(P_p)$ – залежність смертності від щільності населення;

$D_F = T_7(F)$ – залежність смертності від харчування;

$D_Z = T_8(Z_s)$ – залежність смертності від забруднення (рис. 3.27);

$K_C = T_9(C)$ – залежність капіталовкладень від матеріального рівня

життя;

$Q_C = T_{10}(C)$ – залежність якості життя від матеріального рівня життя;

$Q_F = T_{11}(F)$ – залежність якості життя від харчування;

$X_Q = T_{12}(Q_{CF})$ – залежність частки фондів у сільському господарстві від відносної якості життя;

$X_F = T_{13}(F)$ – залежність частки фондів у сільському господарстві від харчування;

$F_x = T_{14}(X_p)$ – харчовий потенціал фондів;

$F_p = T_{15}(P_p)$ – залежність виробництва їжі від щільності населення;

$F_Z = T_{16}(Z_s)$ – залежність виробництва їжі від забруднення;

$Z_K = T_{17}(K_p)$ – залежність забруднення від питомого обсягу фондів;

$T_z = T_{18}(Z_s)$ – час розкладання забруднення – відображає ускладненість природного розкладання при збільшенні забруднення (рис. 3.28);

$R_C = T_{19}(C)$ – залежність видобутку ресурсів від матеріального рівня життя (рис. 3.29);

$E_R = T_{20}(R_R)$ – множник видобутку ресурсів – вказує на зростання труднощів видобутку ресурсів зі зменшенням їхньої кількості (рис. 3.30).

Константи:

$$c_B = 0,04, \quad c_D = 0,028, \quad c_K = 0,05, \quad T_K = 40, \quad T_X = 15, \quad t_y = 1970,$$

$$P_N = 3,6 \cdot 10^9, \quad X_N = 0,3, \quad Z_N = 3,6 \cdot 10^9.$$

Початкові дані:

$$t_0 = 1900, \quad P_0 = 1,65 \cdot 10^9, \quad K_0 = 0,4 \cdot 10^9, \quad X_0 = 0,2, \quad R_0 = 9 \cdot 10^{11}.$$

Якість життя – як міра функціонування світової системи:

$$Q = Q_C Q_F Q_P Q_Z,$$

де Q_P – множник залежності якості життя від щільності населення, Q_Z – залежність якості життя від рівня забруднення. Сам по собі цей фактор ніяк не впливає на інші змінні, а тому не має якогось особливого математично смислового навантаження, – це просто своєрідний індикатор поведінки світової системи, яка моделюється.

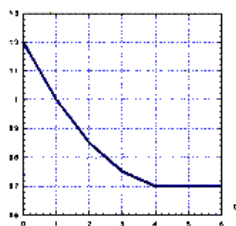


Рис. 3.25

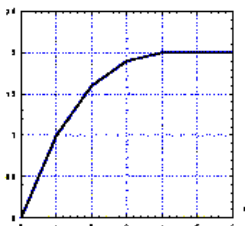


Рис. 3.26

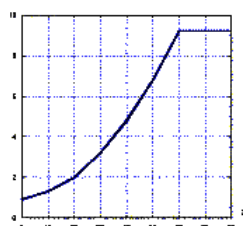


Рис. 3.27

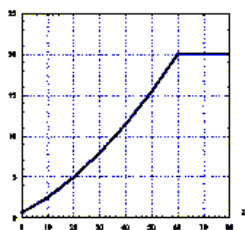


Рис. 3.28

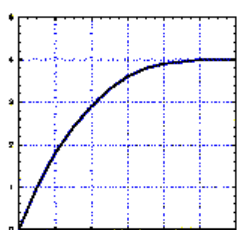


Рис. 3.29

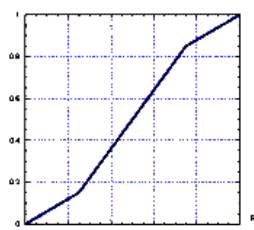


Рис. 3.30

Зауважимо, що про технології та їхній розвиток Форрестер у своїй моделі нічого не говорить. Тут позиція дослідника така: зафіксуємо наші можливості (= технологічний рівень) на даному етапі та екстраполюємо сучасні тенденції в частині споживання ресурсів, зростання забруднення, вибуття родючих земель, демографічної динаміки. Зрозуміло, до чого це призведе. З іншого боку, цим Форрестер показав необхідність розвитку потрібних технологій, які вирішують те коло завдань, яке розглядається в моделі.

Слід сказати, що задача автора при побудові моделі полягала не в точному прогнозі кількісних характеристик світової системи, а швидше у виявленні загальних якісних тенденцій динаміки основних змінних, в аналізі чутливості результатів до різних закладених у модель припущень (сам Форрестер спочатку вважав «Світ-2» просто робочою моделлю, яка допомагає краще засвоїти предмет системної динаміки).

Для досягнення цієї мети істотним є не так точне кількісне визначення всіх параметрів моделі, як правильний облік причинно-наслідкових зв'язків системи.

Розрахунки за своєю моделлю Форрестер проводив з 1900 по 2100 рр.: з 1900 по 1970 рр. – здебільшого для того, щоб «налагодити» (налаштувати) параметри моделі на відомих даних, а з 1970 р. – вже як суто прогнозні. Інакше кажучи, параметри моделі, початкові дані та, частково, табличні функції підбиралися так, щоб динаміка системи збіглася за можливості з реальною світовою динамікою на інтервалі від 1900 до 1970 рр.

6.2.2. Глобальна модель динаміки Месаровіча–Пестеля (М–П-модель)

У проєкті «Стратегія виживання» М. Месаровіч і Е. Пестель поставили задачу побудови «кібернетичної» моделі світу. Принципи її створення були сформульовані в кінці 70-х рр. XX ст. і узагальнені в таких тезах.

1. Модель, що відображає складні процеси взаємодії людини з довкіллям і комплекс економічних, соціальних та політичних взаємин у суспільстві, повинна ґрунтуватися на теорії багаторівневих ієрархічних систем. Необхідно виділити щонайменше три рівні: *причинний* – процеси в довкіллі та функціонування економіки; *організаційний* – колективні дії осіб, які приймають рішення, що змінюють стан причинного рівня; *рівень формування соціальних норм* – процеси формування цінностей і цілей суспільства.

2. Модель має бути керованою – тобто включати процес ухвалення рішень, що дозволить врахувати можливість свідомої дії людини на розвиток світової системи.

3. Світ слід розглядати не як єдине ціле, а як систему взаємодіючих регіонів, що розрізняються рівнем розвитку, соціально-економічною структурою, традиціями і т. д.

Месаровіч і Пестель критикують модель «Світ-3» як «механічну» і відзначають, що оскільки вона є замкнутою системою диференційних рівнянь, то задавання її початкового стану однозначно визначає її динаміку.

Структура моделі. Слід відзначити, що завершеної «світової моделі» у цих авторів, по суті, немає. Є окремі праці з демографії, економіки, енергетики, продовольчої проблеми, про нафтову кризу. Тому модель Месаровіча–Пестеля (М–П-модель) слід розглядати швидше як програму побудови глобальної моделі та низку проєктів про окремі її частини.

У М–П-моделі всі країни світу відповідно до їхніх соціально-економічних структур і рівня розвитку були поділені на десять регіонів: Північна Америка, Західна Європа, Японія, Австралія і Південна Африка, СРСР і країни Східної Європи, Латинська Америка, Близький Схід і Північна Африка, решта Африки, Південно-Східна Азія, Китай.

Кожен регіон описується системою спеціальних підмоделей з однаковою структурою, але з різними початковими даними і значеннями параметрів. Зв'язок регіонів здійснюється через імпорт, експорт і міграцію населення. Основними підмоделями в цій системі є підмоделі економіки, демографії та енергетики.

У підмоделях Месаровіча–Пестеля ряд параметрів систем рівнянь залишаються невизначеними. Управління обумовлюється вибором того чи іншого сценарію (набором значень цих параметрів на всьому даному проміжку часу). Сценарій же вибирається особою, що приймає рішення (ОПР), – тобто людиною, яка здійснює дослідження проблеми. Для кожної проблеми (моделі) заздалегідь визначається кінцевий набір можливих сценаріїв, які об'єднані в дерево рішень. ОПР вибирає прийнятний з її точки зору сценарій шляхом дослідження дерева допустимих рішень у режимі діалогу з комп'ютером. Після вибору сценарію система стає замкнутою і, відповідно, стає можливим розрахунок її траєкторії.

Слід зазначити, що зворотні зв'язки між окремими підмоделями М–П-моделі, як правило, відсутні. Це приводить до «жорсткого» варіанта визначення ендегенних змінних для підмоделей, що використовують як вхідну інформацію розрахунки інших підмоделей.

Підмодель економіки. Підмодель економіки представлена однопродуктовою макроекономічною моделлю, що відображає динаміку капіталу, інвестиції, імпорт-експорт, кінцеве споживання та урядові витрати. Підмодель економіки описує розвиток i -го регіону системою різницевих рівнянь з кроком за часом в один рік:

$$K_{t+1}^i = K_t^i + I_t^i - K_t^i / T, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.36)$$

де K – капітал;

I – інвестиції;

T – постійна зносу (убування) капіталу.

Рівняння (3.36) доповнюється формулами, в яких визначаються наступні компоненти економіки:

– кінцевий продукт

$$Y^i = Q^i K^i, \quad (3.37)$$

де $Q^i = q_{i1} + q_{i2}t$ – лінійна виробнича функція;

– річні інвестиції

$$I^i = (a_1^i + a_2^i t) Y^i; \quad (3.38)$$

– можливе споживання регіону

$$C^i = (b_1^i + b_2^i t) Y^i; \quad (3.39)$$

– можливі державні витрати регіону

$$G^i = g_1^i + g_2^i t; \quad (3.40)$$

– експорт регіону

$$X^i = (c_1^i + c_2^i t) \sum_{k=1}^{10} Y^k. \quad (3.41)$$

Коефіцієнти у формулах (3.38)–(3.41) визначаються шляхом статистичного аналізу часових рядів відповідних величин.

Після цього визначається можливий імпорт регіону з рівняння розподілу кінцевого продукту:

$$M^i = C^i + G^i + I^i + X^i - Y^i. \quad (3.42)$$

Потім обчислюються сумарні (в усіх регіонах) величини експорту й імпорту

$$M = \sum_{i=1}^{10} M^i, \quad X = \sum_{i=1}^{10} X^i. \quad (3.43)$$

У випадку, якщо вони виявляються не рівними між собою, здійснюється перерозподіл величин імпорту, споживання і державних витрат – так, що сума експорту по всіх регіонах стає рівною сумі імпорту (це потрібно для того, щоб модель була збалансованою):

$$M_b^i = M^i \left(1 + \frac{1}{2} \frac{X - M}{M} \right) + \frac{X - M}{20}, \quad (3.44)$$

$$C_b^i = C^i (Y^i - I^i - X^i + M_b^i) / (C^i + M^i), \quad (3.45)$$

$$G_b^i = G^i (Y^i - I^i - X^i + M_b^i) / (C^i + G^i). \quad (3.46)$$

Тепер за допомогою збалансованої моделі (3.44)–(3.46) можна прогнозувати розвиток економіки всіх десяти регіонів, що було зроблено на період до 2025 р.

Підмодель енергетики. Підмодель енергетики складається з трьох окремих секторів: ресурсів, попиту і пропозицій.

Сектор ресурсів ураховує зведення про відомі енергетичні запаси ресурсів на Землі і про методи розвідки і технології видобутку ко-

рисних копалин. В якості виходу підмоделі виступають прогнози наявності первинних ресурсів (вугілля, нафта, газ, уран і торій) для кожного регіону – у вигляді часових рядів.

Сектор попиту виходить з прогнозу економічного розвитку, що отримується з підмоделі економіки. Априорі передбачається наявність функціональної залежності між валовим регіональним продуктом і потребою регіону в енергії – у вигляді

$$E^i = \alpha^i Y^i, \quad (3.47)$$

де α_i є функцією, залежною від валового продукту на душу населення: $\alpha^i = \alpha^i(Y^i / P^i)$. Вигляд цієї залежності визначається експериментальною кривою, яка обчислюється на основі аналізу статистичних даних всіх регіонів.

В основі сектора пропозиції лежить детальна діаграма потоків енергії. На вході діаграми знаходяться імпорт і первинні джерела енергії, потенційні запаси яких вважаються відомими із сектора ресурсів, а на виході – кінцеві користувачі енергії, чий потреби мають бути відомими із сектора попиту. Структура діаграми враховує всі потенційно можливі способи переробки, транспортування і розподілу енергетичних ресурсів. Коефіцієнти ефективності процесів переробки, вартість технології переробки і ціни на первинні та вторинні енергетичні ресурси вважаються відомими і постійними.

У кожній вузловій точці діаграми вибір коефіцієнтів розподілу, як визначення міри розвитку різних галузей енергетики та імпортно-експортних відносин, є об'єктом управління. У даному проміжку часу в підмоделі пропозиції енергії сценарій включає такі величини: видобуток кожного виду первинної енергії, імпорт і експорт енергії, розподіл первинних енергетичних ресурсів за різними способами перетворення, відсотковий розподіл між споживачами вторинних енергетичних ресурсів.

У підмоделі енергетики обчислюються практично всі основні характеристики споживання енергетичних ресурсів: річна вартість споживаної первинної енергії, річна вартість імпорту енергії, необхідна кількість нових електростанцій і капіталовкладень для їхнього будівництва, відсоткове співвідношення різних видів енергії в кінцевому споживанні, обсяги і вартість кінцевого споживання енергії, теплоти, що виділяється в атмосферу в процесі переробки і споживання енергії.

Зворотний зв'язок між підмоделями енергетики й економіки відсутній. Макроекономічна підмодель обчислюється заздалегідь, вихід з неї є вхідною інформацією для підмоделі енергетики у вигляді часових рядів потреб регіонів в енергії, тож будь-яке рішення в галузі

енергетики нічого не змінює в економічній підмоделі. Безумовно, ця обставина може істотно вплинути на достовірність прогнозної інформації (добре відомо, що масштабні рішення в галузі енергетики можуть змінити динаміку економічної підмоделі внаслідок перерозподілу частки валового продукту – наприклад, створення нових технологій переробки первинних енергетичних ресурсів вимагає значних інвестицій).

Підмодель демографії. В системі регіональної М–П-моделі світу однією з основних є підмодель демографії. Її призначення полягає в досягненні двох важливих цілей:

1) у дослідженні зростання населення в кожному регіоні за певної демографічної політики та у взаємодії цієї підмоделі з іншими підмоделями;

2) у дослідженні впливу зростання населення на результати інших підмоделей.

Для вивчення динаміки населення воно поділяється на 86 вікових груп. Для кожного регіону при визначенні зміни чисельності населення до $(t + 1)$ року використовуються дані про чисельність людей, що живуть у t -му році, а також про можливі причини народжуваності та смертності. У підмодель введено дві незалежні змінні — час t і вік l . Час змінюється в межах 1950–2100 рр., вік – від 1 до 85 років ($l = 86$ означає вік не менше 86 років). Залежними змінними підмоделі для кожного регіону є:

P_t^l – чисельність людей, які живуть до моменту 1 липня t -го року, народилися між 1 липня $(t - 1)$ року до 30 червня $(t - l - 1)$ року (у P_{86}^t включено всіх людей, що народилися до 1 липня $(t - 85)$ року);

D_t^l – чисельність людей, померлих у проміжку між t і $t + 1$, у кожній віковій групі;

B_t^l – чисельність людей, що народили дітей за той же період часу;

I_t^l – різниця чисельності іммігрантів за той же період часу в кожній віковій групі;

B^t – чисельність дітей, народжених за той же часовий проміжок;

I_{mi}^t – підсумкова величина різниці чисельності іммігрантів і емігрантів за той же часовий проміжок;

D^t – загальна чисельність людей, померлих за той же часовий проміжок;

P^t – загальна чисельність людей, які живуть до t -го року;

b_l^t – вірогідність того, що в людини у віці $(l - 1/2, l + 1/2)$ народиться дитина між 1 липня t -го року і 1 липня $(t + 1)$ року;

d_l^t – вірогідність смерті в той же проміжок часу в різних вікових групах.

Останні дві величини беруться зі статистичних даних; у них можуть бути внесені поправки, що враховують такі чинники, як вплив зміни рівня харчування, охорона здоров'я і т. д. У прогнозах, проведених Месаровічем і Пестелем, за основний статистичний період було вибрано інтервал часу 1950–1970 рр. Загальний коефіцієнт народжуваності визначається відношенням чисельності дітей, що народилися в рік t , до всього населення в середині цього року:

$$b_l^* = B^{t-1/2} / P^t. \quad (3.48)$$

Так само вводиться коефіцієнт смертності:

$$d_l^* = D^{t-1/2} / P^t. \quad (3.49)$$

Значення величин b_l^* і d_l^* є в статистичних даних. Зі співвідношень (3.48) і (3.49) визначаються середні значення числа народжених дітей і померлих людей:

$$B^t = (B^{t-1/2} + B^{t+1/2}) / 2 = (b_l^* P^t + b_{l+1}^* P^{t+1}) / 2, \quad (3.50)$$

$$D^t = (D^{t-1/2} + D^{t+1/2}) / 2 = (d_l^* P_t + d_{l+1}^* P^{t+1}) / 2. \quad (3.51)$$

Величини B_l^t , D_l^t , B^t , D^t зв'язані в спільній системі рівнянь:

$$B_l^t = b_l^t P_l^t, \quad l = 1, 2, \dots, 86; \quad (3.52)$$

$$B^t = \sum_{l=2}^{86} B_l^t, \quad (3.53)$$

$$D_l^t = d_l^t P_l^t, \quad l = 1, 2, \dots, 86; \quad (3.54)$$

$$D_0^t = d_{1/2}^t B^t / 2, \quad (3.55)$$

$$D^t = \sum_{l=2}^{86} D_l^t. \quad (3.56)$$

Щодо різниці кількості іммігрантів за віковими групами слід прийняти припущення, засновані на статистичних даних:

$$I_l^t = \begin{cases} I_{mi}^t / 50, & l = 2, \dots, 51; \\ 0, & l = 1, 52, 53, \dots, 86. \end{cases} \quad (3.57)$$

Конкретний сценарій прогнозу передбачав, що, починаючи з 1970 р.,

кожен регіон вважається закритим, тобто $I_{mi} = 0$ при $t > 1970$ р. Тоді формула для розрахунку сумарної різниці числа іммігрантів і емігрантів виглядає так:

$$I_{mi}^t = P^{t+1} - P^t - B^t + D^t. \quad (3.58)$$

І нарешті, для обчислення кількості людей, що живуть, маємо рівняння:

$$P_l^{t+1} = B_l^t - D_0^t, \quad (3.59)$$

$$P_{l+1}^{t+1} = P_l^t - D_l^t + I_l^y, \quad l = 1, 2, \dots, 86. \quad (3.60)$$

$$P_{86}^{t+1} = P_{85}^t - D_{85}^t + P_{86}^t - D_{86}^t, \quad (3.61)$$

$$P^t = \sum_{l=2}^{86} P_l^t. \quad (3.62)$$

Рівняння (3.52)–(3.62) є основою демографічної підмоделі. Коротко опишемо можливі аспекти демографічної політики і впливу на зростання населення інших підмоделей.

А. Збереження народжуваності, смертності, споживання та інших чинників на рівні, близькому до сучасного, приводить до дуже великого зростання населення.

Б. При вивченні питання про досягнення рівноважного стану для населення шляхом регулювання народжуваності (умова $B^t = D^t$) можна визначити відповідне значення b_l^t , проте величина P^t залишається невизначеною.

В. При розгляді впливу на смертність нестачі протеїнів величина вірогідності смерті за віковими групами визначалася шляхом введення відповідного множника:

$$d_l^t = d_1^{1970} E(l) (44 - N_p^0) / (N_p(t - t_0) - N_p^0), \quad (3.63)$$

де

$$E(l) = (E_0 - E^0) \cdot \exp(-l / E^*) + E^0. \quad (3.64)$$

Тут E_0 – коефіцієнт сприйнятливості дітей щодо нестачі протеїнів, E^0 – аналогічний коефіцієнт сприйнятливості у дорослих, E^* – константа часу процесу, N_p – щоденне споживання протеїнів людиною, N_p^0 – мінімально допустима норма щоденного споживання протеїнів людиною, t_0 – час затримки (лаг) впливу дефіциту протеїнів.

Розглядалася демографічна політика управління народжуваністю з

урахуванням можливого дефіциту протеїнів, спрямована на досягнення рівноважного рівня чисельності населення.

Основні результати моделі Месаровіча–Пестеля. У результаті прогнозних розрахунків за різними сценаріями були зроблені деякі висновки, що не втратили своєї актуальності й сьогодні.

При збереженні нинішніх тенденцій світу загрожує не глобальна катастрофа приблизно в середині ХХІ ст. (як впливає з результатів моделі «Світ-3»), а серія регіональних катастроф, які почнуться значно раніше, у різні моменти часу і з різних причин для різних регіонів.

Згідно з прогнозом, регіону Південно-Східної Азії загрожує голод уже в кінці нинішнього десятиліття, що призведе до масової дитячої смертності. Наслідки регіональних катастроф відчуватимуться в усьому світі, і уникнути загальної катастрофи можна лише погодженими і невідкладними міжнародними діями, спрямованими на надання допомоги країнам, що розвиваються. Проте цієї допомоги недостатньо для вирішення всіх проблем, і в цих регіонах необхідно проводити політику обмеження народжуваності.

Узагальнюючи отримані результати, автори моделі протиставляють власну концепцію розвитку програми обмеження зростання і стабілізації системи на певному рівні «глобальної рівноваги», висунутій авторами моделі «Світ-3». Свою концепцію світового розвитку Месаровіч і Пестель назвали «органічним зростанням». Під цим слід розуміти диференційований розвиток різних частин загальної системи, коли в окремі періоди поряд зі зростанням одних параметрів у певних регіонах має місце обмеження зростання в інших регіонах. Оцінюючи проєкт загалом, необхідно наголосити, що й досі існує значний розрив між концептуальними основами моделі в цілому і конкретними розробленими підмоделями (причому деякі з них, у свою чергу, є надто спрощеними).

Іноді аналіз об'єктивних причинно-наслідкових зв'язків підміняється формальною екстраполяцією існуючих відношень на весь прогнозний проміжок часу.

Не можна не зауважити, що поділ світової системи на регіони виконано формально, без врахування їхньої внутрішньої специфіки. Проблема взаємодії регіонів практично не вирішена, оскільки прогнозований експорт і імпорт визначаються екстраполяцією їхніх значень на теперішній час. Окремі підмоделі не сполучені в єдину ієрархію, і зворотні зв'язки між ними, як правило, відсутні.

Загалом же, незважаючи на незавершеність, робота групи Месаровіча–Пестеля є новим цікавим етапом у процесі моделювання світо-

вого розвитку. У представленому ними підході слід відзначити ряд позитивних і об'єктивно обумовлених моментів: поділ світової системи на взаємодіючі регіони, спеціалізація і спрямованість підмоделей на вирішення конкретних проблем, введення можливості управління.

6.2.3. Феноменологічна макромодель світової динаміки і стійкого розвитку

У цьому пункті представлено феноменологічну модель світової динаміки, в рамках якої досліджується проблема забезпеченості ресурсами і стійкого розвитку світової системи на найближчі декілька століть.

На глобальному рівні, що оперує часом на рівні століть і тисячоліть, параметрами порядку можна вважати *чисельність населення*, доступні людству *ресурси* та наявні *технології*. Ресурси – це всі види існуючих ресурсів, як відновлюваних (наприклад, чисте повітря, чиста вода, ліс, ґрунти), так і невідновлюваних (таких, як нафта, газ, метали, мінерали, енергоресурси).

Технології – це знання і виробництво, за допомогою яких люди підтримують власне існування. З цієї точки зору, технології також виявляються схожими на фонди і капітал. Модель претендує на опис індустріальної і постіндустріальної фаз розвитку світу.

Схема взаємодії між трьома вказаними параметрами виглядає так: населення створює технології, технології актуалізують ресурси з навколишнього середовища, ресурси підвищують узагальнену продуктивність соціально-економічної системи, що веде до зростання населення.

Наведена схема є асиметричною: технології відіграють роль ведучої змінної, чисельність населення – відомої змінної, а ресурси виступають в якості передавача. Це означає, що чисельність населення підлаштовується під рівень розвитку технологій і наявних ресурсів, тому при розгляді питання забезпеченості ресурсами цілком допустимо відмовитися від змінної «населення» і мати справу тільки з технологіями T і ресурсами R , вважаючи, що $N \sim T$.

За схемою, всі три параметри поводяться узгоджено і в середньому повинні змінюватися за аналогічними законами. Дані про зростання населення Землі відомі: впродовж принаймні двох останніх тисячоліть його чисельність росла за гіперболічним законом, тобто цьому параметру властива масштабна інваріантність і відсутність характерних значень, а отже, і для двох інших параметрів мусить бути властиве те ж. Це означає, що при написанні динамічних рівнянь усі залежності потоків швидкостей змінювання основних змінних повинні мати ступеневий характер, тобто вигляд $R^x T^y$. Кожен такий добуток у пра-

вій частині диференційного рівняння описує дію одного фактора, Фактори вважаємо незалежними, тому якщо їх декілька, вони додаються або віднімаються. Система рівнянь для індустріальної (і пост-індустріальної) епохи має такий вигляд:

$$\frac{dR}{dt} = -\lambda R^a T^b, \quad (3.65)$$

$$\frac{dT}{dt} = \sigma R^{am} T^d - \mu T, \quad (3.66)$$

де λ, σ, μ – параметри. На підставі ряду непрямих даних можна дати оцінки деяким ступеневим показникам, що фігурують у рівняннях (3.65) (3.66): $a < 1, m < 1, b \approx 2$, на індустріальній стадії $d \approx 2$, на пост-індустріальній – $d \approx 1$.

Крім цих змінних, було введено поняття рівня життя L , який (з точністю до постійного множника) визначимо як частину продукту, що направляється на споживання, віднесеного на душу населення: $L \sim R^a T^{b-1}$.

Розрахунки показують, що з часом змінна R швидко виходить на нуль, після чого змінна T по експоненті також падає до нуля, рівень життя L – теж. Це відображає ідею про те, що споживання ресурсів у таких масштабах, як зараз, призведе до їх повного вичерпання.

Для того, щоб уникнути такої кризи, можуть бути запропоновані наступні заходи: ресурсозберігання, відновлення ресурсів і пошук нових. Усі ці можливості було враховано і внесено в модель, і в результаті система динамічних рівнянь набула вигляду:

$$\frac{dR}{dt} = -\lambda R^a T^{b-c} + \nu R^g T^h, \quad (3.67)$$

$$\frac{dT}{dt} = (\sigma R^{am} - \mu) T, \quad (3.68)$$

$$L = R^a T^{b-1}, \quad (3.69)$$

де c – показник ефективності ресурсозберігання, який відображає, наскільки можна скоротити споживання ресурсів за незмінного ватт-годинного світового продукту (ВСП); при цьому розглядаються два випадки: а) $g > a$ – переважання відновлення ресурсів, б) $g < a$ – переважання відкриття нових ресурсів.

Було здійснено якісний аналіз системи (3.67)–(3.69), який дозволив зробити такі висновки:

1) економія і відновлення ресурсів не вирішують проблему вичерпання ресурсів у цілому, лише відтягують кризу на певний час;

2) у випадку відкриття нових типів ресурсів (наприклад, термо-

ядерна енергія) з'являється можливість уникнути кризи в довготривалій перспективі; залежно від режиму актуалізації нових ресурсів може відбутись або вихід на стаціонарний рівень, або необмежене зростання параметрів системи.

У моделі можна дати визначення стійкого розвитку, застосувавши введене поняття рівня життя. Вважатимемо, що система, описувана рівняннями (3.67)–(3.69), розвивається стало, якщо $\frac{dL}{dt} \geq 0$. На підставі здійсненого аналізу можна зробити висновок, що стійкий розвиток можливий лише у випадку відкриття нових ресурсів.

Глава 7. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ХАОСУ І ХАОТИЧНОЇ ДИНАМІКИ. ФРАКТАЛИ

7.1. Теорія динамічного хаосу та її застосування

Нові поняття, що проникли в науку нашого часу, – «самоорганізація», «хаос» або «фрактали» – свідчать про новий погляд на світ. Концепція самоорганізації спричиняє глибокі зміни в розумінні нашого пізнавального ставлення до природи.

Щоб сформулювати головне, що внесла до проблеми прогнозу нова галузь досліджень, яка називається нелінійною динамікою (англійський термін *nonlinear science* – нелінійна наука), можна виділити наступну відмінність нових уявлень від старих.

Раніше вважали, що є два класи об'єктів. Одні – детерміновані. Прогноз їхньої поведінки може бути даний на будь-який бажаний час. Інші – стохастичні. Ними займається теорія вірогідності. Типовий приклад – кидання гральних костей або монети. Те, що випадає на цей раз, ніяк не пов'язане з передісторією. Тут не можна вести мову про детермінований прогноз – і можна мати справу лише зі статистичними характеристиками: середніми значеннями, дисперсіями, розподілами вірогідності. В останні двадцять років було виявлено ще один важливий клас об'єктів. Формально вони є детермінованими: точно знаючи їхній поточний стан, можна встановити, що станеться з системою в як завгодно далекому майбутньому. Але водночас передбачати її поведінку можливо лише на обмеженому часовому періоді. Щонайменша неточність у визначенні початкового стану системи з часом зростає, і з якогось певного моменту ми втрачаємо можливість щось передбачати – система починає поводитися хаотично. Тут знов доводиться говорити тільки про статистичний опис. Такі системи були виявлені в гідродинаміці, фізиці лазерів, хімічній кінетиці, астрофізиці та фізиці плазми, в геофізиці та екології. Воістину величезна область, в якій на-

ші можливості передбачати дуже обмежені. Проте в деяких випадках усвідомлений бар'єр не лише позбавляє ілюзій, а й допомагає побачити дійсний масштаб посталих проблем. «Хаос» і «матерія» – поняття, тісно взаємопов'язані, оскільки динамічний хаос лежить в основі всіх наук, що мають справу з вивченням тієї чи іншої активності речовини, починаючи з фізичної хімії. Крім того, хаос і матерія вступають у взаємозв'язок ще й на космологічному рівні, оскільки сам процес отримання матерією фізичного буття, за сучасними уявленнями, пов'язаний з хаосом і нестійкістю.

Значення хаосу нині не в тому, що він ставить межу нашому знанню, – хаос дозволяє по-новому сформулювати те, що нам належить пізнати. Причина успіху нового підходу полягає в переході до потужніших математичних засобів. Добре відомо, що задача, нерозв'язна за допомогою одного алгоритму, може стати розв'язуваною, якщо ми застосуємо інший алгоритм.

Між фундаментальними законами фізики і всіма іншими рівнями опису, що включає хімію, біологію та гуманітарні науки, існував розрив. Стійкі динамічні системи, а також скінченні квантові системи, що описуються в термінах хвилових функцій, історично стали вихідними пунктами для побудови великих теоретичних схем фізики. Ці схеми показали в збільшеному вигляді те, що нині нам здається тільки окремими випадками, і екстраполювали їх далеко за межі застосовності кожного такого випадку.

Така нова перспектива глибоко трансформує взаємозв'язок між науками. Тепер перед нами відкривається можливість уникнути парадоксу, який задля фундаментальних законів зводить час до ілюзії, зводячи людський досвід до якоїсь суб'єктивності, що перебуває за межами природи. Хаос має два абсолютно різних прояви: динамічний хаос – на мікроскопічному рівні і дисипативний – на макроскопічному. Ці два різновиди хаосу не слід плутати. Динамічний хаос лежить у самій основі мікроскопічної фізики, він включає порушення симетрії в часі та служить фундаментом керованих другим законом термодинаміки макроскопічних явищ, серед яких і наближення до рівноваги, а також дисипативні структури та дисипативний хаос. При дослідженні макроскопічних рівнянь, що описують дисипативні фізичні процеси або хімічні перетворення, ми стикаємося з системами, мікроскопічний опис яких належить уже до хаотичних систем.

Далеко від рівноваги може існувати безліч різних атракторів. Одні з них породжують періодичний режим, як у хімічному годиннику, інші – дисипативний хаос. Всі ці дисипативні явища є макроскопічними реалізаціями (проявами) хаотичної динаміки.

7.1.1. Динамічний хаос

Де пролягає межа між регулярною, але складно організованою структурою (тобто порядком) і безладом? Часто під безладом розуміють прояв системою якісно нового режиму – хаосу. Критерієм появи такого режиму може служити стійкість утворень, що виникають у системі, до малих збурень. Якщо така стійкість відсутня, детермінований опис втрачає сенс, і необхідно застосовувати статистичні методи.

Проте, як показали численні дослідження, статистичні закони, а разом з ними й статистичний опис, належать не лише до дуже складних систем з великим числом ступенів вільності. Справа тут не в складності досліджуваної системи і не в зовнішніх «шумах», а в появі при деяких значеннях параметрів експоненційної нестійкості руху.

Вперше ця концепція отримала строге обґрунтування на простій моделі статистичної механіки – більярді. Добре відомо, що до таких систем зводиться ряд задач статистичної фізики. По суті, математичним плоским більярдом є звичайний більярд, лише з довільною конфігурацією столу і без луз. Виявляється, що залежно від форми межі навіть *суто детермінована система з двох куль (!)* може мати властивість хаотичності.

Які ж закони управляють хаосом? Чи можливо створити математичний апарат, що дозволяє несуперечливо описувати хаотичну динаміку і передбачати виникнення хаосу в тих чи інших системах? І нарешті, чи можна знайти методи прогнозування поведінки хаотичних систем? Відповідями на ці та низку інших запитань займається так звана *теорія динамічного (або детермінованого) хаосу*, що є одним з розділів нелінійної динаміки. На сьогодні розроблено методи класифікації різних типів хаосу, знайдено закономірності його розвитку, створено техніку, що дозволяє відрізнити (наприклад, в експерименті) хаос від «білого шуму», і т. ін. Більше того, було виявлено і строго обґрунтовано, що складна просторово-часова поведінка розподілених середовищ із величезним числом ступенів вільності може бути адекватно описана нелінійними системами невеликої розмірності.

Як відомо, математичним образом усталених періодичних коливань є граничний цикл. Простим прикладом тут може служити звичайний годинниковий маятник.

Цикли можуть бути стійкими і нестійкими. Стійкі цикли є прикладами атракторів, оскільки вони «притягують» усі близькі траєкторії. Фізично це означає, що при відхиленні від таких коливань система через певний час знову повертається до них. Коливання маятника – стійкий цикл.

Якщо ж система проявляє *хаотичні* властивості, це свідчить про наявність в її фазовому просторі складнішого за цикл утворення – дивного (інколи кажуть: хаотичного) атрактора. *Дивний атрактор* –

це множина дуже складної геометрії, до якої притягуються траєкторії, що проходять поблизу від нього. Це поняття вперше було введено у відомій праці Д. Рюеля і Ф. Такенса «Про природу турбулентності» в 1971 р.

Дослідження нелінійних динамічних процесів у математиці та фізиці показали, що хаотична поведінка в системах з невеликим числом ступенів вільності досить типова. Отже, проблема прогнозування стала загальною для багатьох напрямів сучасної науки. У зв'язку з цим останнім часом почав інтенсивно розвиватися новий напрям у нелінійній динаміці та синергетиці, присвячений проблемам прогнозування поведінки хаотичних систем, управління їхньою динамікою і можливості придушення хаосу. На цьому шляху вдається знайти підходи до таких застосувань, як обробка інформації, потайний зв'язок (тобто пересилання зашифрованих повідомлень), стабілізація нерегульованих скорочень серцевого м'яза і дефібриляція, прогноз динаміки фінансових ринків та ін.

7.1.2. Економічний хаос у детермінованих системах

Ділові цикли можуть бути викликані різними економічними механізмами. Проте на практиці економічні дані рідко демонструють регулярну осциляційну поведінку. Змінні в економіці найчастіше схильні до нерегулярних флуктуацій. Нижче надано пояснення таким ендегенним «хаотичним» економічним явищам. Буде показано, що і в хаосі є порядок, що «випадкова» економічна поведінка може мати в основі просту геометричну першопричину. Такі явища детерміновані за своєю природою і улягають певним правилам, які не містять ані найменшого елементу випадковості. У теорії майбутнє цілком зумовлене минулим, а на практиці точно передбачити майбутнє в світовому хаосі майже неможливо.

7.1.2.1. Хаос у детермінованих системах

Згідно з «Британською енциклопедією», слово «хаос» має грецьке походження й означає: нескінченний порожній простір, що існував до всіх речей. Пізніша романська концепція трактувала хаос як первинну сиру безформну масу, в яку Творець вносить порядок і гармонію.

У сучасних дослідженнях світові, в його технічному розумінні, приписується нерегулярний рух, що генерується нелінійними системами, динамічні закони яких однозначно визначають тимчасову еволюцію системи від її заданої передісторії до поточного стану.

Під *детермінованим рухом* ми зазвичай розуміємо наявність закону у вигляді або диференційних, або різницевих рівнянь, який дозволяє розрахувати динаміку системи на основі заданих початкових умов.

При цьому, як правило, передбачається, що детермінований рух швидше регулярний, ніж хаотичний. Проте на межі XIX і XX століть Пуанкаре відкрив, що певні механічні системи, еволюція яких улягає рівнянням Гамільтона, можуть проявляти хаотичність. На жаль, це було сприйнято як курйоз, і минуло 70 років, перш ніж у 1963 р. Е. Н. Лоренц виявив, що навіть проста система трьох зв'язаних нелінійних диференційних рівнянь першого порядку може привести до цілком хаотичних траєкторій. Лоренц знайшов один з перших прикладів детермінованого хаосу в дисипативних системах.

У наш час «детермінований хаос» – поле для досить активних досліджень. Для класифікації різних типів хаосу розроблено безліч методів. Слід зауважити, що загальноприйнятого визначення хаосу не існує, і в літературі він найчастіше визначається в контексті дисипативних систем – як явище, пов'язане з проявом випадковості та непередбачуваності в цілком детермінованих системах, що позначається як «динамічна стохастичність», «детермінований хаос», «самозбуджений шум», «внутрішня стохастичність» і «Гамільтонова стохастичність» (див.: Хао, 1984; Гукенхейлмер і Холмс, 1983; Віггінс, 1988).

На сьогодні відомо щонайменше три шляхи, якими при зміні зовнішніх управляючих параметрів нелінійна система переходить до хаосу (Шустер, 1984). Кожен вид хаотичності може бути реалізований експериментально. При цьому поведінка системи виявляє дивну універсальність, схожу з універсальністю, яку можна знайти в переходах між точками рівноваги систем другого порядку. Перший шлях переходу до хаосу було знайдено одночасно Гроссманом і Тома (1977), Фейгенбаумом (1978) і Колле та Трессером (1978). Вони розглядали просте різницеве рівняння, яке використовувалося, наприклад, у біології для опису тимчасової залежності популяції, і визначили, що популяція осцилює в часі між стійкими величинами (нерухомими точками), значення яких розглядаються також в якості значень зовнішніх параметрів. Це продовжується доти, доки число нерухомих точок не стає нескінченним, причому значення параметра, за якого тимчасові зміни популяції стають нерегулярними, залишається скінченним.

Другий шлях (перехід), відомий як сценарій переміжності, був розроблений Маннвелем і Поме (1979). Переміжність означає, що регулярний у часі сигнал розривається статистично розподіленими інтервалами нерегулярного руху (переміжний розрив). При варіації зовнішнього управляючого параметра середнє число цих розривів збільшується доти, доки рух не стає повністю хаотичним.

Третій перехід було знайдено Рюелем і Такенсом (1971) та Ньюхаусом зі співавторами (1978). Вони запропонували перехід до турбулентного руху, відмінний від відкритого значно раніше Ландау (1944) і Ландау та Ліфшицем (1959). Ландау розглядав турбулентність у часі

як границю нескінченної послідовності нестійкостей (біфуркацій Хопфа), кожна з яких генерує нову основну частоту. Проте Рюель, Такенс і Ньюхаус показали, що навіть після двох нестійкостей, уже на третьому кроці, траєкторії починають «притискатися» до обмеженої області фазового простору, де спочатку близькі траєкторії експоненційно розходяться, так що рух стає хаотичним. Ці особливі області фазового простору назвали дивними атракторами. На рис. 3.31(a) продемонстровано сценарій переходу до хаосу за Ландау і показано, що зі збільшенням параметра r біфуркація Хопфа породжує щедалі більше основних частот. Рис. 3.31(b) ілюструє перехід до хаосу за Рюелем–Такенсом–Ньюхаусом.

У часових залежностях багатьох економічних змінних можна спостерігати шумові флуктуації. Традиційним поясненням таких флуктуацій було твердження про те, що для економіки властиві тимчасові збурення: на економічну діяльність (наприклад, сільськогосподарську) впливають шторми, землетруси та інші схожі екзогенні чинники. Нині на економічну науку впливають новітні математичні дослідження хаосу, і економісти намагаються інтерпретувати хаотичні явища в термінах детермінованих систем.

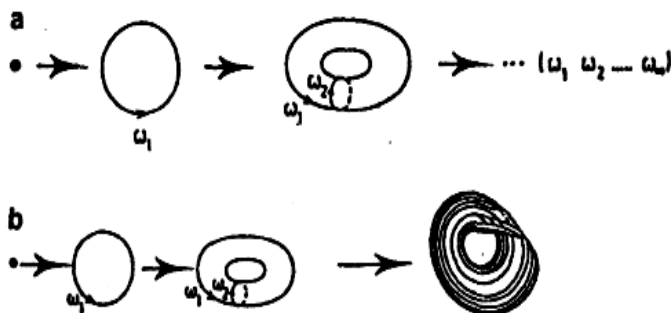


Рис. 3.31. (a) – перехід до хаосу за Ландау.
(b) – перехід до хаосу за Рюелем–Такенсом–Ньюхаусом

Розглядаються ситуації, коли економічний хаос ініційований не лише екзогенними шоками. Стверджується, що цей хаос може бути викликаний ендегенно у відносно простих нелінійних системах.

Можна згадати тут деякі дослідження, що стосуються економічного хаосу. Так, Бенхабіб і Дей (1981, 1982) та Грандмон (1985) побудували моделі монетарних явищ із генераціями, що перекриваються, і квазідинамічні моделі споживчого вибору з ендегенними перевагами, які проявляють хаотичну динаміку. Дей (1983) розглядав процес класичного економічного зростання, яке є моделлю на зразок «мальтузі-

анства», де рівень виробництва визначає швидкість росту населення. Виробництво, у свою чергу, залежить від трудових ресурсів. Взаємодія цих двох факторів може привести до циклів або хаосу. Дана і Монтруччіо (1986) обговорювали виникнення періодичних і хаотичних явищ у дуопольних іграх, в яких фірми прагнуть максимізувати дисконтовану суму прибутку і використовують марківські стратегії досягнення ідеальної рівноваги. Хаос виявлено також у неокласичній оптимальній моделі зростання (див., напр., Болдрін і Монтруччіо, 1986; Денкере і Пелікан, 1986). Нижче розглянемо, яким чином у детермінованих динамічних системах може зародитися хаос.

7.1.2.2. Економічний хаос у дискретній системі

Деякі дуже прості рівняння можуть описувати досить складну динамічну поведінку. Розглянемо одновимірне дискретне відображення:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Добре відомо, що хаос може виникнути, навіть якщо дискретне відображення має дуже простий вигляд.

Модель, яку ми обговоримо нижче, запропонована Штутцером (1980). Але спочатку розглянемо *макроекономічну модель зростання*, запропоновану Хаавельмо (1954).

$$\frac{dN}{dt} = N \left(a - \frac{\beta N}{Y} \right), \quad \alpha, \beta > 0, \quad (3.70)$$

$$Y = AN^\alpha, \quad A > 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

де N – чисельність населення, Y – реальний обсяг виробництва, а α, β, a і A – константи. Підстановка другого рівняння в перше приводить до

$$\frac{dN}{dt} = N \left(a - \frac{\beta N^{1-\alpha}}{A} \right). \quad (3.71)$$

Стає очевидним, що закон зростання є узагальненням аналогічної логістичної форми, яка широко використовується в теорії біологічних популяцій та економічному аналізі. Динаміка цієї системи дуже проста. Якщо початковою умовою є $N(0) > (<) (aA / \beta)^{1/(1-\alpha)}$, тоді і N , і Y монотонно зменшуються (збільшуються) доти, доки не досягнуть своїх відносних єдиних рівноважних значень.

Якщо ввести дискретний час і замінити похідні за часом першими різницями, то (3.71) можна переписати у вигляді

$$N_{t+1} = N_t \left[(1+a) - \frac{\beta N_t^{1-\alpha}}{A} \right],$$

а потім привести цей вираз до вигляду

$$x_{t+1} = (1+a)x_t(1-x_t^{1-\alpha}) = F(x_t; a, \alpha), \quad (3.72)$$

де нова змінна визначається заміною

$$N_t = x_t \left[\frac{A(1+a)}{\beta} \right]^{1/(1-\alpha)}.$$

Проаналізуємо динаміку (3.72). Перш ніж приступити до аналізу, визначимо декілька основних положень, що стосуються різницевих рівнянь першого порядку $x_{t+1} = F(x_t)$, де $F: J \rightarrow J$ безперервно і J – замкнутий обмежений інтервал на дійсній прямій. Позначимо через $F^n(x)$ n -кратну ітерацію F , причому $F^0(x) = x$ показує тотожне відображення.

Визначення. (N – періодична точка.) Точка $p \in J$ називається невивродженою [вивродженою] періодичною точкою з періодом n , або n -періодичною точкою, в тому і лише тому випадку, якщо $F^n(p) = p$ і $p \neq F^k(p)$ для всіх [деяких] $1 \leq k < n$. Точка $p \in J$ називається періодичною, якщо для деякого $n \geq 1$ вона є n -періодичною. Одноперіодична (1-періодична) точка називається стаціонарним станом, або рівновагою, або нерухомою точкою F .

Визначення. (Цикл, період.) Якщо p є n -періодичною точкою, то кожна точка в послідовності $\{p, F(p), \dots, F^{n-1}(p)\}$ також n -періодична, а сама послідовність називається періодичною орбітою, або циклом точки p . Якщо p – невивроджена, то всі точки періодичної орбіти різні, і кажуть, що орбіта має довжину або період n .

Розглянемо, наприклад, найпростіше різницеве рівняння

$$c_{t+1} = hc_t,$$

розв'язком якого є $c_t = c_0 h^t$, що росте експоненційно при $|h| > 1$. Якщо $0 < h < 1$, система наближається до стаціонарного стану. В цьому випадку при $h = -1$ існує 2-цикл, який виникає тільки для одного цього значення параметра.

Визначення. (Асимптотична періодичність.) Точка p є асимптотич-

но періодичною, якщо існує періодична точка $q \neq p$, для якої

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [F^n(q) - F^n(p)] = 0.$$

Визначення. (Локальна стійкість.) Кажуть, що k -періодична точка p і відповідна їй періодична орбіта локально асимптотично стійка, якщо в кожній точці x якогось відкритого інтервалу I , що містить p , виконується умова

$$|F^k(p) - x| < |p - x|.$$

Визначення. (Хаотична динаміка.) Термін «хаотична динаміка» стосується динамічної поведінки певних рівнянь F , які мають:

- а) невідроджену n -періодичну точку для кожного $n \geq 1$;
- б) незчисленну множину $S \in I$, що не містить періодичних і асимптотичних періодичних точок. Траскторії таких точок блукають в I «випадково».

Для ілюстрації вищевикладеного візьмемо $I = [0, 1]$ і введемо в (3.72) для простоти $\alpha = 1/2$. У цьому випадку F відображає I у себе. Слід зауважити, що якісні властивості F ніяк не залежать від вибору конкретного значення $0 < \alpha < 1$. А отже, модель записується у такому вигляді:

$$x_{t+1} = (1 + a)x_t \left(1 - x_t^{1/2}\right) = F\left(x_t; a, \frac{1}{2}\right). \quad (3.73)$$

Геометрію F для різних значень a ($0 \leq a \leq 5,75$ і $x(0) \in [0, 1]$) показано на рис. 3.26.

Для кожного значення a точки рівноваги задаються перетином графіка $F(x_t; a)$ з прямою лінією під кутом 45° , як на рис. 3.26. Для кожної величини $a > 0$ є два стани рівноваги: $x_0 = 0$ і $x_0 = [a / (1 + a)]^2$. Точка $x_0 = 0$ нестійка і відштовхує сусідні точки. Локальна стійкість інших точок може бути визначена шляхом лінеаризації відображення в точці рівноваги.

Маємо

$$F'(x_0; a) = 1 - \frac{a}{2} = \Theta(a). \quad (3.74)$$

Локальну стійкість x_0 визначає власне значення $\Theta(a)$. Якщо $0 < \Theta < 1$, сусідні точки притягуються до x_0 експоненційно і монотонно. Якщо $0 > \Theta > -1$, збіжність до x_0 має вигляд затухаючих коли-

вань. Коли $\Theta = -1$, стан x_0 ні стійкий, ні нестійкий (у випадку загального стану втрата стійкості рівноваги за сценарієм народження стійкої 2-орбіти відповідає стійкості примежового випадку). І нарешті, якщо $|\Theta| > 1$, то x_0 є нестійким. Ці типи поведінки мають місце відповідно у випадках $0 < a < 2$, $2 < a < 4$, $a = 4$ і $4 < a < 5,75$, як представлено на рис. 3.32.

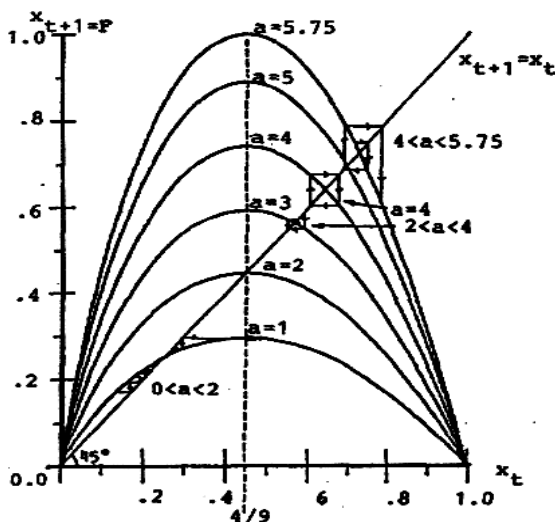


Рис. 3.32. Рівновага і стійкість

Коли рівновага стійка, тобто $a < 4$, вона досягається будь-якою траєкторією, що починається з довільної точки. Застосування в цій області традиційного порівняльного статичного аналізу показує, що для достатньо великих t збільшення параметра a веде до збільшення x_t . Якщо $4 < a < 5,75$, траєкторії не входять у рівновагу, а залишаються в області, обмеженої нулем і одиницею. Фактично, як тільки параметр a перевищує 4, нестійка точка рівноваги розпадається на дві стійкі точки з періодом 2, тобто на стійкі періодичні орбіти довжини 2. Для $a = 4,2$ на рис. 3.33 показано дві невідроджені нерухомі точки відображення $F^2(x; 4.2)$, позначені як x_{01}^2 і x_{02}^2 відповідно.

Як показано Штутцером, 2-періодичний цикл стає нестійким для значень a , що перевищують 4.8, і кожна 2-періодична точка роз-

падається на дві 4-періодичні точки, які відповідають стійкому циклу довжини 4, позначеному як $\{x_{01}^4, x_{02}^4, x_{03}^4, x_{04}^4\}$. Рис. 3.33 і 3.34 демонструють цей феномен.

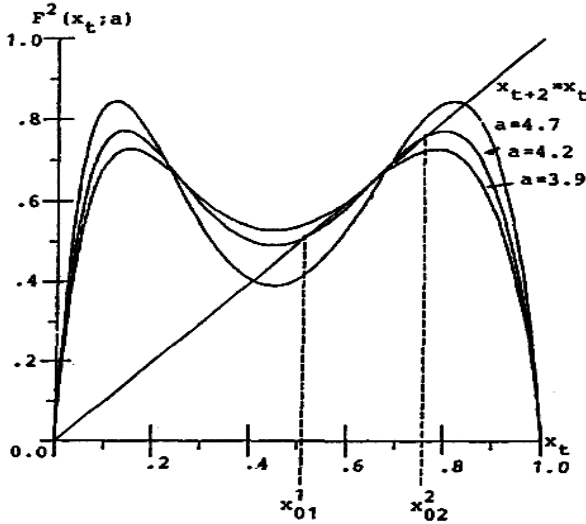


Рис. 3.33. Біфуркація x_0 у 2-періодичну орбіту

При збільшенні параметра a процес біфуркації подвоєння продовжується, генеруючи невироджені орбіти довжини 2^k ($k = 2, \dots$). Такі орбіти називаються *гармоніками 2-періодичної орбіти*. Можна показати, що всі гармоніки виникають раніше, ніж параметр a досягає значення 5.54, хоча його точне порогове значення невідоме. Отже, область зміни a , всередині якої спочатку зароджуються стійкі орбіти довжини k , які потім стають нестійкими і розпадаються на $2k$ -періодичні орбіти, при досягненні параметром a граничного значення $a_c < 5.54$, стискається.

Інтервал $a_c < a \leq 5.75$ називається *областю хаосу*. При досягненні цією областю значень параметра a можуть виникнути дивні явища. Наприклад, поблизу значень 5.540 існують 3-періодичні орбіти. Від них стартує утворення 3^k -періодичних орбіт ($k = 2, \dots$) описаним вище способом. Насправді, якщо ми можемо локалізувати 3-періодичну орбіту, відома *теорема Лі та Йорке* (1975) стверджує, що в цьому

випадку для будь-якого $F(x_t; a)$ повинні існувати також невідроджені точки всіх періодів і незчисленна множина періодичних (не асимптотично періодичних!) точок, траєкторії яких випадковим чином блукають в області F .

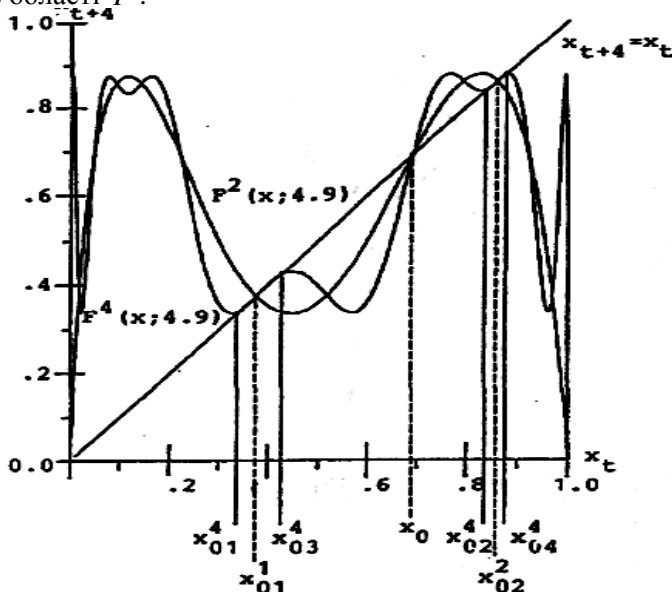


Рис. 3.34. 4-періодична орбіта для $a = 4.9$.

Теорема (Лі та Йорке). Хай J – інтервал, і відображення $F : J \rightarrow J$ безперервне. Передбачимо, що існує точка $a_1 \in J$, для якої точки $a_2 = F(a_1)$, $a_3 = F^2(a_1)$ і $a_3 = F^2(a_1)$ задовольняють співвідношенням $a_4 \leq a_1 < a_2 < a_3$ (або $a_4 \leq a_1 < a_2 < a_3$).

Тоді:

1. для кожного $k = 1, 2, \dots$ в J існує періодична точка періоду k ;
2. існує незчисленна множина $S \in J$ (що не містить періодичних точок), яка задовольняє наступним умовам:
 - а) для довільних попарно не однакових $p, q \in S$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0;$$

б) для кожної точки $p \in S$ і періодичної точки $q \in J$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0.$$

При певному значенні a наша динамічна економічна система задовольняє вимогам теореми. Приклад хаотичної поведінки наведено на рис. 3.35.

Підсумовуючи сказане, робимо висновок, що якщо величина a , яка незалежно змінюється, перевищує певне значення, збіжність до рівноваги перестає бути монотонною і виникає збіжність осциляторного типу. Якщо a збільшувати далі, можна знайти таке значення, за якого система генерує цикл довільного періоду k . Існує також незчисленна множина початкових умов, за яких випущені траєкторії флюктують в обмеженій області аперіодично і непередбачувано, реалізуючи якийсь стохастичний (хаотичний) процес.

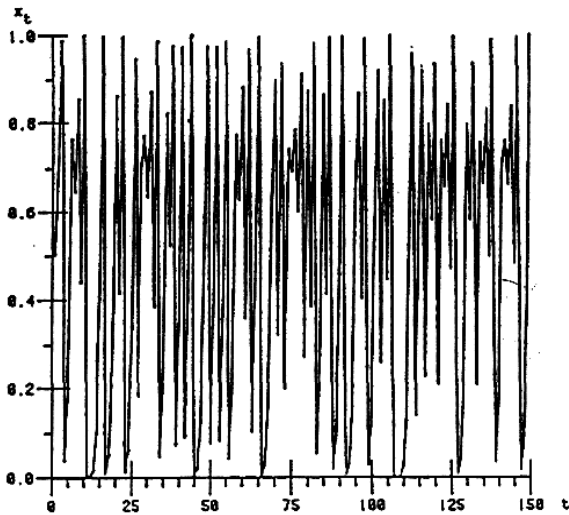


Рис. 3.35. Хаос ($a = 5.75$, $\alpha = 1/2$)

Відносно малі зміни структурних параметрів можуть призвести до великих, якісних змін поведінки системи. Крім того, на характер еволюції нелінійної системи низького порядку можуть сильно впливати початкові умови. При конструюванні моделей ця залежність часто випадає з поля зору. Можна підсумувати, що якісні зміни структурних

параметрів і початкових умов, разом з можливими похибками вимірів цих параметрів, змушують сумніватися в можливості прогнозування поведінки нелінійних систем і управління ними. А отже, навіть якщо модель побудована точно, на практиці прогнозування і управління можуть виявитися неможливими внаслідок неусувних помилок вимірів.

Цей приклад показує, що траєкторія простого нелінійного детермінованого різницевого рівняння першого порядку може бути схильною до хаотичних флуктуацій, які виглядають випадковими і помилково можуть бути пояснені впливом неврахованих змінних, або врахованих, але таких, що вважаються випадковими. У детермінованих лінійних різницевих рівняннях такі явища не спостерігаються – хаос породжується саме нелінійністю. Цей висновок означає також, що в контексті моделей макроекономічних явищ, заснованих на лінійних різницевих рівняннях, введення в структурні рівняння правдоподібних, теоретично виправданих нелінійностей може пояснити економічні флуктуації так само успішно або ще успішніше, ніж введення випадкових змінних.

Дискретна версія оригінальної моделі Хаавельмо має абсолютно інші якісні властивості. Система більше не проявляє безумовної монотонної збіжності до рівноваги. Це означає, що дискретний аналог безперервної системи не може бути надійно забезпечений простою заміною похідних першими різницями. Навпаки, відсутність визначеності в тому, як представити реальну систему в дискретному вигляді, призводить до зростання фундаментального значення того факту, що вибір інтервалу часу може значно впливати на якісні властивості моделі.

7.1.2.3. Аперіодичне оптимальне економічне зростання

Якщо виконані певні умови, то в стандартній моделі оптимального зростання можуть виникнути граничні цикли. Нижче показано, що в таких моделях може проявитися складніша поведінка, ніж регулярно-періодична. Коли рівновага втрачає свою стійкість через те, що дві пари комплексно зв'язаних власних значень лінеаризованої системи одночасно перетинають уявну вісь, у системі можуть виникати нерегулярні коливання.

Ми вивчаємо економічні системи, що складаються з трьох частин: двох виробничих і однієї споживчої. Розглянемо таку задачу оптимального зростання:

$$\max \int_0^{\infty} U[T(y, k)] \exp[-(r - g)t] dt \quad (3.75)$$

відносно

$$\frac{dk_i}{dt} = y_i - gk_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.74)$$

де t – час; y – випуск продукції на душу населення; k – запаси матеріального капіталу на душу населення; $T(y, k) = c$ – функція споживання; $U[T(y, k)]$ – корисність, отримана від споживання; $r(\geq 0)$ – норма відсотка прибутку; $g(\geq 0)$ – швидкість приросту населення.

Припущення Бенхабіба і Нішімури для доведення існування біфуркації Хопфа (дозволяють записати систему в локальному вигляді):

(A1) Уся продукція виробляється неодноразово, причому виробнича функція є лінійно однорідною, строго квазівогнутою при від'ємних значеннях факторів і двічі диференційовною – при невід'ємних.

(A2) Якщо через (K_{ij}) позначено множину факторів, що визначають виробництво j -го товару, то j -й товар не може бути вироблений без (K_{ij}) . Застосування принципу максимуму до задачі (3.75)–(3.76) веде до системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dk_i}{dt} &= y_i - gk_i, & p_i &= \frac{\partial T}{\partial y_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= -U' \omega_i + rq_i, & \omega_i &= \frac{\partial T}{\partial k_i}, \\ qi &= U' p_i, & i &= 1, \dots, n, \end{aligned}$$

де p_i і ω_i – ціна і величина орендної плати для i -го товару в термінах цін споживчих товарів. Для $r \in (g, r^*)$, де r^* задано і може бути нескінченно великим (невід'ємним), ці величини визначені однозначно. Задача має єдину рівновагу.

(A3) У точці рівноваги матриця коефіцієнтів капіталу є нерозкладною.

(A4) У стані рівноваги для виробництва споживчого товару необхідні капіталовкладення хоча б за однією компонентою та безпосереднє застосування праці.

(A5) В околі рівноваги гранична корисність від споживання є постійною, тобто $U'' = 0$ і $U' = 1$.

(A6) В околі рівноваги матриця вхідних даних є невід'ємною.

Хай (A1–A6) виконані. Тоді систему можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{dk_i}{dt} &= y_i(k, p) - gk_i; \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\omega_i(k, p) + rp_i.\end{aligned}\tag{3.77}$$

Щоб гарантувати існування аперіодичних коливань, зробимо наступне припущення. Хай система (3.77) має дві пари простих, комплексно зв'язаних власних значень, позначених, відповідно, як $z_{1,2}(r)$ і $z_{3,4}(r)$:

$$\begin{aligned}z_{1,2}(r) &= \alpha_1(r) \pm i\beta_1(r), \\ z_{3,4}(r) &= \alpha_2(r) \pm i\beta_2(r),\end{aligned}\tag{3.78}$$

де α_i і β_i – дійсні числа. Передбачається, що існує таке значення $r = r_0$, що

$$\begin{aligned}\alpha_1(r)\alpha_2(r) &> 0, \quad \alpha_1(r)\alpha_2(r) > 0, \\ \frac{d\alpha_2(r)}{dr} &\neq 0, \quad \frac{d\alpha_2(r)}{dr} \neq 0, \quad r \neq r_0.\end{aligned}\tag{3.79}$$

Тут вимагається, щоб $|r - r_0|$ було достатньо малий. Це означає, що якобіан має дві пари суто уявних власних значень, які при проходженні r через критичне значення r_0 одночасно втрачають стійкість. З прикладів, наведених у Бенхабіба і Нішімури (1979), ми бачимо, що це припущення є цілком прийнятним.

Хай $x = r - r_0$ і приймаємо скрізь $z_i(x)$ замість $z_i(r)$. З (3.79) випливає, що дійсні частини власних значень завжди мають однаковий знак. Якщо x змінюється так, що $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ змінюють значення з від'ємних на невід'ємні, то стійкість втрачається. За теорією біфуркацій, у цей момент від відгалуження (k_0, p_0) можуть зародитися нові (можливо, досить складні) розв'язки, залежні від часу. Щойно x перетинає границю області стійкості та нестійкості ($x = 0$), лінійна теорія стійкості передбачає втрату стійкості стаціонарного стану – через експоненційну залежність функції від часу t . Така експоненційно зростаюча функція не може описувати реальний розв'язок системи на великих часових періодах, оскільки з часом усе істотнішими стають нелінійні члени. Саме тому при вивченні нестійких динамічних систем ми повинні брати до уваги нелінійності.

Введемо параметр розкладання амплітуди:

$$\varepsilon^2 = \begin{cases} x, & \text{при } d\alpha_1(0)/dx > 0, \\ -x, & \text{при } d\alpha_1(0)/dx < 0. \end{cases} \quad (3.80)$$

Занг (1989) довів наступну теорему.

Теорема 3.1. Хай задача оптимізації задовольняє (3.75)–(3.80). Якщо $|\beta_1 - 2\beta_2|$, $|\beta_1 - \beta_2|$, $|\beta_1 - 2\beta_2|$, всі порядку $O(1)$ за ε , то

$$\begin{bmatrix} k(\varepsilon, t) \\ p(\varepsilon, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_0 \\ p_0 \end{bmatrix} + \quad (3.81)$$

$$+ \varepsilon [C_1 R(m) \sin F + C_2 R(m) \cos F + D_1 S(m) \sin G + D_2 S(m) \cos G] + (\varepsilon^2),$$

де C_i і D_i – постійні чотиривимірні вектори і

$$\begin{aligned} A &= (1 + \varpi_2 \varepsilon^2) \beta_1 t + A^*(m), \\ B &= (1 + \nu_2 \varepsilon^2) \beta_2 t + B^*(m), \end{aligned} \quad (3.82)$$

а $R(m)$, $S(m)$, $A^*(m)$ і $B^*(m)$ є скалярними функціями, які визначаються зі співвідношення:

$$\begin{pmatrix} R' \\ RA^* + \beta_1 \varpi_2 R \\ S' \\ SB^* + \beta_2 \nu_2 S \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} R \\ S \\ R^3 \\ Y \\ R^2 S \\ RS^2 \\ S^3 \end{pmatrix}. \quad (3.83)$$

Тут $N = (n_{ij})_{4 \times 6}$. Величини C_i , D_i , ω_2 , ν_2 , N визначені в Занга (1989).

Наближення (3.81) справедливе для періодів часу порядку $O(1/\varepsilon^2)$. Стійкість розв'язку визначається асимптотичною поведінкою функцій $R(m)$ і $S(m)$ при $m \rightarrow \infty$. Якщо вони наближаються до постійного значення або осцилюють, то розв'язок біфуркації є стійким. Обчислення параметрів теореми просте, але марудне.

Теорема стосується можливих нерегулярних коливань, що розгалужуються від стану рівноваги. Цілком протилежно випадку біфуркації Хопфа, при двох простих комплексних власних значень залежний від

часу розв'язок не обов'язково буде періодичним. Суперпозиція гармонік A і B , у випадку, якщо β і β_2 несумірні, не є періодичною функцією. Точно передбачити поведінку такої системи майже неможливо. Поведінку $p_i(\varepsilon, t)$ за несумірних β і β_2 представлено на рис. 3.36.

Різниця між дійсною нормою основного капіталу на душу населення і його рівноважним значенням складається з двох частин, які мають асвигляд: $C_{11}R(m)\sin A + C_{21}R(m)\cos A$ і $C_{11}R(m)\sin A + C_{21}R(m)\cos A$. Отже, якщо β і β_2 сумірні, спостерігаємо регулярний періодичний рух, хоча упродовж кожного періоду поведінка видається нерегулярною.

Цікаво досліджувати поведінку інших змінних системи. Якщо умови теореми виконані, виробництво і споживання осцилюють, хоча їхній рух здійснюється в області відповідних рівноважних значень. Поглянемо на динаміку накопичення капіталу $K_1(t)$. Якщо $K_1(t) = k_1(\varepsilon, t)L_0 \exp(gt)$, де L_0 – первинна чисельність населення, то фонд капіталу зростає осциляторно, як показано на рис. 3.37. На дуже великих періодах часу t основний капітал може значно відхилитися від рівноважного значення.

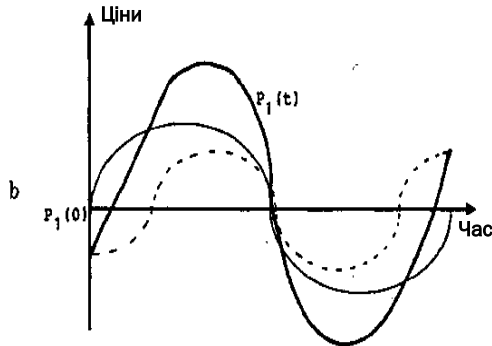


Рис. 3.36. Нерегулярні коливання цін

З наведеного вище випливає, що в околі рівноваги змінні демонструють «випадкове блукання». Цей рух може бути періодичним або аперіодичним залежно від заданих початкових умов.

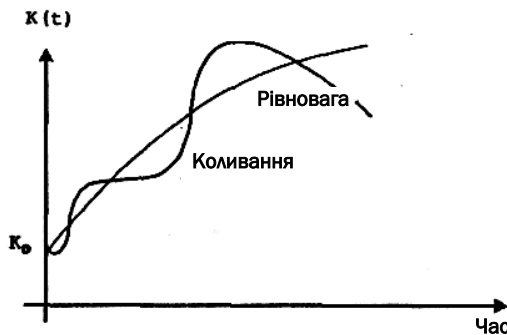


Рис. 3.37. Зростання капіталу може значно відхилитися від рівноваги

7.1.2.4. Динаміка міст – система Лоренца (приклад застосування)

Наведені приклади показали дуже важливі особливості еволюційних систем. У таких системах з часом шляхом біфуркацій виникають нові види поведінки. Послідовність біфуркацій може перевести систему від рівноважного стану до хаотичного. Прикладом зародження хаосу через послідовні біфуркації є сценарій Ландау–Хопфа. Як стверджували Рюель і Такенс, мало ймовірно, що цей сценарій у природі реалізується. Для отримання низькорозмірного різноманіття у фазовому просторі, який називається дивним атрактором, вистачає чотирьох послідовних біфуркацій.

Запропонована схема може бути представлена так:

нерухома точка \rightarrow граничний цикл \rightarrow 2-вимірний тор \rightarrow 3-вимірний тор \rightarrow дивний атрактор.

Ця схема передбачає інший шлях дослідження хаосу в динамічних системах. Строго визначення дивних атракторів є наступним.

Визначення. (Дивний атрактор). Розглянемо n -вимірну систему $dx/dt = f(x, r)$, де r – скаляр. Обмежена множина A в R^n є *дивним атрактором* системи, якщо існує множина U , що має такі властивості:

- 1) U є n -вимірним околom A .
- 2) Якщо $x(0)$ належить U , то для будь-якого невід’ємного t $x(t)$ також належить U і $x(t) \rightarrow A$.
- 3) Якщо $x(0)$ належить U , має місце значна залежність від початкових умов, тобто малі варіації $x(0)$ за короткий проміжок часу призводять до істотних відмінностей траєкторій системи.
- 4) Атрактор є нерозкладною множиною.

Існування дивного атрактора в безперервній за часом динамічній системі означає значну нерегулярність поведінки. Покажемо, що така

поведінка може спостерігатися в дуже простих тривимірних динамічних системах.

Для ілюстрації хаотичних явищ у диференціальних рівняннях найбільш відома *система Лоренца*. У 1963 р., поза зв'язком з ідеями біфуркацій, Лоренц опублікував статтю, присвячену турбулентності. Система рівнянь Лоренца складається з трьох звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{3.84}$$

де σ , r і b – дійсні невід'ємні параметри.

Лоренц вивів цю систему з таких міркувань. Двовимірна комірка рідини нагрівається знизу й охолоджується зверху, що породжує рух рідини – конвекцію. Результируючий конвективний рух моделюється рівнянням у частинних похідних. Змінні в рівнянні розкладаються за модами в нескінченний ряд, у якому всі доданки, крім трьох (3.84), тотожно дорівнюють нулю. Змінна x у (3.84) є швидкістю конвективного обміну. Змінні y і z – це, відповідно, горизонтальна і вертикальна варіації температури. Три параметри σ , r і b пропорційні відповідно числу Прандтля, числу Релея і певному коефіцієнту, що відображає фізичні властивості цієї області.

При зміні параметрів поведінка потоку теж змінюється. Чисельно показано, що для деяких значень параметрів розв'язки рівнянь псевдовипадково (хаотично) осцилюють, причому, мабуть, нескінченно довго. До того ж, існують певні значення параметрів, за яких спостерігається явище «передтурбулентності», – коли протягом тривалого періоду часу траєкторії хаотично осцилюють, перш ніж перейти до стійкого стаціонарного або стійкого періодичного руху. Ми виділяємо також «переміжний хаос», коли чергуються хаотичні і явно стійкі ділянки траєкторій руху. Система може проявляти також тип руху, який називається «*зашумленим періодичним*», коли траєкторії є хаотичними, хоча залишаються дуже близькими до нестійких періодичних орбіт. Вигляд атрактора Лоренца наведено на рис. 3.38, де $\sigma = 4$, $r = 80$, $b = 8/3$.

Цікаво, що за допомогою атрактора Лоренца можна моделювати

багато інших явищ. Наприклад, Хакен (1975) отримав рівняння Лоренца, розв'язуючи задачу нерегулярного розподілу максимумів лазерного випромінення, тоді як Йорке і Йорке (1979) виявили його, працюючи над задачею про конвекцію в тороїдальній області. Кноблох (1981) знайшов, що до системи Лоренца зводиться задача про дискове динамо. Педлоскі та Френтен (1980) використовували рівняння Лоренца для опису динаміки слабонестійких бароклінічних хвиль скінченної амплітуди. Існують й інші задачі, які можна моделювати цими рівняннями (див. Спарро, 1982). На завершення цього списку покажемо, що рівняння Лоренца, принаймні для малих часових періодів, можна використовувати для опису динаміки невеликих міських систем, які входять до складу метрополії.

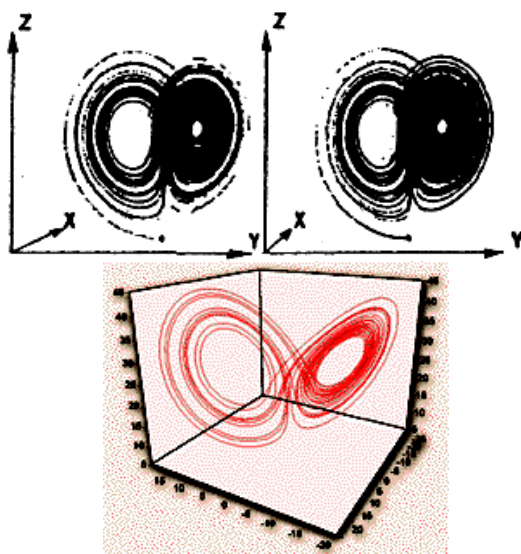


Рис. 3.38. Атрактор Лоренца

Розглянемо в просторі метрополії таку міську систему. Передбачається, що стосовно економічної діяльності вона дуже «мала» порівняно з метрополією. Це означає, що будь-які зміни економічних умов у міській системі не впливають на весь простір метрополії, який залишається структурно стійким протягом часу спостереження. Ми маємо справу з короткостроковою динамікою, отже простір метрополії можна розглядати як стаціонарне оточення. Очевидно, що таке припущення для великих періодів часу є несправедливим.

Передбачається, що фірми і постійне населення вільні у виборі

місцезнаходження і в міському просторі, і в «зовнішньому світі». Оскільки міський простір дуже малий, вибір розташування і розподіл фірм та домогосподарств у місті не може впливати на розташування інших складових частин метрополії.

Локаційні характеристики міського простору описуються такими трьома змінними:

X – продукція, яка виробляється міською системою;

Y – чисельність місцевого населення;

Z – земельна рента.

Продукція міської промисловості може йти на споживання населення або експортуватися зовні. Ми передбачаємо, що можлива наступна динаміка міста:

$$\frac{dX}{dt} = a_1(a_2Y - a_3X), \quad (3.85)$$

$$\frac{dY}{dt} = c_1(c_2X - c_3Y) - c_4XZ, \quad (3.86)$$

$$\frac{dZ}{dt} = d_1XY - d_2Z, \quad (3.87)$$

де a_i , c_i і d_i – невід’ємні параметри.

Параметр a_2 ми визначаємо як попит на міську продукцію, що нормується на душу населення. Параметр a_3 інтерпретується як рівень пропозиції продукції всередині міста. Оскільки попит жителів на міську продукцію і пропозицію її на міському ринку передбачаються залежними від обсягу виробництва і чисельності населення, ці два параметри можуть залежати від змінних системи. Втім, можна вважати a_2 і a_3 постійними, адже ми розглядатимемо лише невеликі відрізки часу. Відповідно до прийнятих визначень, очевидно, що a_2Y – це загальний попит жителів на міську продукцію, а a_3X – загальний потік міської продукції на міський ринок. Отже, рівняння (3.85) означає, що темп зміни міської продукції пропорційний надлишку попиту. Якщо попит більший за пропозицію, виробництво має тенденцію до розширення, і навпаки. Параметр a_1 – коефіцієнт, що означає швидкість встановлення. Для простоти передбачимо, що земельна рента не впливає на виробництво, тобто темп зміни залежить лише від надлишку попиту на міську продукцію.

Зміна чисельності міського населення задається двома членами:

$\frac{dY}{dt} = c_1(c_2X - c_3Y) - c_4XZ$ і $-c_4XZ$. Величину c_2 ми інтерпретуємо як попит на працю з боку фірм для виробництва одиниці продукції. От-

же, c_2X – це загальний попит на працю на міському ринку праці. Параметр c_3 визначається як відношення чисельності міських жителів, що вибирають роботу в місті, до загальної чисельності міського населення. Величина c_3Y задає загальну величину пропозиції праці на

міському ринку праці. Член $\frac{dY}{dt} = c_1(c_2X - c_3Y) - c_4XZ$ – надлишок попиту на працю в місті. Він впливає на напрям міграції. На міграцію впливає також величина земельної ренти, оскільки люди вибирають для проживання з низькою ціною на землю. Член $-c_4XZ$ враховує цей фактор.

У (3.87) ми передбачали, що будь-яка зміна величини земельної ренти негативно впливає на її поточний рівень. Це міркування засноване на тому, що якщо земельна рента дуже висока, то збільшувати її далі важко. Член d_1XY означає, що на зміни земельної ренти позитивно впливають X і Y .

Щоб показати, що система (3.85)–(3.87) ідентична системі Лоренца, здійснимо таке перетворення:

$$\begin{aligned} t &= \frac{t^*}{c_1c_3}, \quad \sigma = \frac{a_{13}}{c_1c_3}, \quad r = \frac{a_2c_2}{a_3c_3}, \quad b = \frac{d_2}{c_1c_3}, \\ x &= \left(\frac{c_4}{d_1}\right)^{1/2} \frac{d_1X}{c_1c_3}, \quad y = \left(\frac{c_4}{d_1}\right)^{1/2} \frac{d_1a_2Y}{a_3c_1c_3}, \quad z = \frac{c_4a_2Z}{a_3c_1c_3}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Легко встановити, що (3.88) перетворює (3.85)–(3.87) у (3.84). Таким чином, ми дали інтерпретацію рівнянь Лоренца в контексті проблем міського виробництва і міграції населення, показавши можливість їх застосування для пояснення феномена розвитку міст.

Дослідженню поведінки системи Лоренца присвячено багато праць (напр., Спарро, 1982). Для вивчення системи запропоновано безліч підходів, що комбінують різні аналітичні та чисельні методи.

Візьмемо для розрахунку такі значення параметрів нормувань: $\sigma = 10$, $b = 8/3$ і $r = 28$. Поведінка системи відповідає результатам моделювання у праці Спарро (1982). Результати розрахунку представлено на рис. 3.39.

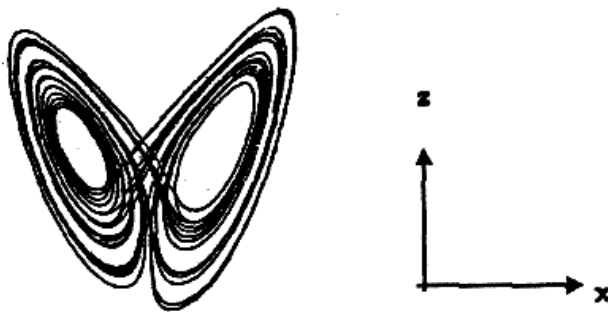


Рис. 3.39. Хаотична динаміка міста

Рисунок робить очевидними деякі властивості розв'язків:

1. траєкторії не є періодичними;
2. рисунок не показує перехідного (нестійкого) процесу, оскільки залежно від того, як довго продовжується чисельна інтеграція, траєкторія продовжує намотуватися, не наближаючись ні до якоїсь періодичної орбіти, ні до якогось стаціонарного стану;
3. топологія рисунка не залежить від вибору початкових умов або методу інтеграції;
4. передбачити, як поводитиметься траєкторія протягом хоч якогось тривалого періоду часу, неможливо.

7.1.2.5. Хаос у моделі міжнародної економіки

Міжнародна торгівля між економіками, в яких мають місце граничні цикли, може привести до появи дивного атрактора і, отже, до виникнення хаосу. Міжнародну торгівлю в певному сенсі можна розглядати як збурення ізольованих економік. Лоренцем (1987) було запропоновано наступну модель.

Розглянемо три економіки (національні, регіональні або міські), кожна з яких описується спрощеними детермінованими рівняннями Кейнса:

$$\begin{aligned} \frac{dY_i}{dt} &= \alpha_i [I_i(Y_i, r_i) - S_i(Y_i, r_i)], \\ \frac{dr_i}{dt} &= \beta_i \left[L_i(Y_i, r_i) - \frac{M_i}{p_i} \right], \end{aligned} \quad (3.89)$$

де індекс i позначає номер економіки, а інші змінні визначені так:

Y – прибуток;

r – відсоткова ставка;

L – функція попиту на гроші;

M – постійна номінальна грошова пропозиція;

p – фіксовані ціни товарів;

$I(Y, r)$ – функція попиту на інвестиції ($I_Y > 0, I_r < 0$);

$S(Y, r)$ – функція заощаджень ($S_Y > 0, S_r > 0$);

α, β – невід’ємні параметри встановлення.

Множина точок $\{(Y_i, r_i) / I_i(Y_i, r_i) = S_i(Y_i, r_i)\}$ утворює IS -криву i -ї економіки; множина точок $\{(Y_i, r_i) / I_i(Y_i, r_i) = S_i(Y_i, r_i)\}$ утворює LM -криву i -ї економіки.

Рівняння (3.89) є системою диференціальних рівнянь шостого порядку, яка може бути записана як об’єднання трьох незалежних двовимірних систем, що мають граничні цикли (за відповідних умов). Якщо всі три економіки є такими, що осцилюють, загальний рух системи (3.89) складається з руху тривимірним тором T^3 , який перебуває у просторі R^6 .

Введення в ізолювані системи фактора міжнародної торгівлі (експорту й імпорту) за допомогою функцій

$$Ex_i = Ex_i(Y_j, Y_k), (i \neq j, k), Im_i = Im_i(Y_i)$$

приводить до рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dY_i}{dt} &= \alpha_i [I_i(Y_i, r_i) - S_i(Y_i, r_i) + Ex_i(Y_j, Y_k) - Im_i(Y_i)], \quad i, j, k = 1, 2, 3, \\ \frac{dr_i}{dt} &= \beta_i \left[L_i(Y_i, r_i) - \frac{M_i^*}{p_i} \right], \quad j, k \neq i, \end{aligned} \quad (3.90)$$

де M_i^* – фіксована пропозиція грошей в i -й економіці, що відображає баланс платіжних рівноваг.

Розширена система (3.90) складається з трьох зв’язаних обмежених осциляторів. Як показано Ньюхаусом, Рюелем і Такенсом (1978), збурення руху по тривимірному тору може призвести до дивного атрактора.

Очевидно, що існування дивного атрактора має на увазі хаотичність траєкторій. Неважко встановити, що система (3.90) задовольняє умовам теореми Ньюхауса–Рюеля–Такенса. Отже, ми встановили існування дивних атракторів у моделі міжнародної торгівлі.

Твердження. Якщо всі три автономні економіки належать до осциляторного типу, введення міжнародної торгівлі може спричинити поя-

ву дивного атрактора в об'єднаній економіці.

Лоренц показав, що існування хаотичних траєкторій у відповідних моделях можна встановити чисельним моделюванням.

7.1.2.6. Хаос і економічне прогнозування

Велика потужність науки визначається здатністю прогнозувати майбутнє. Ця здатність використовує знання про причинні зв'язки між складовими елементами досліджуваних явищ. Історично найважливіші ідеї про можливості наукових прогнозів сформулювали Лаплас і Пуанкаре. Їхні погляди здійснили значний вплив на розуміння процесу економічної еволюції.

Французький математик Лаплас вважав, що закони природи містять строгий детермінізм та цілковиту передбачуваність. Лише недосконалість методів спостережень викликає потребу в теорії ймовірності. За Лапласом, «поточний стан систем у природі є очевидним наслідком станів у попередні моменти, і якщо ми зможемо досягнути всю інформацію, яка в даній точці відображає всі зв'язки всього сущого у Всесвіті, то стане можливим встановлення відносних станів, швидкостей та взаємного впливу кожного складового елемента в будь-який теперішній та майбутній момент часу... Простота законів руху небесних тіл і співвідношень між їхніми масами та відстанями дозволяє простежити їхній рух до будь-якої заданої точки; для того щоб визначити стан системи цих макрооб'єктів у минулих чи майбутніх століттях, для математика достатньо, щоб їхні стани і швидкості були задані в будь-який довільний момент часу. Це можливо завдяки точним інструментам, які застосовуються в астрономічних спостереженнях, та невеликій кількості співвідношень, використовуваних у розрахунках. Але при дослідженні величезної більшості інших явищ природи неповне знання причин, що викликають явище, нехтування їхньою складністю, разом з похибками аналізу, не дозволяють нам досягати такої ж визначеності. Отже, існують явища, для нас невизначені, явища, більш-менш вірогідні, і ми шукаємо шляхи компенсації браку наших знань, вводячи різні ступені ймовірності цих явищ. А отже, одна з найбільш тонких математичних теорій – наука про можливості та ймовірність – зобов'язана своїм існуванням слабкості людського розуму».

Пуанкаре показав, що довільні незначні невизначеності стану системи з часом можуть посилюватися, роблячи, таким чином, неможливим прогнозування віддаленого майбутнього. За Пуанкаре, «дуже незначна причина, яка вислизає від спостереження, може визначати значний ефект, який не побачити неможливо, і тоді ми говоримо, що ефект є випадковим. Якщо нам точно відомі закони природи і положення в просторі в початковий момент, ми можемо точно передбачити

ситуацію в просторі в наступний момент. Але навіть якщо закони природи не є для нас більше таємницею, початкову ситуацію ми можемо знати лише приблизно. Якщо це знання дозволяє нам прогнозувати ситуацію з тим же ступенем наближення – це все, що нам потрібно, і ми можемо сказати, що явище нами передбачене, що воно укладається в закони. Але це не завжди так. Може статися, що незначні розбіжності в початкових умовах спричинять великі відхилення наприкінці, незначні помилки на старті призведуть до величезних помилок у фіналі. Прогнозування стає неможливим, і от перед нами випадковий процес».

У поглядах на прогнозування ми слідуємо Пуанкаре. Хоча цілком спрогнозувати динаміку системи неможливо, це не означає, що нам нема чого сказати про майбутнє довільної системи в довільний період часу. Наша здатність до прогнозування залежить від того, яке явище ми вивчаємо: наприклад, на основі законів гравітації можна з успіхом передбачати затемнення Сонця чи Місяця на тисячі років наперед. Проте надійні прогнози погоди нині абсолютно неможливі, хоча рух атмосфери підлягає законам фізики в тому ж ступені, що й рух планет. Що ж робить рух одних систем більш передбачуваним, ніж інших?

Як і в питаннях прогнозування погоди, широкий загальний дотримується невисокої думки про економічне прогнозування. Наука про прогнозування погоди та економічне прогнозування намагається передбачити результат розвитку дуже великих систем, компоненти яких дуже складно взаємодіють між собою. Ізолюючи та спрощуючи методи, які відіграють головну роль у розвитку науки, для аналізу таких систем малопридатні. Більше того, оскільки такі великі взаємодіючі системи часто є нестабільними, спрогнозувати їхню поведінку для великих часових періодів практично неможливо.

Для того щоб проілюструвати труднощі, які виникають при прогнозуванні структурних змін в економіці, розглянемо цікаве питання, знову порушене недавно Домінгосом, Фейром і Шапіро (1988): чи можна було заздалегідь передбачити Велику депресію? Вони показали, що ні сучасні аналітики, ні новітній апарат аналізу часових рядів не здатні дати прогноз обвального падіння виробництва, викликаного Великим крахом. Їхній висновок ґрунтується і на аналізі прогнозів Гарварда і Йеля, і на застосуванні сучасних методів часових рядів, використаних на даних Гарварда та Йеля і на новітніх історичних даних.

У 1920 р. у Сполучених Штатах служби прогнозування в Гарварді та Йелі були, мабуть, двома найбільш компетентними службами економічного прогнозування, яких мали у своєму розпорядженні бізнес і держава. У 20-х рр. ХХ ст. Економічна служба Гарварда (ЕСГ) видавала щомісячні огляди поточного і передбачуваного стану економіки.

Для прогнозування ЕСГ використовувала три індекси, що представлені теоретичним прогнозом (крива *A*), бізнесом (крива *B*) і грошима (крива *C*). Отже, прогнози Гарварда були засновані на співвідношеннях, визначуваних із цих трьох кривих протягом кожної конкретної фази ділового циклу, на амплітуді циклу від піку до западини на кожній кривій. Підсумкові індекси показано на рис. 3.40 і 3.41 для періодів 1903–1914 рр. і 1919–1931 рр. відповідно. Всі ці три індекси виявляли швидше запізнювання, ніж передбачення подій (економічного краху зокрема).

Як пояснили Домінгос, Фейр і Шапіро (1988), служби Гарварда і Йеля не тільки не передбачали падіння виробництва до Краху, але навіть не давали якихось песимістичних прогнозів для економіки відразу після Краху. Для вивчення питання про передбачуваність Депресії названі автори оцінювали набір векторних авторегресійних моделей, використовуючи дані служби Гарварда, дані Фішера та історичні архівні дані. Результати оцінки показали, що великі спади доходів на початковій стадії Депресії ніяк не були передбачені ні за місяць до Краху, ні тоді, коли звістка про Крах стала фактом. Депресія виявилася недоступною для прогнозування з використанням методів часових рядів. Отже, можна виправдати і служби Гарварда та Йеля, і фахівців з економетрики, озброєних сучасними методами часових рядів і сучасними даними, за їхні оптимістичні економічні прогнози як напередодні Краху, так і через місяць після його початку. Оскільки основні пояснення Депресії були засновані на припущеннях структурної стійкості та лінійності, виявилось неможливим з'ясувати причину таких структурних змін. Синергетична ж економіка дозволяє побудувати плідну теорію для пояснення причин, що викликали Депресію.

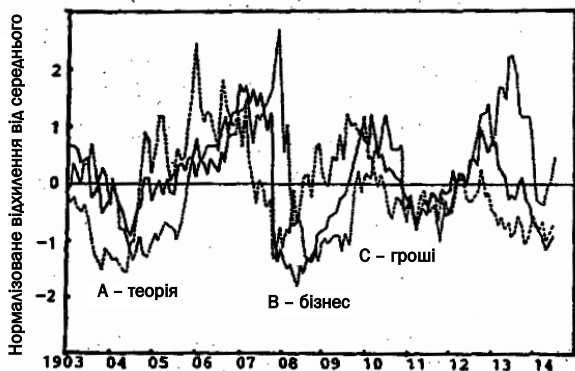


Рис. 3.40. Індекси ЕСГ, 1903–1904 рр.

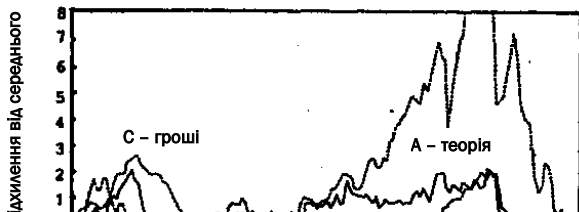


Рис 3.41. Індеси ЕСГ, 1919–1931 рр.

7.1.2.7. Деякі критерії класифікації атракторів

Ми називаємо хаосом нерегулярний рух, що отримується з детермінованих рівнянь. Трудність полягає в тому, як вимірювати цей нерегулярний рух.

У детермінованих системах можна виявити різну поведінку: наприклад, рух до стійкого фокуса, до граничних циклів і регулярні флуктуації типу субгармонійних біфуркацій. Оскільки ці регулярні рухи теж дуже складні, бажано мати критерії для відмінності регулярного і хаотичного рухів.

Показники Ляпунова диференціальних рівнянь. Розглянемо спочатку таке нелінійне диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (3.91)$$

де F – нелінійна вектор-функція від x .

Нехай $x_0(t)$ – розв’язок (3.91). Вводячи $x(t) = x_0(t) + X(t)$, отримаємо лінійаризовані рівняння:

$$\frac{dX(t)}{dt} = L(x_0(t))X(t), \quad (3.92)$$

де $L(x_0(t)) = (\partial F_i(x_0(t)) / \partial x_j)_{n \times n}$.

Показники Ляпунова визначаються як

$$z = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \left(\frac{1}{t} \ln |X(t)| \right). \quad (3.93)$$

Можна показати, що залежно від різних початкових значень $X(t)$ при $t = t_0$ можуть існувати різні показники Ляпунова, але не більше за n варіантів. Можна, наприклад, довести таку теорему (Хакен, 1983).

Теорема. Якщо при $t \rightarrow \infty$ траєкторія $x(t)$ автономної системи залишається в обмеженій області та не містить нерухомої точки, то щонайменше один показник Ляпунова обертається в нуль.

Слід зауважити, що показники Ляпунова є окремим випадком «узагальнених характеристичних показників». Відомо, що якщо всі узагальнені характеристичні показники від'ємні, то система є стійкою.

Показники Ляпунова можна використовувати для характеристик різних типів атракторів. Наприклад, у випадку розмірності 1 є тільки стійкі нерухомі точки, для яких показники Ляпунова z від'ємні. У випадку розмірності 2 можливі тільки два класи атракторів: *стійкі нерухомі точки* і *граничні цикли*. Для стійкої нерухомої точки два показники Ляпунова (які можуть збігатися) від'ємні. Для граничного циклу $(z_1, z_2) = (-, 0)$. У випадку розмірності 3 маємо такі типові класи:

$(z_1, z_2, z_3) = (-, -, -)$ – для стійкої нерухомої точки;

$(z_1, z_2, z_3) = (0, -, -)$ – для стійкого граничного циклу;

$(z_1, z_2, z_3) = (-, 0, 0)$ – для стійкого тора;

$(z_1, z_2, z_3) = (+, 0, -)$ – для дивного атрактора.

На рис. 3.42 показано зв'язок між розмірністю простого атрактора, поміщеного в тривимірний фазовий простір, і знаками його показників Ляпунова.

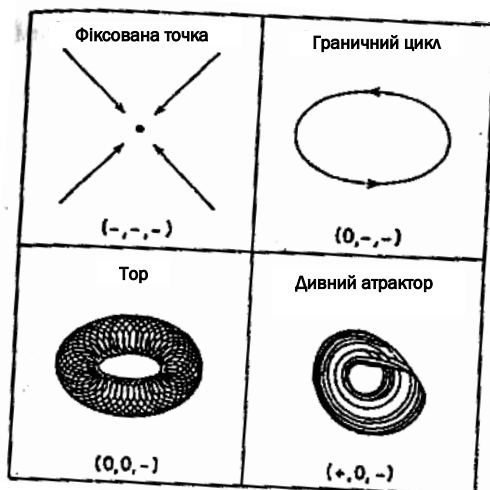


Рис. 3.42. Зв'язок між показниками Ляпунова і атракторами

Хаос може виникнути, якщо один із показників Ляпунова невід'ємний. Оскільки для хаотичного атрактора щонайменше один показник Ляпунова є невід'ємним, то сусідні траєкторії дуже швидко розбігаються. Наприклад, $(z_1, z_2, z_3) = (+, 0, 0)$ може означати, що ми маємо справу з нестійким тором. Якщо атрактор має показники $(z_1, z_2, z_3) = (-, -, -)$, то його можна вважати хаотичним. Слід, однак, наголосити, що ми поки що дуже мало знаємо про зв'язок властивостей атракторів з показниками Ляпунова і про те, як обчислити ці показники.

Показники Ляпунова для дискретних відображень.

Розглянемо таке дискретне відображення:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (3.94)$$

де x_n , $n = 1, 2, \dots$ – вектори в M -вимірному просторі. Вивчимо спосіб обчислення показників Ляпунова для (3.94).

У випадку дискретного відображення траєкторія складається з послідовності точок x_n , $n = 0, 1, \dots$. Позначимо через x_n^0 траєкторію, окіл якої ми збираємося досліджувати. Нехай

$$x_n = x_n^0 + X_n, \quad (3.95)$$

де x_n та x_n^0 задовольняють співвідношенням (3.95), а X_n – малі збурення. Підставляючи (3.95) у (3.94), отримаємо лінеаризовану систему:

$$X_{n+1} = L(x_n^0) X_n, \quad (3.96)$$

де $L(x_n^0) = [\partial f_k(x) / \partial x_j]$ при $x = x_n^0$. Це рівняння можна розв'язувати методом ітерацій:

$$X_n = L(x_{n-1}^0) L(x_{n-2}^0) \dots L(x_0^0) X_0.$$

Показники Ляпунова визначаються як

$$z = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |X_n|. \quad (3.97)$$

Залежно від напрямку X_0 ми можемо отримати різні значення z . Для одновимірного відображення маємо

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \ln |f'(x_m^0)|. \quad (3.98)$$

Розглянемо, наприклад, логістичне відображення:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n). \quad (3.99)$$

Показники Ляпунова як функції змінної a представлено на рис. 3.43. Невід'ємні значення показників відповідають хаотичному руху, а від'ємні – наявності регулярності (періодичності) (див. Хакен, 1983).

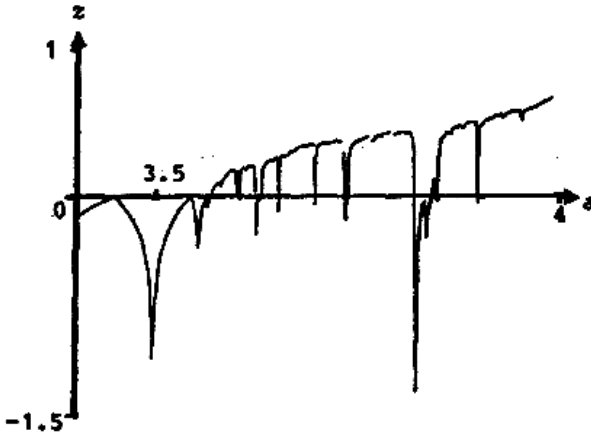


Рис. 3.43. Показники Ляпунова для логістичного відображення

Сигнал, спектр потужності, функція автокореляції та відображення Пуанкаре. Згадаємо тепер деякі можливі критерії хаотичності руху. Для того щоб визначити відмінність між багаточастотним періодичним рухом (який теж може виглядати досить складним) і хаосом, часто буває зручно скористатися перетворенням Фур'є змінної $x(t)$:

$$x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t) \exp(i\omega t) dt.$$

Для багатоперіодичного руху спектр потужності $P(\omega) = |x(\omega)|^2$ складається тільки з дискретних ліній відповідних частот, тоді як

хаотичний рух (який, очевидно, аперіодичний) має широкий шумовий спектр $P(\omega)$, локалізований переважно в області низьких частот.

Для визначення хаосу ми можемо також скористатися варіацією автокореляційної функції:

$$C(v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T c(t)c(t+v)dt, \text{ де } c(t) = x(t) - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt.$$

Ця функція залишається постійною або осцилює, у випадку регулярного руху, і швидко спадає, якщо $x(t)$ стає некорельованою в хаотичному режимі. Слід сказати, що $P(\omega)$ і $C(v)$ містять одну і ту ж інформацію.

Ідею відображення Пуанкаре можна представити таким чином. Ми можемо розглянути множину траєкторій у n -вимірному просторі та досліджувати точки, в яких траєкторії перетинають якусь гіперповерхню. У просторі трьох вимірювань це можна представити, як показано на рис. 3.44(a). На рис. 3.44(b) точки перетину з'єднані гладкою кривою. В цьому випадку відображення Пуанкаре зводиться до поперечного перетину на двовимірній площині, хоча самі траєкторії належать тривимірному простору.

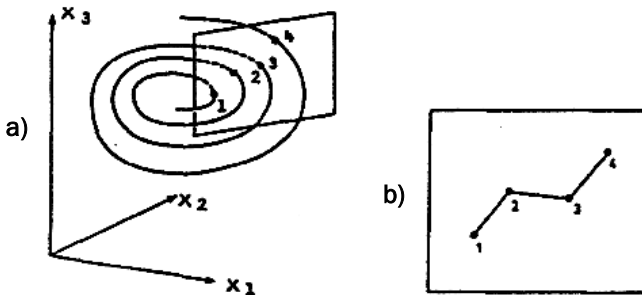


Рис. 3.44. Відображення Пуанкаре

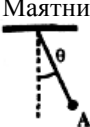
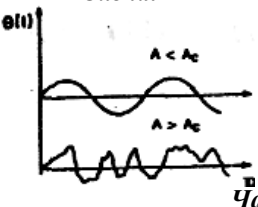
Для хаосу характерні чотири наступні критерії:

- 1) часова залежність сигналу «виглядає хаотичною»;
- 2) спектром потужності є широкосмуговий шум;
- 3) функція автокореляції швидко розпадається;
- 4) відображення Пуанкаре заповнює рівномірно певну область простору.


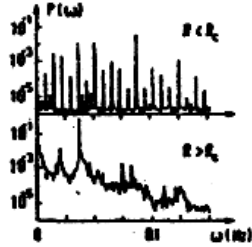
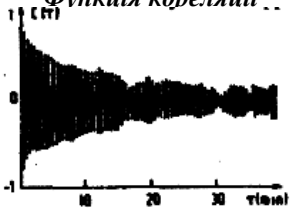
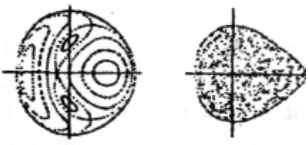
У табл. 3.1 показано, як виглядають усі ці числові критерії для хаосу.

Таблиця 3.1

Типи хаосу в простій системі

Система	Рівняння руху	Критерій
<div>Маятник</div> 	$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + g \sin \theta = A \cos \omega t$ $x = \theta, y = \dot{\theta}, z = \omega t$ $\dot{x} = y$ $\dot{y} = -\gamma y - g \sin x + A \cos z$ $\dot{z} = \omega$	<div>Сигнал</div> 

Продовж. табл. 3.1

Система	Рівняння руху	Критерій
<div>Осередок Бенара</div> 	$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$ $\dot{y} = rx - y - xz$ $\dot{z} = xy - bz$	<div>Спектр потужності</div> 
<div>Реакція Білоусова–Жаботинського</div> $Ce_2(SO_4)_3$ Ce^{4+}	$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \lambda)$ $\vec{x} = [c_1, c_2, ..., c_d]$	<div>Функція кореляції</div> 
<div>Система Хенона–Хейлеса</div>	$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (p_i^2 + q_i^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3$ $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$	<div>Відображення Пуанкаре</div> 

7.1.3. Дивні атрактори

Найважливішою властивістю детермінованих систем з хаотичною поведінкою є *чутливість до початкових даних*. Початкові відхилення з часом зростають, малі причини призводять до великих наслідків. Це явище іноді називають *ефектом метелика*, пояснюючи назву так: помах крил метелика в нестійкій системі може з часом викликати бурю, змінити погоду у величезному регіоні.

А ось яке міркування, присвячене передбачуваності, наводиться у Фейнмановських лекціях з фізики: «Зазвичай вважають, що недетермінованість, неможливість прогнозувати майбутнє – це особливість квантової механіки, і саме з нею пов'язують уявлення про свободу волі і так далі. Але якби навіть наш світ був класичним, тобто якби закони механіки були класичними, все одно з цього не випливає, що таке ж або якісь аналогічні уявлення не виникли б. Так, звичайно, з точки зору класики, визначивши місце розташування і швидкість усіх часток у світі (або в ємкості з газом), можна точно передбачити, що буде далі. У цьому сенсі класичний світ детермінований. Але уявіть тепер, що наша точність обмежена і що ми не знаємо точно положення лише одного з атомів; знаємо, скажімо, його з помилкою в одну мільярдну. Тоді, якщо він зіткнеться з іншим атомом, невизначеність знання про його координати після зіткнення зросте. А наступне зіткнення зробить помилку ще більшою. Отже, якщо спочатку помилка і була ледве помітною, то все одно невдовзі вона зросте до величезної невизначеності.

Зрозуміло, що ми не можемо по-справжньому прогнозувати положення крапель, якщо ми не знаємо руху води абсолютно точно.

Правильніше буде сказати, що для абсолютної точності (скільки завгодно великої, але скінченної) можна завжди вказати такий великий період часу, для якого стає неможливим зробити прогнозувати. І цей період (у цьому вся суть) не такий уже й великий ... Час зі зменшенням помилки зростає лише логарифмічно, і виявляється, що за дуже й дуже малий час уся наша інформація втрачається».

Американське видання Фейнмановських лекцій вийшло в 1963 р. Того ж року в «*Journal of the Atmospheric Sciences*» з'явилася стаття американського метеоролога Едварда Лоренца, що започаткувала новий напрям у природознавстві – дослідження хаосу в детермінованих системах.

Проте можна лише дивуватися науковою сміливістю Е. Лоренца, який вибрав просту модель – систему всього лише трьох звичайних диференціальних рівнянь, обчислив її на комп'ютері й зумів зрозуміти, що він має справу не з помилками обчислень, а з відкриттям.

Математичний образ детермінованих неперіодичних процесів, для

яких неможливий довгостроковий прогноз, назвали *дивними атракторами*. Ці атрактори (від англ. *to attract* – притягувати) справді дивні та дуже гарні.

На рис. 3.45 показано «портрет» такого атрактора, що описує коливання в якійсь хімічній реакції, яку моделювали на комп'ютері. Атрактор на рис. 3.46 отриманий при обробці експерименту з вивчення знаменитої коливальної хімічної реакції Білоусова–Жаботинського.

На рис. 3.45 точка, що визначає стан об'єкта, належить тривимірному простору (математики кажуть, що фазовий простір цієї динамічної системи є тривимірним). Представлено проєкції атрактора на дві різні площини.

Суть динамічного хаосу легко зрозуміти за рис. 3.45(б). Точка, що визначає стан системи (наприклад, концентрації хімічних реакцій), рухається цим атрактором, як санчата «американськими гірками». Ці «санчата» повертатимуть і рухатимуться то лівою, то правою «стрічкою». Припустимо, що ми запустили поруч двоє «санчат» (наприклад, одні – ідеальна модель системи, другі – сама система). Спочатку, коли вони рухаються близько одні до других, за розташуванням одних «санчат» можна сказати, де знаходяться другі (саме тут і можливий прогноз). Але в якийсь момент часу (горизонт прогнозу), одні «санчата» повертають ліворуч, а другі – праворуч. Навіть точно знаючи, де одні «санчата», ми втрачаємо можливість щось сказати про другі.

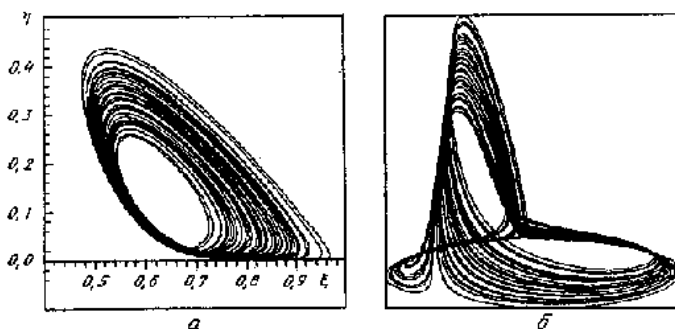


Рис. 3.45. Дивний атрактор, який відповідає усталеному режиму в моделі, що описує коливальну хімічну реакцію

На рис. 3.46 показано, що коливальна хімічна реакція Білоусова–Жаботинського за певних умов теж може відбуватися в хаотичному режимі.

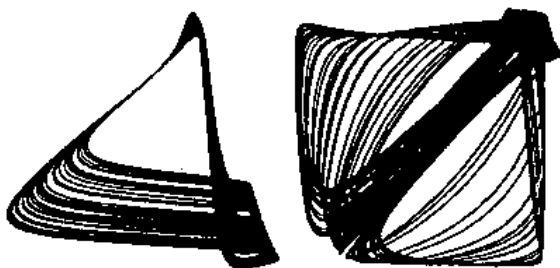


Рис. 3.46. Проекція атрактора, отримана при експериментальному дослідженні реакції Білоусова–Жаботинського

Хаотичність у моделі, показаній на рис. 3.47, призводить до «збоїв» у прогнозуванні сонячної активності: протягом десятків років Сонце залишається спокійним, і така його поведінка узгоджується з результатами спостережень.

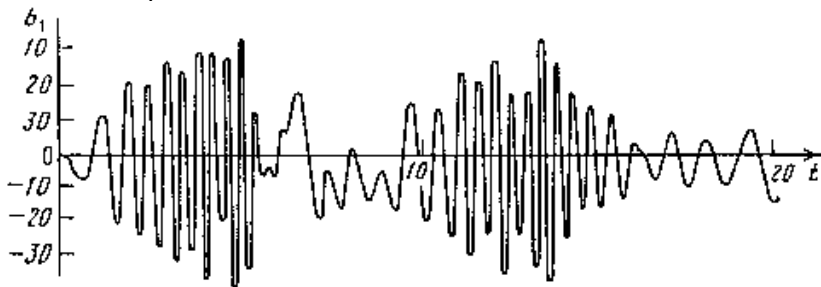


Рис. 3.47. Зміна однієї з величин, які характеризують магнітне поле в моделі, що описує сонячну активність

Рисунки 3.45–3.47 засвідчують, що дивні атрактори досить упорядковані. Те ж стосується детермінованого хаосу взагалі. Пошуками цього порядку багато фахівців з нелінійної науки, або, як їх часто називають, «нелінійників», займаються останні двадцять років. Ці пошуки виявилися захоплюючим заняттям. Наприклад, виявилось, що в природі існує лише декілька універсальних сценаріїв переходу від порядку до хаосу. А отже, можна вивчати дуже різні явища, писати різні рівняння й отримувати однакові сценарії. Це вражає. Дослідники намагаються побачити за цим новий, глибший рівень єдності природи. З'ясувалося, що безліч систем нашого організму працюють у хаотичному або близькому до нього режимі. Причому часто хаос виступає як ознака здоров'я, а надмірна впорядкованість – як симптом

хвороби. Це спричинило появу нових методів аналізу кардіограм і енцефалограм, міограм, нового виду діагностики технічних систем.

Хаос «подарував» нові способи захисту інформації, дозволяючи закривати «радіоковдрою» свої плани, наміри, розпорядження. Він дав нові способи записування інформації та її стискання. Космічні знімки, дані сейсмостанцій, томограми схожі на неприборканого джина, випущеного з пляшки. Інформацію треба зберігати в найбільш компактному вигляді, причому так, щоб до неї зручно було повертатися. Адже щось доводиться згадувати часто, щось – інколи, а щось – у виняткових випадках.

Порядок є невіддільним від хаосу. А хаос інколи виступає як надскладна впорядкованість.

Хаос дав нові теми художникам. На рис. 3.48 представлено один з образів, створених обчислювальною машиною під управлінням дизайнера. Фахівці з комп'ютерної графіки все частіше використовують хаотичні алгоритми, щоб, приміром, гори на картинках були «як справжні».

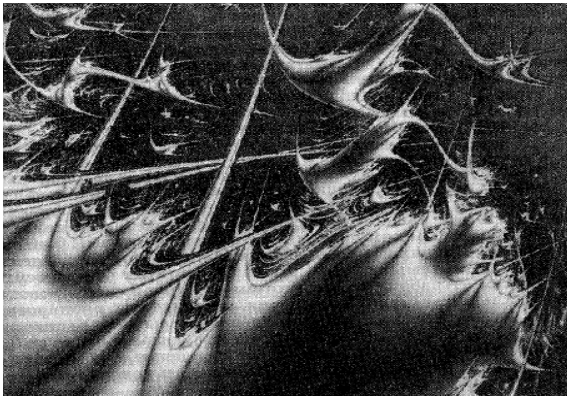


Рис. 3.48. Одна з химерних картин світу нелінійної динаміки

На рис. 3.48 показано, як змінюються у фазовому просторі величини, що визначають «дивацтво» дивних атракторів, – ляпуновські показники.

Чому вченим взагалі вдається щось описати і зрозуміти? Чому прості моделі та теорії працюють у нашому надзвичайно складному світі? Одна з відповідей, запропонованих нелінійною наукою, така: вся річ у тому, що відбувається самоорганізація. Складні системи мають дуже багато ступенів вільності. Проте все влаштовано так, що в процесі еволюції виділяється декілька головних, до яких підлаштовуються всі інші. Ці головні ступені вільності називають *параметрами*

порядку. Коли параметрів небагато, є шанс описати складну систему просто. Нижче наведено два приклади самоорганізації, які показують, що це явище може бути дуже корисним або, навпаки, шкідливим.

Людський організм має гігантське число ступенів вільності. Проте щоб піднести ложку до рота, нам не треба думати про всі або управ­ляти ними. При виробленні навичок потрібні в цей момент (друго-рядні) ступені підлаштовуються до головних ступенів, за якими й тре-ба стежити. Виникає ієрархічна структура управління і взаємозв'язків, які фізіологи називають синергіями (у перекладі з грецького це оз-начає «спільна дія»).

Інший приклад самоорганізації – це виникнення ієрархії в зграї вовків або в колонії, на вершині якої знаходяться «пахани», визна-чаючи поведінку «шісток» та інших членів ієрархії.

Найпростіші приклади самоорганізації, в яких удалося розібратися краще, ніж в останніх, дають деякі системи з фізики, хімії, біології. Події в них розвиваються не лише в часі, а й у просторі. Всіх їх об'єд-нує одна риса. Уявіть дифузію, породжену випадковим блуканням безлічі часток, або надзвичайно складні траєкторії часток рідини, або величезну кількість хімічних реагентів, що химерно перетворюються один в одного, або безліч людей, які користуються міським транс-портом. Здавалося б, тут усе абсолютно випадково, або, як кажуть фізики, має місце хаос на мікрорівні. І в усіх цих випадках середні величини поводяться цілком детерміновано. Хаос на мікрорівні може призводити до впорядкованості на макрорівні. Але якою дивною буває ця впорядкованість! Реакція в пробірці може стати коливальною – і розчин у пробірці може, приміром, почати періодично змінювати свій колір. Транспортні потоки розподіляться за цілком конкретними, стро-гими законами. А якщо дифузія відбувається в якомусь середовищі, що горить, то можуть виникнути химерні структури. Наприклад, такі, які показано на рис. 3.49. На ньому представлено просторову форму хвиль горіння зростаючої амплітуди, що сходяться до центру симетрії та зберігають свою конфігурацію. Вивчення цих і деяких інших струк-тур є непростою справою. Вона вимагає розробки нових математич-них методів і широкого використання комп'ютерів, але іноді виявля-ється дуже корисною.

Маючи справу з процесами, які розгортаються в часі та просторі, ми стикаємося з новим елементом реальності – формою виникаючих структур. Роздуми над досконалістю форми, пропорційністю гармонії були одними з ключових мотивів у пізнанні природи.

Ідея про зв'язок геометрії з ідеальними об'єктами, які становлять основу Всесвіту, належить ще Платонові. Ця ідея була відроджена В. Гейзенбергом, який визначав контури майбутньої єдиної теорії

поля та елементарних часток. Саме у відмінностях форми електронних хмар у дивному світі, вигаданому Е. Шредінгером та іншими творцями квантової механіки, криється розгадка багатьох парадоксів атомної фізики. У тому незвичайному всесвіті, де існують структури, показані на рис. 3.49, форма також відіграє ключову роль. Вона показує, за якими законами прості структури можуть бути об'єднані в складні. Форма визначає існування структури. Чудовий факт, що для створення складної структури, яка розвивається в часі, треба правильно вгадати її форму. Кількість затраченої енергії не відіграє тут жодної ролі.

Безліч химерних конфігурацій спочатку породжувала у дослідників ілюзію того, що в цьому всесвіті можна створити структури будь-якої складності. І одним з ключових результатів аналізу став доказ того, що в цьому середовищі можуть бути побудовані лише ці структури – і жодні інші. Існують правила заборони. Спроби щось «нав'язати» цій системі або діяти методом проб і помилок приречені на невдачу.

Тут багато аналогій: з економічними, соціальними, екологічними системами, де спроби їх «перебудувати» або «створити заново» надзвичайно рідко дають позитивні результати. Доречно згадати й аналогії з сучасною медициною, що звернулася до надслабких, «резонансних» впливів на організм, які іноді виявляються ефективнішими за сильнодіючі препарати. Інший приклад – філософія Стародавнього Сходу, де на чільне місце ставилося виявлення внутрішніх потенцій цілого і дотримання їх.

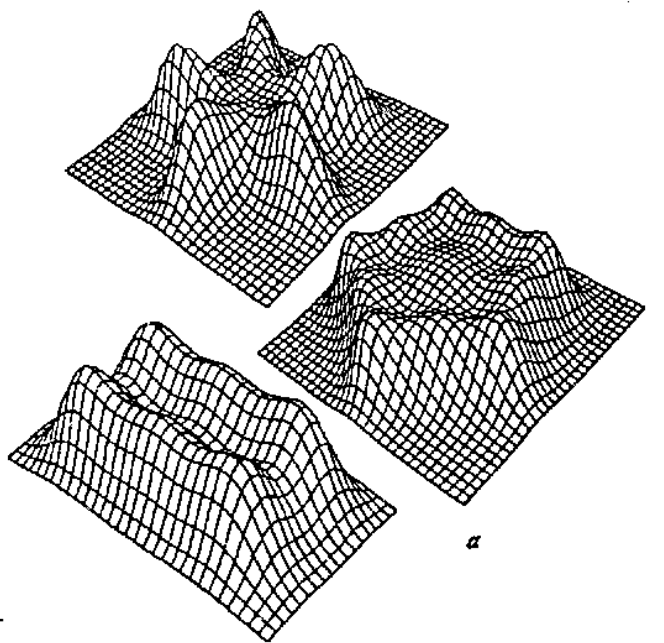


Рис. 3.49. Форми структур, можливі в певному середовищі, де є лише процеси горіння і теплопровідності

Наш світ дуже складний. У ньому діють багато законів збереження, а події розгортаються в гігантському інтервалі просторових і часових масштабів. У ньому дивовижним чином поєднуються випадковість і закономірність. І щоб розібратися в нашому світі, дуже корисно будувати інші світи. Химерні, незвичайні, парадоксальні.

На рис. 3.49(а) показано, як вони виглядають у просторі (x, y, t) . На рис. 3.49(б) представлено аналог географічної карти, що показує всі структури, які можуть виникати в такому середовищі. Жирні точки і суцільні лінії відповідають максимумам, кружальця і пунктир – мінімумам. Хрестиком позначено точку, до якої в процесі еволюції сходиться хвиля горіння. Тонка лінія – контур структури на рівні половини висоти.

Отже, ще один світ. Його вигадав у 1970 р. англійський математик Джон Конвей і назвав грою «Життя». Назва пов'язана з тим, що вона імітує зростання, розпад і різні зміни в популяції живих організмів. У цю гру читач може пограти, нічого не знаючи жодних рівняння, не користуючись комп'ютером, а маючи під рукою лише аркуш паперу в клітинку. Хоча на комп'ютері все виглядає, звичайно, гарніше.

У ній розглядаються безконечні плоскі ґрати квадратних комірок – клітин. Час у цій грі є дискретним $(t = 1, 2, \dots)$. Клітина може бути живою або мертвою. Зміна її стану в момент $(t + 1)$ визначається станом її сусідів у момент t (сусідів у кожній клітині 8, з них 4 мають з нею спільні ребра (стінки), а 4 – лише вершини).

Правила такі.

1. Якщо клітина мертва у момент часу t , вона оживає в момент

($t + 1$) лише за умови, якщо троє з її восьми сусідів були живі в момент t .

2. Якщо клітина була жива у момент часу t , вона гине в момент ($t + 1$) лише за умови, якщо менше ніж дві, або більше ніж три сусідні клітини були живі в момент t .

Очевидно, що еволюція в цій грі з примітивними правилами, з локальними зв'язками, які включають лише найближчих сусідів, може бути досить складною. Але цього мало. Математики довели, що ця еволюція може бути як завгодно складною. Така гра еквівалентна універсальній обчислювальній машині. У принципі, маючи чималу об'ємність із таких клітин, з допомогою цієї гри можна здійснювати обчислення, як на комп'ютері.

Головною тенденцією в електроніці стала мініатюризація. Можливо, в майбутньому елементи комп'ютерів стануть порівнянні з розмірами молекул, і зв'язки в них будуть можливі лише найпростіші, найбільш локальні. (Втім, тоді б довелося згадати про радіаційні пошкодження, які могли б виводити їх з ладу. Адже на відміну від живих організмів, електронні схеми не вміють коректувати, «лікувати» тонкі пошкодження на мікрорівні. Поки що не уміють). Можливо, тоді такі ігри, як «Життя», стануть корисними і для мікроелектроніки.

Нині вони корисні, наприклад, при створенні нових фізичних теорій. Розглянемо два приклади, пов'язані з грою «Життя».

Робота комп'ютера характерна тим, що ми не можемо передбачити результат дії низки програм, не виконавши їх повністю. Такі алгоритми називають обчислювально незвідними. Будь-яка величина в нашому світі може бути виміряна з скінченною точністю, зі скінченням числом десяткових цифр. Існують закони природи, що визначають програми, алгоритми, за якими проводяться дії з цими числами. Тому американський дослідник С. Уолфрем пропонує поглянути на наш світ як на гігантський комп'ютер. На його думку, ті процеси, в моделюванні яких успіхи є незначними (а це – хаотичні турбулентні течії, вихори в атмосфері, економічні системи, біологічна еволюція), описуються незвідними алгоритмами.

Інший приклад – теорія самоорганізованої критичності, що зобов'язана своєю появою аналізу гри «Життя» та іншим іграм цього типу; нині вона знаходить усе більше прихильників. Її результати використовують сьогодні в космології, гідродинаміці, в геофізиці (для прогнозу землетрусів) і в багатьох інших галузях.

Теорія переходу до хаосу в динамічних системах, схожих на ті, які розглянуто вище, була розроблена М. Фейгенбаумом. Її основна ідея – втрата аттракторами (точкою, граничними циклами) своєї стійкості при зміні параметра R і відповідний каскад подвоєння періоду реалізує-

мого граничного циклу при сильному нелінійному стисненні інтервалів стійкості на кожному етапі. Це призводить до експоненційного зростання числа гармонік граничного циклу на малому інтервалі зміни параметра. Хаос, за Фейгенбаумом, настає при їхньому «нескінченному» числі. Такий механізм генерації хаосу в динамічних системах має назву «субгармонійний каскад».

7.1.4. Динамічний хаос і обмеження області прогнозу

До 60-х років вважалося, що є два класи процесів. Перші описуються динамічними системами, де майбутнє однозначно визначається минулим. Вони, як гадали раніше, цілком передбачувані. Великий Лаплас, маючи на увазі такі системи, говорив (якщо перекласти його слова сучасною мовою), що, маючи в своєму розпорядженні досить потужні комп'ютери, ми зможемо заглянути як завгодно далеко в майбутнє і як завгодно далеко в минуле. До другого класу належать процеси, де майбутнє не залежить від минулого. Ми кидаємо гральну кость і випадає випадкова величина, ніяк не пов'язана з тим, що випало раніше.

У 70-ті роки стало зрозумілим, що існує третій, дуже важливий клас процесів, які формально описуються такими динамічними системами, як маятник, але їхня поведінка може бути передбачена лише на невеликий проміжок часу. А далі дослідники будуть змушені мати справу зі статистикою. Для маятника можна створити просту лінійну модель, яка дозволить нам передбачити, в якому положенні, наприклад, виявляться маленькі кульки через п'ять коливань великої кульки внизу (природний часовий проміжок тут – період коливань великої кульки). Застосовуючи сучасні інформаційні технології, можна передбачити, в якому положенні вони опиняться через 20 коливань нижньої кульки. Проте жодним чином не можна передбачити їхнє положення через 60 проміжків часу.

У 1963 р. американський письменник Р. Бредбері опублікував фантастичний твір, в якому фактично сформулював ідею динамічного хаосу. В цій розповіді один з організаторів передвиборної кампанії після перемоги свого кандидата вирушає в подорож у часі. Фірма, яка організовує таку поїздку, пропонує полювання на динозаврів, які найближчим часом мають вимерти. Щоб не порушити складну тканину причинно-наслідкових зв'язків і не змінити майбутнє, необхідно рухатися лише спеціальними стежками. Проте герой не зміг виконати цієї умови і ненавмисне роздавив золотистого метелика. Повернувшись назад у свій час, він побачив, що змінилися склад атмосфери, правила правопису і... результат передвиборної кампанії. Ледь помітний рух звалив маленькі «кісточки доміно», ті звалили більші «кості», і, на-

решті, обвал гігантських «костей» призвів до катастрофи. Відхилення від вихідної траєкторії, викликані загибеллю метелика, нестримно зростали. Малі причини мали великі наслідки. Математики називають цю властивість *чутливістю до початкових даних*.

У тому ж 1963 р. думка про принципову обмеженість нашої здатності передбачати навіть у світі, який ідеально описується класичною механікою, була висловлена лауреатом Нобелівської премії Р. Фейнманом. Для існування *горизонту прогнозу* не потрібно, щоб «Бог грав у кості», додаючи в рівняння, що описують нашу реальність, якісь випадкові члени. Не потрібно опускати на рівень мікросвіту, на якому квантова механіка дає ймовірнісний опис Всесвіту. Об'єкти, поведінку яких ми не можемо передбачати для великих часових періодів, можуть бути дуже простими, наприклад такими, як наш маятник.

Те, що чутливість до початкових даних веде до хаосу, зрозумів – і теж у 1963 р. – американський метеоролог Е. Лоренц. Він зацікавився питанням: чому стрімке вдосконалення комп'ютерів, математичних моделей і обчислювальних алгоритмів не привело до створення методики отримання достовірних середньострокових (на два-три тижні наперед) прогнозів погоди? Лоренц запропонував просту модель конвекції повітря (вона відіграє важливу роль у динаміці атмосфери).

Комп'ютерний аналіз системи Лоренца дав принциповий результат: динамічний хаос, тобто неперіодичний рух у детермінованих системах, де майбутнє однозначно визначається минулим, має скінченний горизонт прогнозу.

З точки зору математики, будь-яка динамічна система, що б вона не моделювала, описує рух точки у фазовому просторі. Найважливіша характеристика цього простору – його *розмірність*, або, простіше кажучи, число величин, які необхідно задати для визначення стану системи. З математичної та комп'ютерної точок зору не так вже й важливо, які це величини – чисельність рисей і зайців на певній території, змінні, що описують сонячну активність або кардіограму, чи відсоток виборців, які підтримують президента.

Якщо вважати, що точка, рухаючись у фазовому просторі, залишає за собою слід, то динамічному хаосу відповідатиме клубок траєкторій. Тут розмірність фазового простору всього 3 (це простір x, y, z). Для сталих коливань, що відповідають динамічному хаосу, Д. Рюель і Ф. Такенс у 1971 р. запропонували назву – дивний атрактор. Передбачення А. Пуанкаре про те, що в майбутньому можна буде прогнозувати нові фізичні явища виходячи із загальної математичної структури рівнянь, які їх описують, комп'ютерними експериментами було перетворено на реальність.

Система Лоренца має скінченний горизонт прогнозу. Річ у тому,

що якщо ми знову візьмемо дві близькі траєкторії, то вони розходяться. Швидкість розходження визначається так званим *ляпуновським показником*, і від цієї величини залежить інтервал часу, на який може бути дано прогноз. Можна сказати, що для кожної системи є свій горизонт прогнозу.

Свого часу праця Лоренца була опублікована в метеорологічному журналі, але її не помічали десять років. Метеорологи сьогодні вважають, що горизонт прогнозу для погоди не перевищує трьох тижнів. Іншими словами, як би точно ми не вимірювали параметри атмосфери, передбачити погоду через три тижні в конкретному місці за допомогою наявних приладів неможливо. Горизонтом прогнозу для стану океану експерти вважають місяць.

Нині багато фахівців із фізики Сонця вважають, що аналогічна ситуація має місце і з Сонцем. Наприклад, відоме таке явище, як мінімум Маундера, коли впродовж майже 70 років сплесків сонячної активності не було. І виникає питання, чи можемо ми спрогнозувати наступний аналогічний мінімум. Дослідження, які проводяться, показують, що ляпуновські показники і горизонт прогнозу такі, що цього передбачення на декілька десятиліть наперед зробити неможливо.

Проте нелінійна динаміка дозволила побачити не лише принципові труднощі, а й нові чудові можливості. Звернемо увагу на одну з них. Спробуємо визначити, скільки потрібно величин для того, щоб описати поведінку нашого простого маятника. Класична наука стверджує, що величин треба нескінченно багато. Насправді ж маятник, очевидно, підлягає законам механіки, але для того щоб така іграшка гойдалася і не зупинялася через тертя, має створюватися електромагнітне поле. Формально наш маятник має нескінченно багато ступенів вільності.

Нелінійна динаміка, аналізуючи такі системи, дозволяє встановлювати, скільки змінних необхідно для їхнього опису і скільки – для прогнозування, вона допомагає з'ясувати, яким має бути їхній моніторинг. Виявляється, що для такої системи потрібно не більше десятка змінних. Це відкриває абсолютно нові можливості. Ми маємо формально дуже складну систему і нам треба виділити з неї найголовніше. Якщо раніше, в 60-ті роки, був «модним» системний аналіз, що розглядав певні загальні властивості систем, які виникають у них як у цілому, то нині в Інституті прикладної математики ім. М. В. Келдиша РАН домінує системний синтез. Такий синтез дозволяє з маси змінних добувати саме ті, що потрібні для прийняття рішення.

Після того як стало зрозуміло, що є принципові обмеження в області прогнозування, було створено нові покоління моделей і алгоритмів, прогнозування стало індустрією. Нині ми спостерігаємо стрибок у прогнозуванні, який можна порівняти з тим, що відбулося з настанням епохи ПК. До персональних комп'ютерів ЕОМ були величезними і

дорогими комплексами, доступними лише для дуже крупних фірм. А після появи ПК обчислювальна техніка стала доступною для багатьом. Те ж саме відбувається зараз у галузі прогнозів. Прогнозування перестало бути наукою, воно стає технологією. Якщо раніше «РЕНД корпорейшн і кілька інших колективів забезпечували прогнозами уряд США і низку відомств, то в наші дні навіть не дуже великі фірми мають лабораторії, що займаються прогнозуванням, або, як частіше кажуть, – «проектуванням майбутнього».

Динамічний хаос дозволив у ряді випадків діагностувати серйозні захворювання за даними про електричну активність за допомогою досить простих комп'ютерних програм, запропонувати нові алгоритми стиснення даних і захисту інформації. Економічні прогнози, що спираються на уявлення про хаос і дивні атрактори, стали галуззю діяльності, що бурхливо розвивається. Не можна не пригадати про «нелінійні журнали» – «Physica D», «Chaos», «Nonlinearity», «Physical Review E», «Вісті вузів. Прикладна нелінійна динаміка». Як з'ясувалося, з точки зору прогнозування значно більше об'єднує об'єкти різних наукових дисциплін, ніж розділяє.

РОЗДІЛ III

МОДЕЛІ ТА АНАЛІЗ СКЛАДНИХ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ

ГЛАВА 7. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ХАОСУ І ХАОТИЧНОЇ ДИНАМІКИ. ФРАКТАЛИ

7.1.5. Парадигма складності і теорія самоорганізованої критичності

Звідки береться степенева статистика? Відповідь на це питання дає нова парадигма нелінійної динаміки – *парадигма складності* та побудована в її рамках теорія *самоорганізованої критичності*.

Степеневі залежності характерні для багатьох складних систем: розломів земної кори (відомий закон Ріхтера–Гутенберга), фондових ринків, біосфери на часових періодах, на яких відбувається еволюція. Вони типові для руху автобанами, для трафіка комп'ютерних мереж, для багатьох інших систем. Для всіх їх спільним є виникнення довгих причинно-наслідкових зв'язків. Одна подія може спричинити другу, третю, лавину змін, що охоплюють усю систему. Наприклад, мутація, що з часом змінює вигляд біологічного виду, впливає на екологічну нішу останнього. Зміна екологічної ніші цього виду, звичайно ж, позначається на екологічних нішах інших видів. Їм доводиться пристосовуватися. Закінчення «лавини змін» – перехід до нового стану рівноваги – може настати нескоро.

Проста фізична модель, що демонструє таку поведінку, – це купа піску. Уявімо таку картину. Ми кидаємо піщинку на самісінький верх цієї купи. Вона або там залишиться, або скотиться донизу, викликаючи лавину. У лавині може бути одна або дві піщинки, а може бути дуже багато. Статистика для купи піску виявляється степеневою, як для низки стихійних лих і катастроф. Вона дуже схожа на ту статистику, яку ми маємо, скажімо, для землетрусів, тобто небезпека знаходиться на грані між детермінованою та імовірнісною поведінкою або, як зараз кажуть, *на межі хаосу*.

Дослідження складних систем, які демонструють самоорганізовану критичність, показало, що такі системи самі наближаються до критичного стану, в якому можлива лавина будь-яких масштабів. Оскільки до систем такого виду належать біосфера, суспільство, інфраструктури різного типу, військово-промисловий комплекс, безліч інших ієрар-

хічних систем, то результати теорії самоорганізованої критичності є дуже важливими для аналізу управляючих дій, розробки методів захисту і руйнування.

Дослідження, пов'язані з розробкою парадигми складності, та прогнозування на її основі широко розгортаються в світі. Зокрема в США створено Інститут складності в Санта-Фе. Його керівником став лауреат Нобелівської премії з фізики М. Гелл-Манн, одним зі співробітників – нобелівський лауреат з економіки Б. Артур. Інститут займається різними задачами: від прогнозування стихійних лих і комп'ютерної імітації економічних процесів до розробки сценаріїв дестабілізації політичних режимів та проблем створення штучного життя. Роботи, пов'язані з парадигмою складності, ведуться також в інших країнах. Проте їхній масштаб далекий від необхідного.

Теорія русел і джокерів. Чому нам усе ж вдасться передбачати? Якщо прогнозувати, навіть за допомогою сучасних комп'ютерних технологій, так непросто, то як же ми орієнтуємося в нашому складному і швидкозмінному світі? Як нам вдасться розумно діяти, не дивлячись на свій вельми скромний горизонт прогнозу? Спроби отримати відповідь на ці питання, а також алгоритми прогнозу, здійснюються у створюваній нині теорії русел і джокерів.

Одним з її авторів по праву може вважатися відомий фінансист Дж. Сорос. У своїй «Алхімії фінансів» він запропонував ідею «інформаційної», або «рефлексійної» економіки. Згідно з нею, такі змінні, як «рівень довіри», «очікувані прибутки» і багато інших, що характеризують нашу «віртуальну реальність», відіграють ключову роль у сучасній економіці. Саме вони дозволяють будувати, а потім знищувати величні фінансові піраміди. Але саме ці змінні можуть змінюватися стрибком, що абсолютно не характерно для математичних моделей, побудованих у природничих науках.

Інакше кажучи, у фазовому просторі багатьох об'єктів, з якими ми маємо справу в житті, є місця, які називаються областями джокерів, де випадковість (ігровий елемент або фактор), що не має жодного значення в іншій ситуації, може виявитися вирішальною і не лише вплинути на долю системи, а й стрибком перевести її в іншу точку фазового простору. Правило, за яким здійснюється цей стрибок, і називається *джокером*. Назва прийшла з картярської гри: джокер – це карта, якій можна надати статус будь-якої карти за бажанням гравця. Зрозуміло, що це стрімко збільшує число варіантів і міру невизначеності.

Простий приклад. Припустимо, у нас є невеликий банк. і справи в ньому йдуть усе гірше. Та і як може бути інакше в епоху кризи? Час приймати рішення. Перше, найбільш природне (воно приймається з вірогідністю p_1 , при цьому система стрибком переходить у точку фазового простору a_1) – організувати презентацію в «Хілтоні». Галас,

журналісти, нові клієнти і можливості. Друге – вчинити як чесні люди і оголосити про банкрутство (вірогідність p_2 і, відповідно, точка a_2). І нарешті, можна згадати про родину та близьких друзів – і втекти, прихопивши всю готівку, що залишилася, щоб з іншого берега океану по-вчати місцевих реформаторів (вірогідність p_3 і точка a_3). Отже, в нас знову й знову виникає симбіоз динаміки, зумовленості та випадковості.

Невелика овальна область на рис. 3.50 відповідає області джокера, в якій треба вживати серйозних заходів. Можна перевести сказане на мову медиків. Далеко від області джокера ефект може давати терапія, а в самій області – лише хірургія. Ситуація в цьому випадку може змінитися швидко і радикально.

Але якщо нам не щастить із прогнозами в області джокера, то деє має й таланити. Поміркуємо: що означає «щастить із прогнозом»? Це означає, що поведінка системи з точністю, яка нас влаштовує, визначається лише декількома змінними, а про все інше в першому наближенні можна забути. Крім того, у нас має бути можливість передбачати на досить великий термін. Області фазового простору, де виконуються такі умови, були названі *руслами*.

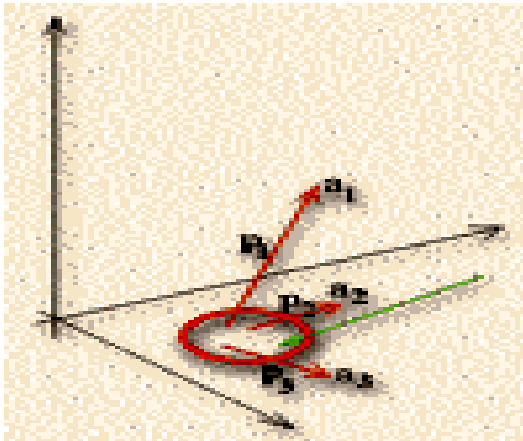


Рис. 3.50. Стан, який виливає із задачі щодо розорення банку

Ймовірно, саме здатність ефективно виділяти русла, вчитися не лише методом проб і помилок (удосконалюючи свою систему передбачень), а й спираючись на здоровий глузд, і дала людству вирішальну перевагу в процесі еволюції. Можна глянути й ширше: різні теорії, підходи, науки виявляються корисними і затребуваними, якщо вони вдало знайшли свої русла. Адже наука – це мистецтво спрощувати, а спрощувати особливо зручно тоді, коли маєш справу з руслами. Зро-

зуміло, «в середньому», «в загальному випадку» ми не можемо заглянути за горизонт прогнозу, але «зокрема», опинившись в області параметрів, відповідних руслу, і усвідомивши це, можна діяти розумно й обачно.

Але тут постає питання: де починається і де закінчується русло? Яка структура нашого незнання? Як від одного інформаційного поля і одних уявлень, адекватних цьому руслу, переходити до інших, коли це русло закінчилося? Знайомлячись з різними економічними, психологічними, біологічними теоріями, важко позбутися відчуття, що їхні творці, самі того не усвідомлюючи, мають справу з різними реальностями, з різними руслами. Це схоже на додатковість у квантовій механіці, коли відповідь на питання, є електрон хвилею чи часткою, залежить від конкретного експерименту. На одній конференції зі штучного інтелекту було дано таке формулювання. Прості задачі – це ті, які легко розв'язати або довести, що вони нерозв'язні, всі інші задачі – складні. Розвиток уявлень про хаос та їхнє застосування в різних галузях засвідчують, що конструювання майбутнього, осмислення нової реальності, суть людини, алгоритмів розвитку і управління виявилися складними задачами.

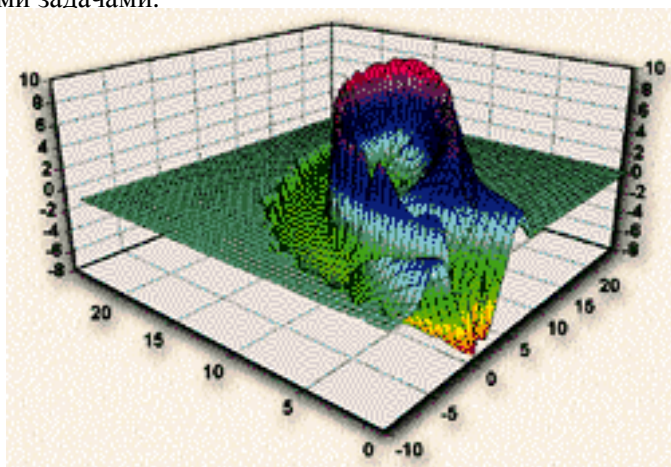


Рис. 3.51. Локальні швидкості розбіжності (збіжності) для атратора Лоренца. Області, вищі за нульовий рівень, відповідають розбіжності, нижчі – збіжності. Видно, що перші займають порівняно малу частину

7.1.6. Застосування теорії хаосу

7.1.6.1. Динамічне моделювання фінансових часових рядів

Найбільш інтригуючим і принадним застосуванням теорії нелінійних систем з хаотичною поведінкою є прогнозування динаміки пород-

жуваних ними часових рядів. Як відомо, більшість систем (природних, таких наприклад, як атмосфера, або штучних, таких як біржа) через їхню складність не можуть бути змодельовані з достатньою точністю. Проте їх можна описати на основі спостереження за ними. Спостережувана величина (сигнал, реалізація) – це функція від часу, за якою судять про процес у досліджуваній системі. Іншими словами, спостережувана величина – це *часовий ряд*. Наприклад, для атмосфери в якості спостережуваної величини може виступати зміна температури, для біржі – щоденний курс цінних паперів і т. ін. Якщо таку спостережувану величину певним чином обробити, за деяких умов можливо з великою точністю здійснити оцінку майбутнього значення часового ряду, знаючи лише попередні значення. Спостережуваними величинами можуть бути курс долара, сейсмосапис або динаміка сонячної активності. При цьому виявляється, що методи теорії вірогідності зазвичай працюють гірше, ніж методи теорії динамічних систем.

За яких умов можливе таке прогнозування? У рамках сучасної теорії розмірності та теорії динамічних систем можна, в принципі, відрізнити шум (випадковий процес) від детермінованої поведінки. Спираючись на деякі додаткові визначення, для спостережуваної величини можна визначити так звану розмірність (ємність). Якщо виявиться, що ємність – величина скінченна, то (за виконання ще низки умов) спостережувана величина описується скінченновимірною системою звичайних диференціальних рівнянь. Якщо далі вдасться (хоча б частково) відновити явний вигляд цих рівнянь, то прогнозування стає можливим. Таким чином, за однією спостережуваною величиною, в принципі, можливо відновити багато властивостей поведінки динамічної системи та отримати уявлення про її аттрактори.

Останнім часом усе більше уваги приділяється дослідженню і прогнозуванню фінансових часових рядів з використанням теорії динамічних систем. Це досить нова галузь, яка є популярним розділом математичних методів економіки, що активно розвиваються.

Фінансовий часовий ряд – це послідовність, що описує поведінку певного ринкового процесу, наприклад, курсу цінних паперів або співвідношення валют. У низці праць було здійснено аналіз деяких фінансових рядів і показано, що багато з них мають скінченну ємність. Отже, ці ряди можуть бути описані звичайним диференціальним рівнянням скінченного порядку. Для прогнозування динаміки часового ряду потрібно відновити праву частину цього рівняння. У деяких працях здійснювалися оцінки довжини часового ряду, необхідної для такого відновлення. Оцінки показують, що в більшості випадків наявних даних недостатньо.

Для вирішення цієї проблеми можна запропонувати кілька підхо-

дів. Зупинимося на одному з них, який застосовує моделі формування цін фінансових активів – моделі, створені в *теорії фінансів*. Такий підхід інколи може дати вигляд шуканих рівнянь. Після цього залишається визначити значення декількох параметрів, які знаходяться з умови оптимального наближення розв'язку рівняння до наявних даних. Така методика інколи дозволяє скоротити кількість необхідних для прогнозування даних на порядки.

Відновлені диференційні рівняння визначаються на основі таких припущень.

1. Усі інвестори є раціональними. При цьому правильні звичайні припущення щодо поведінки раціональних інвесторів, а саме:

- за однакових очікуваних прибутковостях портфеля інвестори надають перевагу портфелю з меншим рівнем ризику; навпаки, за однакових рівнів ризику вони зазвичай вибирають портфель з більшою очікуваною прибутковістю;
- під рівнем ризику розуміється дисперсія прибутковості портфеля. Отже, збільшення ризику може бути виправдане лише збільшенням прибутковості.

2. Інвестори мають різний горизонт інвестування. Іншими словами, деякі інвестори (спекулянти) оцінюють активи з точки зору їхньої короткострокової (кілька днів) прибутковості, а інші (стратегічні інвестори) – орієнтовані на отримання прибутку в довгостроковій перспективі (кілька років). Між цими крайніми випадками також існує безперервний спектр інвесторів. Крім того, необхідно зробити ще декілька (цілком реалістичних) припущень про конкретний вигляд ряду залежностей: як інвестори визначають прибутковість своїх активів, як змінюються з часом фінансові можливості інвесторів і т. д. У сукупності, всі ці припущення дозволяють довести моделювання до замкнутого диференційного рівняння і непогано прогнозувати деякі часові ряди. В якості прикладу розглянемо курс акцій компанії IBM. На рис. 3.52 показано різницю між значеннями цього ряду і обчисленими з побудованої моделі величинами.

Прогнозоване значення ряду відрізняється від реального не більше ніж на 35 відсотків. Слід врахувати, що, по-перше, вибраний часовий ряд є дуже коротким, тобто фактично є дуже обмеженими дані про його динаміку; по-друге, вплив початкових умов досить великий; по-третє, на торги можуть впливати якісь зовнішні умови, не включені в модель.

Отже, за виконання певних передумов можна запропонувати достатньо ефективний механізм опису коротких фінансових часових рядів. Існують й інші підходи до моделювання та прогнозування таких

рядів, які застосовують тонші методи теорії динамічних систем.

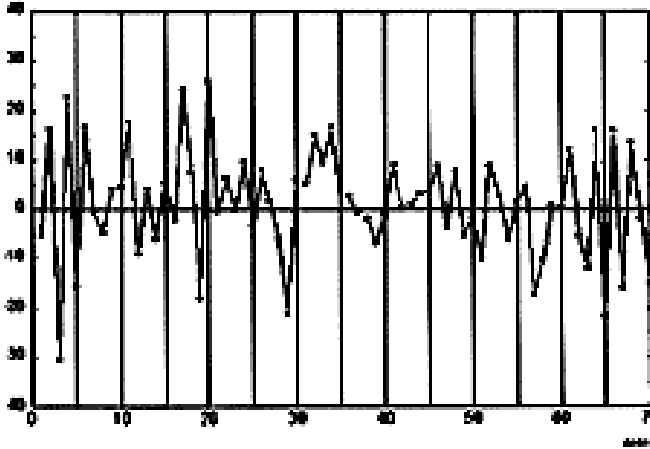


Рис. 3.52. Приклад моделі фінансового часового ряду

7.1.6.2. Придушення хаосу і сердечна аритмія

Знання закономірностей самоорганізації дає можливість управляти динамікою реальних біосистем. Нещодавно відкрито принципово нові методи стабілізації роботи серця при появі аритмій, а також небезпечних для життя фібриляцій.

Сердечний м'яз (як і будь-яка інша *м'язова тканина*) належить до так званих збудливих систем. При подачі імпульсу в таку систему від місця його застосування починає поширюватися збурення – хвиля збудження: імпульс передається від елемента до елемента. Зазвичай після збудження кожен елемент не здатен відразу ж збудитися знову. Як правило, існує певний час релаксації, який називається *періодом рефрактерності*, під час якого елемент ніби відновлюється. Це призводить, з одного боку, до впорядкованого просторового поширення хвилі збудження, а з іншого боку, за частоті подачі імпульсів (або при великому періоді рефрактерності) частина з них виявиться блокованою.

При описі ряду збудливих середовищ часто вдаються до апроксимації вихідної системи сукупністю окремих збудливих елементів, які локально взаємодіють між собою. Кожен такий елемент здатний знаходитися в одному з трьох станів: спокою, збудження і рефрактерності. Зі стану спокою елемент може перейти в збуджений стан, в якому перебуватиме певний час. Потім він переходить до стану рефрактерності, і тільки потім – знов у стан спокою. Отже, перехід у збуджений стан виявляється можливим лише зі стану спокою. Хоча така модель є певним наближенням, вона дуже добре відтворює основні явища в

збудливих середовищах, у тому числі й у тканинах серця.

Припустимо, що є однорідне збудливе середовище, в якому всі елементи мають ідентичні властивості. Тоді частота збудження всіх таких елементів буде однаковою. Якщо якусь область такого середовища почати періодично збурювати, то в ній виникне джерело хвиль збудження, що концентрично розходяться. Таке джерело називають провідним *центром*, або *пейсмейкером*. Якщо в збудливому середовищі є два або декілька пейсмейкерів, то пейсмейкер меншої частоти генерації з часом пригнічується пейсмейкером більшої частоти. Іншими словами, має місце конкуренція між пейсмейкерами. В ідеальному випадку через певний час у всьому середовищі залишиться лише один пейсмейкер. Окрім пейсмейкерів, у збудливих середовищах можуть з'явитися інші джерела збудження – спіральні хвилі, які є спіралями, що «обертаються» (рис. 3.53). Усі спіральні хвилі мають однакову частоту. Тому вони завжди співіснують між собою, але гасять провідний центр, який є повільнішим автохвильовим джерелом. Крім того, спіральні хвилі – це основний тип елементарних самопідтримуючих структур в однорідних збудливих середовищах. Подібно до вихорів у надпровіднику або надплинному гелії, вони надзвичайно стійкі. Поява декількох джерел збудження в серцевому м'язі в наш час пов'язується з небезпечними порушеннями нормальної роботи серця – *аритмією*. При великій кількості аномальних джерел настає фібриляція.

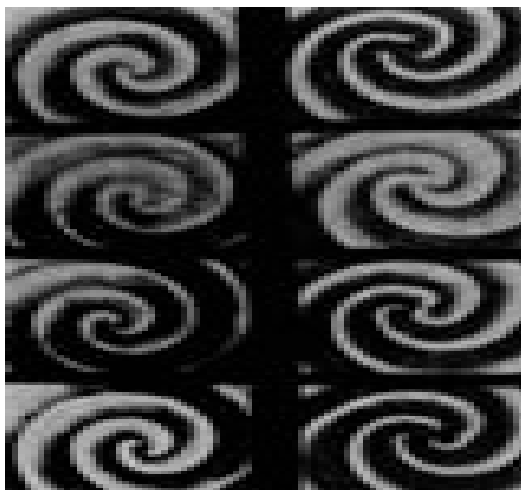


Рис. 3.53. Спіральні хвилі

Причиною деяких порушень нормальної роботи серця може бути взаємодія і конкуренція між нормальним («природним») провідним

центром і аномальним (тобто додатковим) центром, який з тих чи інших причин може виникати в сердечній тканині. Нормальний провідний центр називається *синусним* центром (вузлом), а аномальний – *зміщеним*. Нормальний знаходиться в правому передсерді, а зміщений – у шлуночку. Ці два центри беруть участь у роботі серця, і їхня взаємодія призводить до порушення ритмічних скорочень.

Як показують дослідження, такі аритмії можна ефективно описати відносно нескладними динамічними системами. Методи управління цими системами, про які йшлося вище, дозволяють очікувати, що цілком можливо практично втілити ідею виведення сердечного м'яза з цієї патологією на необхідний режим. Мабуть, необхідно лише підібрати зовнішні збурення невеликої амплітуди і відповідної частоти.

Значно небезпечніше порушення сердечного ритму – фібриляції – обумовлене появою, внаслідок різних причин, безлічі невеликих хвиль у сердечній тканині. Наприклад, можуть виникати спіральні хвилі, що обертаються в протилежних напрямках.

Сучасні методи виведення серця зі стану фібриляції є дуже жорсткими (подача короткого електричного імпульсу дуже високої напруги і сильного струму). Розвиток нелінійної динаміки і синергетики дозволив зрозуміти, що такий силовий вплив зовсім не обов'язковий. Часто цілком достатньо слабких електричних впливів безпосередньо на сердечний м'яз. Якщо в середовищі є спіральні хвилі з протилежними напрямками обертання, то, підбираючи фазу і частоту зовнішнього впливу, можна добитися руху центрів двох хвиль назустріч один одному та їхньої анігіляції. Недавно ця задача була математично досліджена достатньо повно. Тепер слово за ретельними експериментальними дослідженнями.

7.1.6.3. Хаос і впорядкованість сучасних економічних форм

В економічній науці загальновизнаним є уявлення економічної форми у вигляді економічних категорій – особливих форм наукового мислення, які відображають окремі аспекти економічної реальності. Особливі економічні форми – прибуток, капітал, товари, послуги, прибутковість, вартість і т. д. – вимагають точно встановлених меж і / або параметричної системи координат, в яких спостерігається, досліджується рух тієї чи іншої економічної форми. Без цього так званого наочного системного поля зміст будь-якої економічної форми стає невизначеним (беззмістовним). У низці праць обґрунтовано основоположне теоретичне значення (принцип) співвідношень у різноманітних (багатомасштабних відображеннях множин) *економічної форми і структурного релятивізму суми вартостей*.

Отже, об'єктивна інтерпретація форм економічного мислення використовує різноманіття у складі якогось цілого (закону вартості), яке може бути представлене у вигляді загальної економічної форми, «інформативної системи».

Важливо також, що економічна форма у вигляді різноманіття не має властивості фіксованості, визначеності, а отже, у такому вигляді вдається уникнути умовності нескінченності (присутньої в економічних теоріях) у визначенні *найекономічнішого цілого (універсального) в мірі його структурного релятивізму*, тобто як час, як простір або як просторово-часове різноманіття.

7.1.6.4. Двовимірні квантові критичні явища прибутковості

Швидкість обігу агрегату грошової маси формується на фінансових ринках, значною мірою валютною біржею, ємністю (квантами потоку) і, головне, строгою періодичністю торгів. Взаємна однозначність і доповнюваність (компліментарність) цих структурних елементів ліквідного ринку в поєднанні з багатомасштабністю спектральних відображень забезпечує цілісне представлення транзакційної послідовності k фазового інформаційного трека. Цілком зрозуміло, що обернене значення цього коефіцієнта k характеризує міру ліквідності потоків, $\gamma = k^{-1}$, на ринку фінансів і капіталів.

В агрегованій грошовій масі виділятимемо квант потоку λ , що дорівнює за величиною відношенню двох констант: ΔS і D^2 , де D^2 пов'язана з дрейфом у відносному (економічному) часі «повернення» ринку фінансів і капіталів), а S (розщеплення, дублет) – з інформаційним треком встановлення статистичної рівноваги, так званим фрактальним «термалізованим шумом» у системі.

На ринку фінансів і капіталів при оцінці обігу фінансових агрегатів, у значенні прибутковості, застосовується параметрична система (2DES) у координатах: ліквідність / x_x – прибутковість / x_y . У цих координатах розміри ліквідності грошової маси в основному визначаються вертикальними x_y змінами масштабу (міри) грошових потоків у 2DES фінансовій системі, де $\gamma = k^{-1}$.

З теоретичних міркувань комплексності відображень просторово-часова трансдукційна залежність розмірів цих агрегатів дорівнює $\mu = \sqrt{\gamma}$. Зокрема тут отримує природне теоретичне обґрунтування емпіричний множник $\sqrt{5}$.

Отже, для залежності m або ПВ-трансдукційних явищ у часі, наприклад, у фінансовій системі США, одержимо вигляд, який дуже

близький до експоненційного. Інакше кажучи, маємо $\mu = \text{const}(\gamma, M_{xx})$. Знайдене нами значення в багатомасштабному відображенні значення константи $-\text{const} = 0.25 - 250$. Для прикладу, в ЄЕС найгірший показник μ у цьому сенсі – у Великобританії, що викликане особливостями побудови її банківської системи і відносною нерозвиненістю фондового ринку в Західній Європі. Існування унікального «внутрішнього» відносного економічного часу зумовлює «причинність» існування хаотичних циркуляцій множини агрегатів $\{\mu\}$ під впливом періодичної прискорюючої дії прибутковості M_{xx} в економічній системі. Це викликає певну дискретизацію безперервного трансдукційного процесу μ_i . Визначимо це як *релятивістський i-період обігу* в економічній системі.

Головна відмінність хаотичних систем полягає в тому, що в істотно квантовій границі мале збурення початкових умов для динамічної змінної або ж мале збурення самої нелінійної динамічної системи, викликане, наприклад, невдало вибраною періодичною і тривалою дією на ринку цінних паперів (іраціоналізм інвесторів), призводить до непередбачуваних результатів за скінченний час. Як впливає з квазіекспоненційної залежності міри потоку, γ , асимптотично наближається до нуля. Отже, для виділених інтервалів xx , xy маємо:

$$\begin{cases} M_{xy} = 0, & M_{xx} = 23, \\ M_{xx} = 0, & M_{xy} = \infty. \end{cases}$$

Це означає, що для зони операцій на ринку капіталу існує своєрідний горизонт прогнозування – як за часом встановлення «статистичної» рівноваги, так і за вартісними обсягами акцій і зобов'язань, що обертаються на ліквідних сегментах ринків. Отже, може виникати типова картина осциляцій M_{xy} двовимірного розвитку інформаційного трека на рівні фазових траєкторій у динамічному хаосі. Ці осциляції M_{xy} відображають розширення так званих «плато» дискретної структури множини агрегатів μ . Відповідно, розвиток осциляцій за скінченний період часу призводить до зростання невизначеності в системі. Природною границею для цих осциляцій є щільність агрегату грошової маси поблизу одиниці на фінансовому ринку. З економічної точки зору це нульова прибутковість, тобто коли досягається максимум розмитості (невизначеність прибутковості) на фінансовому ринку між банками, фондами взаємного страхування, брокерами, страховими

компаніями, внутрішніми і зовнішніми інвесторами та іншими фінансовими агентами. Часова динаміка цього процесу контролюється і регулюється, наприклад, у США, регулюючим впливом ФРС (FED) на рівень відсоткових і облікових ставок на фінансовому ринку.

Ця своєрідна причинність зумовлює виникнення циркуляцій множини агрегатів μ під періодичним прискорюючим впливом M_{xx} в економічній системі. Дія періодичного прискорення викликає певну дискретизацію – вибірку з безперервного циркуляційного процесу перенесення суми вартостей μ_i . Унаслідок своєрідності хаосу і взаємодій, у двовимірній фінансовій системі виникають локалізовані стани і спостерігаються фазові переходи зі стану локалізації в стан делокалізації. Двовимірні критичні явища просторово-часових переходів у системі відбуваються при $M_{xy} \rightarrow 0$ і $M_{xx} \rightarrow 1$. У змістовному сенсі це перенесення кванта вартості в процесі її безперервного самовимірювання і самозростання на ринку фінансів / капіталів. Для того, щоб співвіднести ці міркування з емпіричними даними, можна використовувати прості міркування, пов'язані з відображенням цієї залежності у вигляді сходинок (скейлінг). Тоді східчаста залежність зводиться до того, що перехідні області між «плато» підкоряються універсальній ступеневої залежності від щільності грошових агрегатів, циркулюючих у системі. У нашому випадку застосування понять математичної морфології та параметричної (числової) характеристики просторово-часових (ПЧ) темпоральних зв'язків у складних хаотичних системах – це природна узагальнююча характеристика $(M_{xy})^{-k}$ з універсальною постійною k в якості показник ступеня (e^{-1}).

Зі зменшенням M_{xy} діапазон ентропійних полів, при яких існують делокалізовані стани, стає вужчим. Однаковою мірою це стосується і розмірів «плато», яке існує в областях локалізації фазового інформаційного трека. Ця чудова можливість демонстрації двовимірних квантових критичних явищ перенесення вартості в параметричній системі відображена на рис. 3.54.

Великі зміни безперервного параметра (безперервний випадок) у такій системі можуть призводити до скейлінгу (східчастий розрив / сингулярність). Цей релятивізм у поєднанні з фрактальними розподілами природним чином пояснює причину жовтневих подій 1929, 1978, 1987 років на фондових ринках США. Недостатність ліквідності або глобальне обмеження (сингулярність) M_{xx} стала причиною «раптового розриву». Інакше кажучи, безперервне різноманіття ціноутворення на цих ринках може здійснювати перехід до дискретного різно-

маніття цін, що й фіксується спектральним відображенням (дельта-функція дублетів). Отже, ціноутворенню на ринках фінансів і капіталів властивий не тільки *фрактальний розподіл усередині дублета*, а й *своєрідний релятивізм у періодах*.

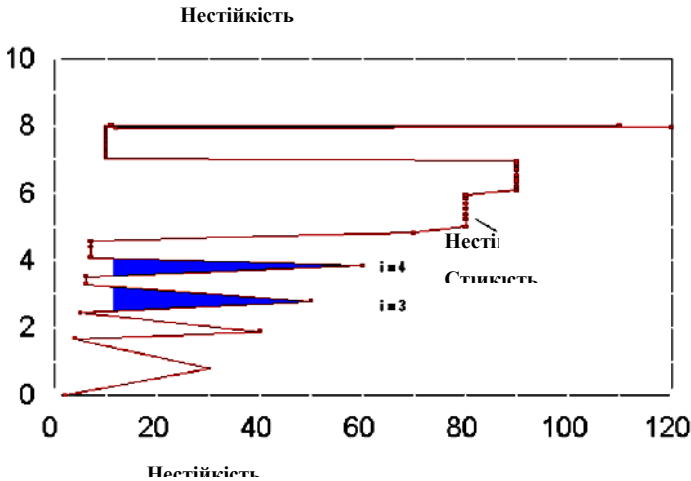


Рис. 3.54. Двовимірні квантові критичні явища перенесення у параметричній системі

7.1.6.5. Метризований фазовий топологічний простір ціноутворення

Еволюціюючи в часі, розширений відтворювальний процес у сучасній економіці набув характерних рис інтернаціоналізації. Історія інтеграційних процесів пов'язана з нерівномірністю різних сторін відтворювання. На початкових етапах інтеграційні процеси проявляються в створенні своєрідних міжнародних ринків товарів, послуг, робочої сили, капіталів, оскільки ці сфери на початкових етапах виявляють найбільшу здатність до інтеграції. Подальша інтенсифікація господарських зв'язків сприяє посиленню ролі валютних відносин у здійсненні операцій обігу товарів у сферах зовнішньої торгівлі, формування світових ринків фінансів та капіталів, надання послуг і т. д. На певному етапі інтеграція ринків капіталів, будучи складовою частиною загальної системи економічної інтеграції, стає важливим фактором поступального руху економічної форми.

Теоретичну траєкторію руху сучасних форм (на прикладі елементарної схематизації) економік різного типу представлено на рис. 3.55 у

площині ABC параметрів: цикл – ціни – інвестиції (економічний час) – швидкість обігу в платіжній системі. *Відтворювальний* процес значною мірою визначається прискорюючим впливом прибутковості M_{xx} у системі. Вісь X – це фрактальний розподіл, по лінії bc – нелінійність (ірраціоналізм «ринкових сил»).

Попри інституційні відмінності фінансового ринку ЄЕС від центрів ринку Північної Америки, за коефіцієнтом інтеграції в світове господарство обидва ці центри досягли однакових показників. На рисунку це економічна зона B . Під числом транзакцій в інвестиційному процесі тут розуміється внутрішній економічний час, що відображає темп освоєння технічних новачків / деградацій потужностей у системі. Ці два світові ринки капіталу характеризуються двома різними типами позикового фінансування торгових і промислових корпорацій. Важливою рисою європейського ринку позикового капіталу є «консервативний» тип позикового фінансування. На кредитному ринку позичальники діють через банківських посередників. Наприклад, обсяги облігацій нефінансових корпорацій у країнах континентальної Європи істотно відстають від Великобританії, США та Японії. Так, у 1995 р. корпорації Німеччини емітували на внутрішньому ринку облігацій на суму 0,142 млрд дол., французькі – на 6,4 млрд дол., тоді як англійські – на 20,7 млрд дол., японські – на 77,2 млрд дол., американські – на 154,3 млрд дол. США.

Ця тенденція виразно простежується на рис. 3.55 на лініях ac і ab площин A і B . Лінія ab характерна для американської моделі, в якій концентрується зацікавленість у найбільшому прибутку на авансований капітал, і розмірність тут становить $x \approx 2,7$. Така система концентрує в собі системні ризики, оскільки вона включає всю множину періодів обертання $\{\mu\}$, що фазами рознесені просторово. Дуже активним стимулятором грошового ринку є уряд США, діючий за принципом «максимального зволікання», природного ототожнення принципу з функціонуванням нелінійності «ринкових сил».

На рис. 3.55 на лінії фазового переходу «1» топологічної поверхні знаходиться зона розділу хаосу і взаємодії сучасних ринків фінансів та капіталів.

Корисно порівняти «трансдукційні явища», де ці нечіткі визначення характеризуються конкретними значеннями «7–8 %» і «7 днів». Отже, в економіці США наявний своєрідний арбітражний центр у вигляді Федеральної резервної системи Fed, що діє як продавець і покупець на грошовому ринку, а також керує обліковою і відсотковою ставками. *Фіскальна політика*, вплив на *фінансовий ринок* здійснюються Казначейством через попит на гроші. Попит на гроші з боку

уряду США задовольняє оперативні потреби (казначейські ноти) відтворювального процесу і є імпульсним мультиплікатором – у теорії, а на практиці це казначейські ноти і векселі, за допомогою яких здійснюється перенесення вартості на авансований капітал.

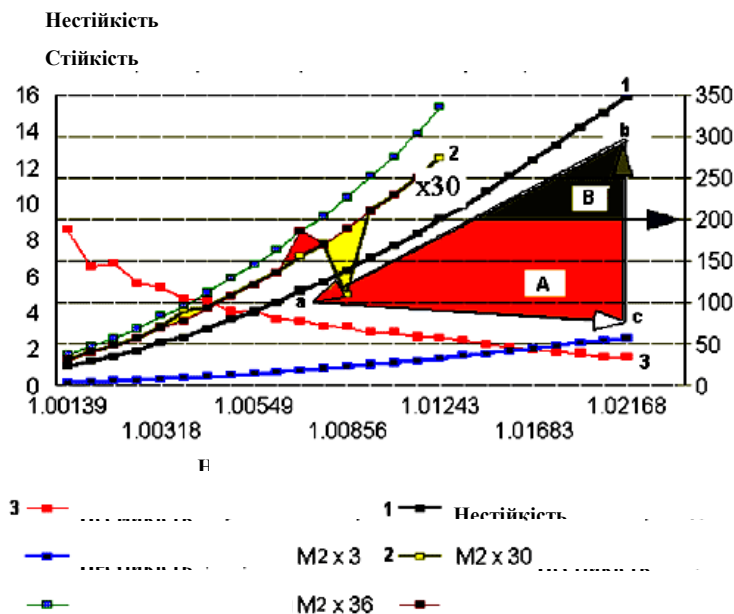


Рис. 3.55. Найпростіша модель еволюції світових ринків фінансів та капіталів

7.1.6.6. Хаос і взаємодія в сучасних системах ринків

Теоретичні висновки щодо еволюції сучасних економічних форм і обґрунтування перерозподілу вартості в «універсальній економічній формі» є адекватними концепції, яка враховує структурний релятивізм у сучасних процесах, що відбуваються на реальних ринках капіталів та фінансів.

Сучасну ситуацію на ринках можна охарактеризувати як процес перегруповання і локалізації. Він відбувається серед емітентів, свідченням чого є збільшення злиття та поглинання компаній, серед інвесторів, які прагнуть оптимізувати свої інвестиційні портфелі, і на самому ринку, що проявляється в постійному вдосконаленні, *консолідації і глобалізації ринкової інфраструктури*. Таке перегруповання, як свідчить історія розвитку фондового ринку, передують новому «хао-

тичному» стану фондового ринку, джерелом якого є зростання віддачі на вкладений капітал та ірраціональних очікувань, поширення нових технологій у різних галузях світового господарства, підвищення ефективності вкладень (ціна капіталу), «декапіталізація». До нових цікавих явищ можна віднести, наприклад, розвиток ринку прямих роздрібних послуг. Виникаючі торгові системи на базі інтернет-технологій надають нефінансовим компаніям можливість здійснювати операції купівлі–продажу валюти між собою.

Оновлюються й відносини між банками та їхніми клієнтами. Знижується роль банків як посередників. Банки починають виступати в новій для себе ролі – організатора торгівлі, який прагне створити максимально зручні та комфортні умови для роботи клієнтів на валютному ринку. Так, шість провідних світових банків – *Bank Tokyo-Mitsubishi*, *BNP Paribas* (Франція), *Dresdner Kleinwort Benson* (Німеччина), *Royal Bank Canada*, *Royal Bank Scotland* і *Westpac Banking Corp* (Австралія) – оголосили про свій намір відкрити спеціалізовану валютну інтернет-біржу. Ця біржа, яка отримала умовну назву *FX Alliance LLC*, дозволить крупним клієнтам банків, зокрема міжнародним корпораціям, інвесторам та інвестиційним фундаціям, здійснювати операції з іноземною валютою цілодобово.

У серпні 2000 р. три найбільші світові банки – *Deutsche Bank*, *Chase Manhattan* і *Citygroup*, які мають 28 % обсягу операцій на світовому валютному ринку, – об'єднавшись з інформаційним агентством Рейтер, створили інформаційну платформу, заздалегідь названу *Atriah*. Це зроблено для того, щоб дати можливість своїм клієнтам порівнювати і вибирати котирування валют, якими торгують ці банки.

Про намір створити об'єднану торгову платформу – *FXall* – оголосили й сім провідних фінансових інститутів Заходу: *JPMorgan*, *Bank America*, *Morgan Stanley Dean Witter*, *Goldman Sachs*, *HSBC*, *UBS Warburg*, *Credit Swiss First Boston*.

На валютному ринку країн СНД Інтернет-технології істотно розширили інформаційні та торгові можливості внутрішнього фінансового ринку. У мережі Інтернет є сайт ММВБ, користувачі якого можуть отримувати інформацію про хід торгів у реальному режимі часу. Розширюється коло клієнтів, що користуються інформацією ММВБ зокрема в Росії та Україні і в країнах ближнього зарубіжжя. Мережна технологія Інтернет може суттєво змінити архітектуру внутрішніх національних валютних ринків. Було розв'язано завдання з організації загальнонаціональних валютних ринків на основі Єдиної торгової сесії. Торгова система ММВБ було об'єднано з торговими системами СПВБ, СМВБ і НВФБ.

Отже, об'єднання інформаційно-торгової системи ММВБ із «зов-

нішніми» електронними системами можливе за допомогою систем розповсюдження інформації про хід торгів, систем оперативного ведення позицій учасників торгів, систем оперативного ризик-менеджменту, оперативних аналітичних систем, систем попереднього збору заявок для виконання в СЕЛТ і т. д. Систему Інтернет-торгівлі на біржі ММВБ було запущено у 2008 р. Кількість користувачів системи і обсяги операцій стрімко зростають.

Країни Західної Європи (ЄЕС), увівши єдину європейську валюту, наочно показали, що шлях створення єдиного «кіберпростору ринків» є реальним. Так, останнім часом обговорюється можливість створення валютного союзу країн латиноамериканського торгового угруповання Меркосур, куди входять Бразилія, Аргентина, Парагвай, Уругвай, Болівія і Чилі. У запровадженні єдиної валюти вони вбачають альтернативу долару в національних економіках. Проблеми координації своєї валютно-фінансової політики вирішують нині і країни Південно-Східної Азії. Держави АСЕАН, наприклад, домовилися про об'єднання своїх валютно-фінансових ресурсів, щоб обмежити коливання курсів національних валют. Усі ці явища на сучасних ринках капіталів та фінансів характеризуються зростаннями як хаосу, так і рівнів локалізації в агрегованій системі. Нагадаємо, що головна риса хаотичних систем полягає в тому, що в істотно квантовій границі незначне збурення початкових умов для динамічної змінної або ж незначне збурення самої нелінійної динамічної системи, викликане, наприклад, невдало вибраною періодичною і тривалою діяльністю на великому ліквідному ринку (ірраціоналізм «ринкових сил»), призводить до непередбачуваних результатів за скінченний час.

Це означає, в довгостроковій перспективі в умовах хаосу і взаємодії довгий промисловий цикл в стані неомобілізму капіталів вплине не тільки на обсяги, структуру ринків капіталу, напрям ліквідності товарних потоків на світових ринках, а й на внутрішньоекономічну сферу. Отже, за лінією фазового переходу «1» (рис. 3.55), динаміка прибутковості великих ліквідних ринків, рух проти фази ірраціональних цін ринку капіталів і загальносвітовий економічний цикл (злами лінії «2» на рис. 3.55) є тією сполучною ланкою, через яку здійснюються прямі та зворотні зв'язки локальних і світових ринків еволюційної складності сучасних економічних форм.

В історичній ретроспективі траєкторія руху двох економічних систем (США та Європи), використовуючи різний механізм ініціалізації та підтримки відтворювального процесу, під впливом загальносвітової інтеграційної відтворювальної тенденції на кінець 2000 р. перемістилася в напівплощину В (рис. 3.55), де значення внутрішнього відносного економічного часу дорівнює 200. Це показує, що рух сучасної

економічної форми має значний релятивізм, набуває великого значення темп накопичення (банківською системою) квазідоданої вартості у виділеному інтервалі UTC часової зони роботи протягом року та облік нелінійності ринків капіталу. В площині двовимірних параметрів області V характеризується високими прискореннями прибутковості M_{xx} , подовженим промисловим циклом до 15 років, такими областями перенесення вартості $\{m_i\}$, де хаос і впорядкованість слід розглядати на однакових підставах.

Висновок. Вище було розглянуто поняття і питання існування хаосу. Встановлено наявність хаосу в макромоделях зростання, моделях розвитку міст і моделях регіональної та інтернаціональної економік.

Було показано, що економічний хаос може виникнути навіть у моделях, описуваних цілком простими диференційними рівняннями. Це відкриття змінило погляди на процес економічного розвитку. Відкриття хаосу створило нову парадигму економічного моделювання. Системи мають внутрішні властивості, які породжують небезпеку непередбачуваної поведінки. Ми знаходимо нові фундаментальні обмеження можливостей економічного прогнозування. Передбачити майбутнє таких систем можливо, але будь-яка помилка в початкових умовах так швидко зростає, що весь прогноз практично зводиться на нівець.

Існування хаосу для нас не є дивним. Хаос узгоджується з нашим щоденним досвідом більшою мірою, ніж точна передбачуваність, – дивним, мабуть, є те, що хаос може виникнути в детермінованих рівняннях.

Слід наголосити, що підхід до опису економічних явищ за допомогою хаотичних динамічних систем має свої позитивні аспекти, зокрема уявно-стохастичні часові ряди можуть бути породжені з таких систем без якихось посилянь на довільно постульовані екзогенні впливи. Детермінізм, властивий хаосу, означає, що багато випадкових економічних явищ є більш передбачуваними, ніж досі вважалося. Це означає, що може бути досить плідним застосування хаотичних динамічних систем для аналізу минулих економічних осциляцій.

Теорія динамічного хаосу – один із сучасних напрямів нелінійної науки і синергетики. Перспективним є застосування основних положень цієї теорії не тільки в техніці, а й у медицині, економіці, фінансовому та інвестиційному аналізі, ризик-менеджменті та банківській справі.

7.2. Дивний атрактор і його властивості

Як уже говорилося, динамічний хаос у фазовому просторі виглядає як клубок траєкторій, наприклад такий, як показано на рис. 3.56. Для

усталених коливань, відповідних динамічному хаосу, Д. Рюель і Ф. Та-кенс у 1971 р. запропонували назву – *дивний атрактор*.

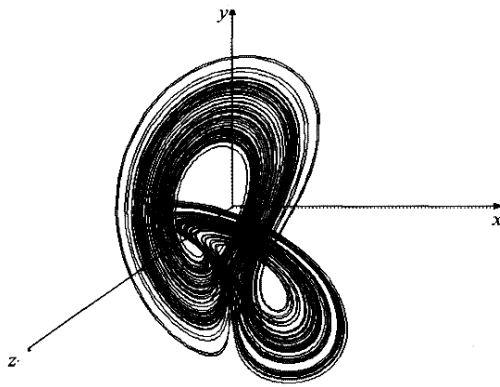


Рис. 3.56. Атрактор Лоренца

«Дивність» хаотичного атрактора полягає не стільки в незвичайному вигляді, скільки в тих нових властивостях, які він має. Дивний атрактор – це, перш за все, притягаюча область для траєкторій з навколишніх областей. При цьому всі траєкторії всередині дивного атрактора динамічно нестійкі. Іншими словами, якщо представити граничну множину як клубок у фазовому просторі, то точка, що характеризує стан системи, належатиме цьому клубку і не піде в іншу область фазового простору. Проте ми не можемо сказати, в якому місці клубка знаходитиметься точка в той чи інший момент часу.

Однією з парадоксальних властивостей атрактора є чутливість до початкових даних. Проілюструємо це. Виберемо дві близькі точки $\bar{x}'(0)$ і $\bar{x}''(0)$, які лежать на атракторі, і подивимось, як змінюється відстань $d(t) = |\bar{x}'(t) - \bar{x}''(t)|$ з часом. Якщо атрактор є особливою точкою, то $d(t) = 0$. Якщо атрактор – граничний цикл, то $d(t)$ буде періодичною функцією часу. У випадку дивного атрактора $d(t) \approx e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$. Величина λ називається *ляпуновським показником*. Невід’ємний ляпуновський показник характеризує середню швидкість розгону нескінченно близьких траєкторій (рис. 3.57).

Процес наближеного обчислення ляпуновського показника для відображення $X_{n+1} = f(X_n)$ полягає в наступному:

- розглянемо близьку до X_n точку $X_n + \delta X_n$;
- застосовуючи розкладання функції в ряд Тейлора, отримаємо

$$\delta X_{n+1} = df / dX \delta X_n + \dots;$$

- визначимо $e^\lambda = |\delta X_{n+1} / \delta X_n| = |df / dX|$, тоді $\lambda = \ln |df / dX|$;
- оскільки величина df / dX зазвичай змінюється в різних точках траєкторії, то обчислимо середнє значення $\ln |df / dX|$ для великого числа ітерацій.

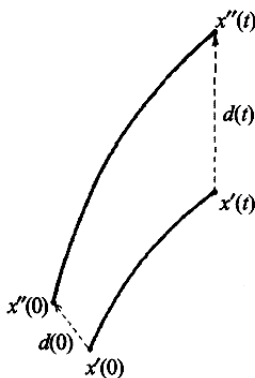


Рис. 3.57. Розгін близьких траєкторій

Приклад

Розглянемо логістичне рівняння:

$$X_{n+1} = 4X_n (1 - X_n);$$

$$df / dX = 4(1 - 2X),$$

взявши за початкове значення $x_1 = 0,1$, і обчислимо значення величини для перших десяти ітерацій (табл. 3.2):

Таблиця 3.2

Обчислення ляпуновського показника

Ітерація	X_n	$\ln(df / dx(n))$
1	0,36	0,113328685
2	0,9216	1,21574326
3	0,28901376	0,523479181
4	0,821939226	0,946049052
5	0,585420539	-0,380727165
6	0,970813326	1,326147943
7	0,113339247	1,129233963
8	0,401973849	-0,24307945

9	0,961563495	1,306305891
10	0,14783656	1,035781649
Середнє		0,697226301

У цьому випадку ляпуновський показник, обчислений всього лише після десяти ітерацій, дає гарне наближення до істинного значення, що дорівнює $\ln 2 = 0,693\ 147$.

Невід’ємні значення ляпуновського показника і чутливість системи до початкових даних дозволили цілком інакше поглянути на проблему прогнозування. Раніше передбачалося, що прогноз поведінки детермінованих систем, на відміну від стохастичних, може бути даний на будь-який бажаний час. Проте дослідження останніх десятиліть показали, що є клас детермінованих систем (навіть порівняльно простих), поведінку яких можна спрогнозувати лише на обмежений період часу. У дивного атрактора через час $\tau \approx 1/\lambda$ дві спочатку близькі траєкторії перестають бути близькими. Щонайменша неточність у визначенні початкового стану зростає з часом, і ми у принципі не можемо дати «довгостроковий прогноз». Це означає, що існує горизонт прогнозу, який обмежує наші здібності передбачати.

Іншою цікавою характеристикою хаотичного режиму є *фрактальна структура*. Геометрична структура дивного атрактора не може бути представлена у вигляді кривих або площин, тобто геометричних елементів цілої розмірності. *Розмірність* дивного атрактора є дробовою, або, як прийнято говорити, *фрактальною*. Крім того, дивний атрактор має властивість самоподібності. Яку б малу частину дивного атрактора ми не взяли, вона має ту ж структуру. Ціле виявляється схожим на скільки завгодно малу свою частину.

Ефективним методом дослідження дивних атракторів є метод перетину Пуанкаре. Дослідження відображення Пуанкаре дозволило простежити «тайнство» народження дивного атрактора, яке може бути описане, наприклад, за допомогою моделі Смейла (перетворення типу підкови). Основною операцією, необхідною для створення дивного атрактора, є розтягування в поєднанні зі складанням. Проста процедура розтягування та утворення складок у фазовому просторі дає ключ до розуміння хаотичної поведінки. Експоненційна розбіжність – локальне явище: оскільки атрактор має скінченні розміри, дві орбіти на хаотичному аттракторі не можуть експоненційно розходитися назавжди. Це означає, що такий атрактор має утворювати складки всередині самого себе. І хоча орбіти розходяться і слідують абсолютно різними шляхами, врешті-решт вони повинні пройти знову поблизу одна від одної. В результаті орбіти на хаотичному аттракторі перемішуються – подібно тому, як перетасовуються карти в колоді. Випадковість хаотичних орбіт є наслідком цього процесу перемішування. Розтягування

та утворення складок відбувається знову й знову, складки створюються всередині складок, і так до безкінечності. Інакше кажучи, хаотичний атрактор є фракталом – об'єктом, у якому зі збільшенням виявляється все більше деталей, які повторюють основний малюнок фрактала в кожному з масштабів.

Перетворення типу підкови наочно описує техніку побудови шаруватої структури дивного атрактора. Візьмемо прямокутник $ABCD$ і розтягнемо його, наприклад, в 2 рази по осі x та водночас стиснемо більш ніж в 2 рази по осі y . У результаті отримаємо прямокутник $A_1B_1C_1D_1$. Така операція призводить до скорочення площі, що необхідно для дисипативної системи. Потім складемо прямокутник $A_1B_1C_1D_1$ у вигляді підкови і накладемо на початковий прямокутник $ABCD$ (рис. 3.58).

Тепер виконаємо ті ж операції з новим прямокутником. У результаті вийде щось схоже на подвійну шпильку для волосся. Багато разів повторюючи вказані операції, отримаємо багат шарову структуру, що має всі властивості дивного атрактора (рис. 3.59).

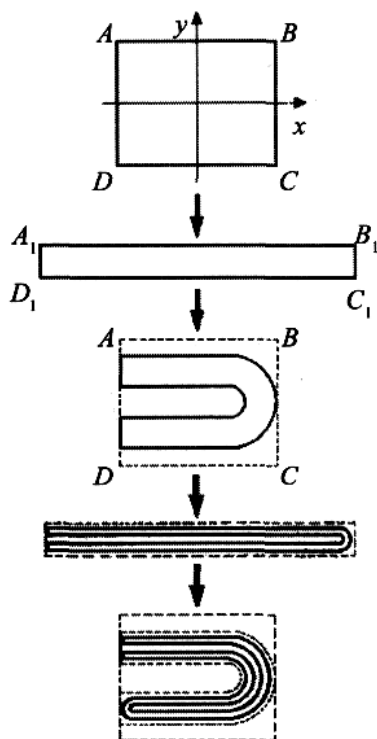


Рис. 3.58. Перетворення типу підкови

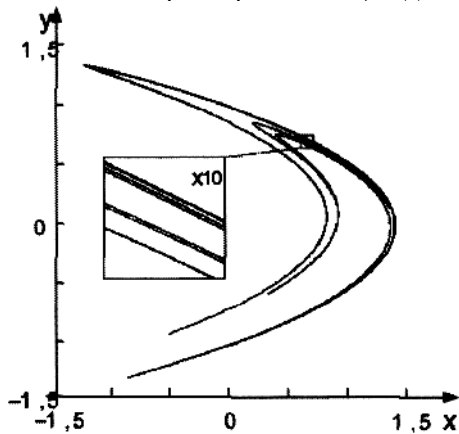


Рис. 3.59. Ілюстрація фрактальних властивостей дивних атракторів

Побудований нами атрактор має фрактальну розмірність. Щоб переконатися в цьому, здійснимо перетин прямокутника по осі y . На першому етапі ($k=0$) перетин має вигляд прямолінійного відрізка. Після однієї ітерації ($k=1$) ми одержимо підкову, а перетин складатиметься з двох відрізків (рис. 3.58). Надалі ми отримуватимемо набори відрізків, названі *канторовою множиною* (рис. 3.59).



Рис. 3.60. Канторова множина

Інший спосіб побудови канторової множини – послідовне вилучення інтервалів завдовжки $1/3$ із середини одиничного відрізка. Викинувши вперше середню третину, залишаємо два відрізки завдовжки $1/3$ кожен. Потім, викинувши середні третини з двох відрізків, що залишилися, отримаємо чотири відрізки завдовжки по $1/9$. Канторова множина буде побудована, якщо процес вилучення інтервалів продовжити до нескінченності (див. рис. 3.60).

Дотепер під терміном «розмірність» ми розуміли або розмірність евклідового простору ($D=1, 2, 3$), або розмірність динамічної системи. Фрактали, як нерегулярні геометричні об'єкти, вимагали розширення поняття розмірності. Узагальненням цього поняття для фрактальних множин стала розмірність Хаусдорфа. Ідея полягає в наступному. Розглянемо множину точок у p -вимірному просторі. Ми хочемо покрити цю множину кубами з ребром ε . Хай $N(\varepsilon)$ – найменше число кубів, необхідних для покриття множини. На рис. 3.61 показано число кубиків з ребром $r=1/\varepsilon$, необхідних для покриття одиничного відрізка, квадрата і куба.

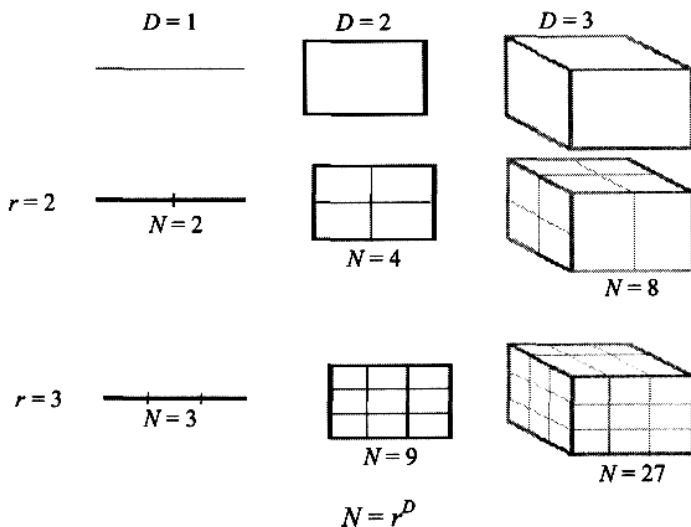


Рис. 3.61. Покриття об'єкта кубами з довжиною ребра $r = 1/\varepsilon$

Як неважко помітити, число кубів N , необхідних для покриття множини точок, довжина ребра куба ε і розмірність простору D зв'язані співвідношенням $N = (1/\varepsilon)^D$. Прологарифмувавши наведений вираз, одержимо: $\ln(N) = D \ln(1/\varepsilon)$, звідки $D = \ln(N(\varepsilon)) / \ln(1/\varepsilon)$. Розмірність Хаусдорфа визначається як границя (якщо вона існує) відношення $\ln(N(\varepsilon)) / \ln(1/\varepsilon)$ при ребрі куба, що наближається до нуля, тобто:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}.$$

Нескладно переконатися, що якщо множина складається з однієї точки, то $N(\varepsilon) = \text{const} = 1$. Отже, розмірність Хаусдорфа точки дорівнює нулю (евклідова розмірність теж дорівнює нулю). Якщо множина представляє відрізок лінії завдовжки L , то $N(\varepsilon) = L/\varepsilon$. Тому $D = 1$. Якщо множина точок – це поверхня з площею S , то $N(\varepsilon) = S/\varepsilon^2$, звідки $D = 2$.

Досі визначення розмірності Хаусдорфа нічого не додало до визначення евклідової розмірності. Проте повернемося до канторової множини. Розмірність Хаусдорфа канторової множини легко отримати за

його побудовою. При $\varepsilon = 1/3$ (у цьому випадку куби вироджуються просто у відрізки) число елементів, необхідних для того, щоб покрити множину, дорівнює: $N(1/3) = 2$. Аналогічно, при $\varepsilon = 1/9$ одержуємо: $N(1/9) = 4$. У загальному випадку при $\varepsilon = (1/3)^m$ маємо: $N(\varepsilon) = 2^m$. За визначенням, розмірністю Хаусдорфа є величина $D = \ln 2 / \ln 3 \approx 0,63$.

На закінчення відзначимо, що ще недавно синергетику сприймали як моду або гру розуму. Проте її здатність давати глибокі відповіді на прості питання дозволила сприймати цей підхід всерйоз. Синергетика сьогодні служить джерелом багатьох ідей і гіпотез у самих різних галузях знання.

Завдання і вправи

1. У чому полягає основна відмінність задач економічної статистики і динаміки?
2. Запишіть рівняння для опису розвитку економічного об'єкта, якщо темп приросту незмінний у часі.
3. Чи є функція

$$y(x) = e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$$

розв'язком диференційного рівняння $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$?

4. Визначте характер точки рівноваги лінійної автономної системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = -2y. \end{cases}$$

і зобразіть декілька фазових кривих.

5. Дослідіть систему диференціальних рівнянь залежно від параметра b :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - by. \end{cases}$$

Визначте, за яких значень параметра b система втрачає стійкий ат-

рактор.

6. Дослідіть стан рівноваги системи рівнянь і побудуйте її фазові криві:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin y, \\ \frac{dy}{dt} = \sin x. \end{cases}$$

7. Порівняйте дискретне і безперервне відображення і заповніть таблицю:

Параметр порівняння	Безперервне відображення	Дискретне відображення
Час	Безперервний	
Вид рівняння	Диференційне	
Приклад	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax. \end{cases}$	
Рішення	$x = x_0 e^{at}$	

8. За допомогою програми *Excel* побудуйте сходи Ламерея і дослідіть відображення $x_{n+1} = Ax_n$ залежно від параметра A . Яке значення параметра A буде біфуркаційним?

9. Порівняйте властивості відображення $x_{n+1} = A \sin(\pi x_n)$ з властивостями логістичного відображення.

10. Розгляньте павутиноподібну модель динаміки ринкових цін, в якій функції попиту S і пропозиції D є лінійними: $S(p) = A + Bp$, $D(p) = c - Ep$; де A , B , C , D – якісь параметри. Нехай виробники визначають пропозицію товару на основі цін, ustalених у попередньому періоді, тобто $D(p_t) = S(p_{t-1})$. Визначте точки рівноваги залежно від параметрів функцій попиту і пропозиції. Знайдіть умови, за яких: рівновага є стійкою; процес розходиться; у моделі з'являється цикл. Зобразіть ці процеси графічно.

11. Як зміняться результати попередньої задачі, якщо часовий лаг присутній не у функції пропозиції, а у функції попиту, тобто $S(p_t) = D(p_{t-1})$?

12. Нехай у павутиноподібній моделі $D_t = 1/3 p_t$; $S_t = S p_t$; $D_t = S_{t-1}$. Зобразіть графічно динаміку цін і обсягів випуску продукції. Як урівноважені ціна і випуск? Чи є рівновага стійкою?

13. Що спостерігається в реальному житті у випадку, коли павутиноподібна модель динаміки ринкових цін є розбіжною?

7.3. Методи управління хаосом у динамічних системах

Наявність хаосу є невід'ємною частиною більшості нелінійних динамічних систем (НДС), які описують досить складні процеси та явища. Хаотичні системи (ХС) характеризуються підвищеною чутливістю до незначних збурень системних параметрів і початкових умов, через що поведінка таких систем дуже довго вважалася непередбачуваною і некерованою. Існувала думка, що досягти бажаної поведінки системи можна лише подавивши в ній хаос – хай навіть значними і дорогими змінами в самій системі, які ведуть до зміни її динаміки в цілому.

Поставлена задача зводилося до вибору управляючих впливів, або в розімкненій формі (програмне управління), або у вигляді зворотного зв'язку за станом чи виходом – з метою приведення розв'язку системи до заданого періодичного вигляду або для синхронізації розв'язку системи з розв'язком якоїсь іншої системи, яка має потрібні регулярні властивості. Тобто розв'язувалась задача зі стабілізації заданої або бажаної траєкторії в системі з хаотичною поведінкою.

Проте в останні роки стала зрозумілою особлива роль хаосу в самоорганізації різних процесів та явищ. Було усвідомлено, що хаос не тільки не заважає, а швидше є неодмінною умовою працездатності складних систем, таких, скажімо, як людський мозок. Лише завдяки наявності хаотичного атрактора, що містить, як правило, нескінченне число нестійких періодичних траєкторій (циклів), можна досягти якісної зміни динаміки системи (переходу з околу одного циклу в окіл іншого) незначними збуреннями системних параметрів.

У зв'язку з цим у проблемі управління хаосом природним чином постала задача зі стабілізації не апіорі заданих або бажаних траєкторій НДС, а саме тих нестійких періодичних траєкторій, нескінченне число яких вплетене у павутину хаотичного (нерегулярного) атрактора. Причому якась інформація про положення цих траєкторій у фазовому просторі, про період і амплітуду їхніх коливань практично відсутня.

Нижче розглянуто декілька методів розв'язування задачі, яка зводиться до локалізації періодичних траєкторій (зокрема стаціонарних станів) НДС (у тому числі й хаотичних відображень).

7.3.1. Метод Отта–Гребоджі–Йорке. Метод Пірагаса

Метод Отта–Гребоджі–Йорке (OGY-метод) полягає в стабілізації нестійких періодичних розв'язків ХС звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) шляхом застосування дискретних управляючих впливів у вигляді зворотного зв'язку в якомусь перетині Пуанкаре в околі нерухомої точки відображення Пуанкаре, яка відповідає шуканому циклу.

Вигляд зворотного зв'язку визначається лінеаризацією відображення Пуанкаре в нерухомій точці.

Зауважимо, що в методі Пірагаса (див. далі) застосовується зворотний зв'язок із запізнюванням, причому час запізнювання має бути близьким до періоду шуканого нестійкого періодичного розв'язку.

Отже, розглянемо гладку сім'ю нелінійних автономних систем ЗДР

$$\dot{x} = F(x, \mu), x \in X \subset R^n, \mu \in L \subset R^k, F \in C^\infty, \quad (3.100)$$

заданих у фазовому просторі X гладкими векторними полями F , залежними від координат векторів системних параметрів μ , які лежать в області L простору R^k .

Нехай нестійкий граничний цикл є шуканим розв'язком сім'ї системи (3.100), яка за того ж значення параметра $\mu = \mu^*$ має регулярний або сингулярний атрактор.

Побудуємо перетин Пуанкаре S , що проходить через точку $x_0 = x^*(0, \mu^*)$ циклу $x^*(t, \mu^*)$ трансверсально до нього (тобто перпендикулярно дотичній у точці x_0 циклу $x^*(t, \mu^*)$). Розглянемо кероване відображення Пуанкаре $x \rightarrow P(x, \mu)$, в якому $P(x, \mu)$ є точкою першого повернення на площину S траєкторії системи (3.100), що починається в точці x за значення вектора параметра μ , який є в цьому випадку вектором управляючих параметрів. Застосовуючи послідовність таких керованих відображень, отримаємо дискретну динамічну систему

$$x_{n+1} = P(x_n, \mu_n), \quad (3.101)$$

де $x_n = x(t_n)$, t_n – момент часу n -го перетину площини S , а μ_n – значення вектора управляючих параметрів на проміжку між t_n і t_{n+1} .

Замінімо тепер відображення (3.101) близьким до нього лінеаризованим у точці (x_0, μ^*) відображенням, тобто

$$y_{n+1} = Ay_n + Bu_n, \quad A = \frac{\partial P(x_0, \mu^*)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial P(x_0, \mu^*)}{\partial \mu}, \quad (3.102)$$

де $y_n = x_n - x_0$, $u_n = \mu_n - \mu^*$ (рис. 3.62).

Для лінійної системи (3.102) виберемо стабілізуюче управління u_n у вигляді лінійного зворотного зв'язку за станом: $u_n = -Ly_n$.

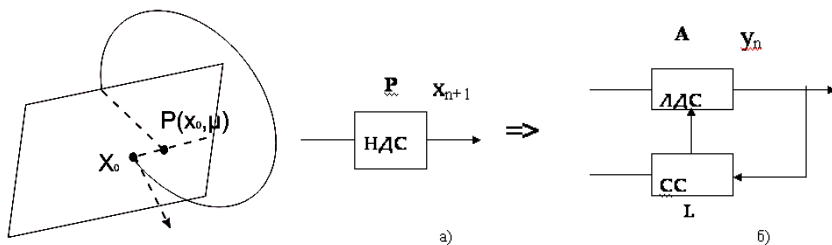


Рис. 3.62. Ілюстрація лінеаризації та відображення Пуанкаре

Тоді з (3.102) отримаємо, що

$$y_{n+1} (A - BL) y_n. \quad (3.103)$$

Таким чином, нерухома точка x_0 відображення Пуанкаре, а отже, і шуканий нестійкий цикл x системи (3.100), будуть стабілізовані, якщо визначити матрицю L так, щоб матриця $A - BL$ мала власні значення, за модулем менші одиниці (тобто виконати умову стійкості лінійної дискретної динамічної системи (3.103)).

Перевагою OGY-методу є те, що стабілізація нерухокої точки відображення Пуанкаре і граничного циклу системи диференціальних рівнянь (д. р.) досягається в ньому незначними управляючими діями в дискретний момент часу. Проте великим недоліком є те, що нерухома точка відображення Пуанкаре є нестійкою. Тому для застосовності методу необхідно точно знати не лише матрицю A , а й її власні значення та власні вектори, відповідні стійкому і нестійкому різноманіттям цієї точки. Траєкторію при цьому на кожній ітерації слід корегувати у бік стійкого різноманіття нерухокої точки.

Великою проблемою є також вибір початкової точки. У OGY-методі неявно передбачається, що система (3.100) має хаотичний атрактор – у тому сенсі, що він є замиканням усіх періодичних траєкторій, які містяться в ньому; звідки випливає, що будь-яка траєкторія з будь-якою початковою умовою з часом обов'язково потрапляє в якийсь малий окіл шуканого циклу. Але це далеко не так. Багато сингулярних атракторів цієї властивості не мають. Простий приклад – атрактор Фейгенбаума, який співіснує з нескінченним числом нестійких циклів і лежить на скінченній відстані від кожного з них.

Метод Пірагаса. Розглянемо гладку сім'ю нелінійних керованих систем ЗДР:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, \mu, u), \\ x &\in X \subset R^n, \mu \in L \subset R^n, u \in U \subset R^m, F \in C^\infty, \end{aligned} \quad (3.104)$$

які залежні від вектора управляючих параметрів u .

Нехай потрібно стабілізувати нестійкий граничний цикл періоду T , що є розв'язком системи (3.104) при $u = 0$ і $\mu = \mu^*$.

Нехай за тих же значень параметрів ($u = 0$ і $\mu = \mu^*$) сім'я (3.104) має регулярний або сингулярний атрактор. Тоді задача стабілізації циклу $x^*(t, \mu^*)$ може бути розв'язана в деяких випадках вибором простого закону зворотного зв'язку із запізнюванням, який має вигляд:

$$u(t) = K[x(t) - (x - T)], \quad (3.105)$$

де K – матриця коефіцієнтів передач (матриця посилення).

Якщо за початкову умову береться, що точка x_0 лежить у досить невеликому околі орбіти циклу, то розв'язок $x(t)$ системи

$$\dot{x}(t) = F(x(t), \mu^*, K(x(t) - x(t - T))) \quad (3.106)$$

зі зворотним зв'язком (3.105) при $\mu = \mu^*$ може сходитися до шуканого нестійкого циклу $x^*(t, \mu^*)$.

Аналітичне дослідження асимптотичних властивостей розв'язків замкнутої системи (3.106) є досить складним завданням. Тому донедавна були відомі тільки числові та експериментальні результати, які виходили з властивостей і області застосовності методу Пірагаса.

Проблема знаходження достатніх умов, що гарантують застосовність методу, досі залишається невирішеною. Крім того, великим недоліком закону управління (3.105) є його чутливість до вибору часу запізнювання T . Оскільки, якщо період T шуканого циклу заздалегідь відомий (а саме ця ситуація типова для хаотичних систем д.р.), то отримати необхідну збіжність можна лише у виняткових випадках, правильно обчисливши величину періоду якимись евристичними методами.

7.3.2. Метод Магницького (ММ)

Метод Магницького призначений для локалізації та стабілізації нестійких особливих точок і періодичних вирішень хаотичних систем д.р. і дискретних хаотичних динамічних систем. Метод заснований на побудові координатно-параметричного зворотного зв'язку в розширеному просторі, що робить можливим пошук стійких (на відміну від OGY-методу) нерухомих точок або асимптотично орбітально стійких (на відміну від методу Пірагаса) періодичних траєкторій. Крім того, ММ не має проблем з вибором початкового наближення і, на відміну від OGY-методу і методу Пірагаса, застосовний до хаотичних систем

д. р. і за відсутності якоїсь інформації про наявність періоду та положення шуканого нестійкого циклу у фазовому просторі. Областю застосовності методу є хаотичні відображення, хаотичні системи ЗДР та рівняння в частинних похідних, а також рівняння з аргументом, що запізнюється. Всі алгоритми застосовності методу теоретично обґрунтовані й аналітично доведені.

7.3.2.1. Локалізація і стабілізація нестійких точок та циклів хаотичних відображень

Розглянемо сім'ю m -вимірних нелінійних гладких відображень

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu), \quad x \in R^m, \quad (3.107)$$

де μ – скалярний параметр;

F – гладка за сукупністю змінних векторів функція.

Нехай точки $x_1^*(\mu), x_2^*(\mu), \dots, x_k^*(\mu)$ є k -періодичними точками відображення (3.107), для яких має місце

$$\begin{aligned} x_2^*(\mu) &= F(x_1^*(\mu), \mu), \quad x_3^*(\mu) = F(x_2^*(\mu), \mu), \dots, \\ x_1^*(\mu) &= F(x_k^*(\mu), \mu). \end{aligned} \quad (3.108)$$

При $k = 1$ точка $x_1^*(\mu)$ є нерухомою точкою відображення (3.107).

Зазвичай існує таке критичне значення μ_k^* системного параметра, за якого цикл (3.108) є стійкою періодичною траєкторією відображення (3.107) в області $\mu \leq \mu_k^*$, а в області $\mu > \mu_k^*$ цикл (3.108) є нестійкою періодичною траєкторією відображення (3.107), що має в цьому випадку інші регулярні або нерегулярні атрактори. Задача полягає в тому, щоб локалізувати (тобто знайти) і стабілізувати нестійку періодичну траєкторію відображення (3.108) в області $\mu > \mu_k^*$ малими збуреннями системного параметра μ . Зауважимо, що кожна точка $x_i^*(\mu)$ $i = 1, 2, \dots, k$ циклу (3.108) є стійкою нерухомою точкою відображення F^k в області $\mu \leq \mu_k^*$. Проте в області $\mu > \mu_k^*$ кожна точка $x_i^*(\mu)$ є нестійкою нерухомою точкою цього відображення. Розглянемо $(m + 1)$ -вимірне відображення

$$\begin{cases} x_{n+1} = F^k(x_n, \mu) + \varepsilon(q_n - \mu) \equiv \phi_1(x_n, q_n) \\ q_{n+1} = Q(x_n, \mu) + \beta(q_n - \mu) + \mu \equiv \phi_2(x_n, q_n) \end{cases}, \quad (3.109)$$

де $\varepsilon \in R^m$, $\beta \in R$, $Q(x_i^*(\mu), \mu) = 0$, $i = \overline{1, k}$.

Очевидно, що якщо цикл (3.108) є періодичною траєкторією відображення (3.107), то кожна точка $(x_i^*(\mu), \mu)$, $i = \overline{1, k}$ є нерухомою точкою відображення (3.109). Обчислимо якобіан відображення (3.109) у точці $(x_i^*(\mu), \mu)$.

$$J(\mu) = \begin{bmatrix} \partial F^k(\cdot) / \partial x : \varepsilon \\ \partial Q(\cdot) / \partial x : \beta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial q} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial q} \end{bmatrix}.$$

Усі власні значення матриці $J(\mu)$ у точці μ_k^* дорівнюють нулю тоді й тільки тоді, коли

$$\sum_{i=1}^{C_{m+1}^l} J_{li}(\mu_k^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m+1, \quad (3.110)$$

де $J_{li}(\mu)$ є i -й головний мінор порядку i матриці $J(\mu)$. Тому значення управляючих параметрів β і $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)^T$ у (3.109) повинно задовольняти системі з $(m+1)$ лінійних рівнянь (3.110). Зокрема очевидно, що один з управляючих параметрів β відображення (3.109) може бути обчислений безпосередньо з першого рівняння $T_r J(\mu_k^*) = 0$ системи (3.110):

$$\beta = -T_r J_0(\mu_k^*) = -T_r \left\{ \frac{\partial F^k(x_i^*(\mu_k^*), \mu_k^*)}{\partial x} \right\}.$$

Отже, виходячи з гладкості відображення F , можна стверджувати, що якщо система (3.110) має розв'язок, то існує область $\mu_{l_1}^* \leq \mu \leq \mu_{k_1}^*$, в якій для кожного $\mu \in [\mu_{k_1}^*, \mu_{l_1}^*]$ абсолютні величини всіх власних значень матриці $J(\mu)$ будуть меншими одиниці.

Звідси випливає наступна теорема.

Теорема 1. Якщо визначник D системи лінійних рівнянь (3.110) не дорівнює 0, тоді існує таке значення $\mu_{k_1}^* > \mu^*$ системного параметра

за якого для кожного $\mu \in [\mu_k^*, \mu_{k1}^*]$ точка $(x_i^*(\mu), \mu)$ є асимптотично стійкою нерухомою точкою відображення (3.109) і вона може бути локалізована і стабілізована в області $\mu \in [\mu_k^*, \mu_{k1}^*]$ за допомогою ітераційного процесу (3.109) з початковою умовою $q_0 = \mu$ і $x_0 = x_i^*(\mu_k^*)$. Будь-яка інша k -періодична точка $x_j^*(\mu), j \neq i$ відображення (3.107) також може бути локалізованою і стабілізованою в області $\mu \in [\mu_k^*, \mu_{k1}^*]$ за допомогою рівняння (3.108).

Використовуючи значення μ_{k1}^* як нове критичне значення системного параметра і обчислюючи нову матрицю Якобі $J(\mu_{k1}^*)$, можна скорегувати значення управляючих параметрів $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \beta$ у (3.109) і знов локалізувати точку $x_i^*(\mu)$ циклу (3.108) у новій області $\mu \in [\mu_{k1}^*, \mu_{k2}^*]$. Цей процес може бути продовжений на весь інтервал існування періодичної траєкторії (3.108) у відображення (3.107). Відображення $Q(x, \mu)$ у (3.109) може мати, зокрема, такий вигляд:

$$Q(x, \mu) = a_1(F_1^k(x, \mu) - x_1) + \dots + a_m(F_m^k(x, \mu) - x_m),$$

де коефіцієнти $a_i, i = \overline{1, m}$ дорівнюють нулю або одиниці – з тим, щоб забезпечити умову $D \neq 0$ для лінійної системи (3.110).

Загальний підхід, викладений вище, може бути конкретизований у випадку, коли відображення F у (3.107) є одно- або двовимірним.

Теорема 2. Нехай $x_i^*(\mu)$ є k -періодичною точкою одновимірного хаотичного відображення (3.107), а μ_k^* – таке критичне значення системного параметра, за якого

$$\nu = \partial F^k(x_i^*(\mu_k^*), \mu_k^*) / \partial x \neq 1, \quad (3.111)$$

де $\beta = -\nu$, $\varepsilon = \nu^2 / (1 - \nu)$.

Звернемо увагу на те, що величина

$$\nu = \frac{\partial F(x_1^*(\mu_k^*), \mu_k^*)}{\partial x} \times \dots \times \frac{\partial F(x_k^*(\mu_k^*), \mu_k^*)}{\partial x}$$

є однаковою для всіх точок $\{x_i^*(\mu)\}$ циклу (3.108) відображення (3.107).

Приклад. Розглянемо логістичне рівняння (відображення):

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n), \quad 3 \leq \mu \leq 4. \quad (3.112)$$

Нерухома точка (н. т.) $x^*(\mu) = 1 - \frac{1}{\mu}$ відображення (3.112) є нестійкою стаціонарною точкою в області $\mu > \mu^* = 3$.

Більше того, якщо $\mu > 3,57$, то відображення (3.112) має хаотичну поведінку. Числові експерименти показали, що можна локалізувати і стабілізувати н. т. $x^*(\mu)$ відображення (3.112) на інтервалі $3 < \mu \leq 3,6$ ітераційним процесом (3.111) з $\beta = -F_x = 1$ і $e = 0,5$, обчисленими в точці $\mu^* = 3$. Потім можна локалізувати і стабілізувати н. т. на інтервалі $3,6 < \mu \leq 4,25$ параметрами $\beta = 1,6$ і $\varepsilon = 1$, обчисленими в точці $\mu_1^* = 3,6$.

На останньому інтервалі відображення (3.112) має хаотичну поведінку.

Точки A, B, C відповідають біфуркаціям подвоєння періоду відображення (3.112), а точки D, E – біфуркаціям подвоєння стабілізуючого відображення (3.111). Чистки траєкторії $A-D$ і $D-E$ одержано при першій і другій ітераціях процесу стабілізації відображення (3.111), відповідно, на інтервалах $3 \leq \mu < 3,6$ і $3,6 \leq \mu \leq 4,25$.

На останньому інтервалі відображення (3.112) має хаотичну поведінку.

Точки

$$\begin{aligned} x_1^*(\mu) &= \frac{(\mu+1) - \sqrt{(m+1)(m-3)}}{2\mu}, \\ x_2^*(\mu) &= \frac{(\mu+1) + \sqrt{(m+1)(m-3)}}{2\mu} \end{aligned} \quad (3.113)$$

є точками нестійкого циклу періоду 2 відображення (3.112) на інтервалі $\mu^* < \mu \leq 3,58$ за допомогою ітерацій (3.111) при $k = 2$ з $\beta = -v = 1$, $\varepsilon = 0,5$, обчислених у точці μ^* (рис. 3.63). Нагадаємо, що відображення (3.112) має хаотичну поведінку поблизу правого кінця цього інтервалу (тобто при $\mu > 3,57$).

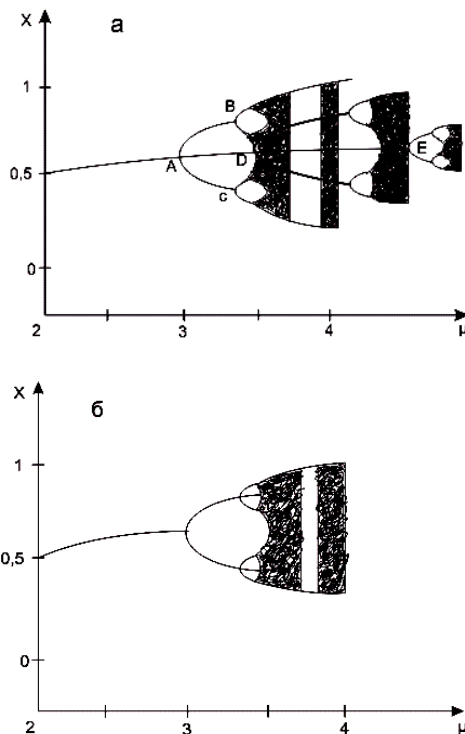


Рис. 3.63. Біфуркаційна діаграма логістичного відображення (3.112) і стабілізуючої його системи (3.111) при $k = 1$ (а) і при $k = 2$ (б).

На завершення відзначимо, що існує узагальнення теореми 2 і алгоритм локалізації та стабілізації нестійких особливих точок для дво- і багатовимірних відображень F у рівнянні (3.107).

7.3.2.2. Локалізація і стабілізація нестійких нерухомих точок (н. н. т.) хаотичних динамічних систем

Розглянемо нелінійну динамічну систему

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x \in R^m, \quad (3.114)$$

що задана сім'єю гладких за сукупністю змінних відображень F .

Нехай $x^*(\mu)$ – н. т. системи (3.114), де μ – скалярний параметр. Припустимо (як і вище), що існує таке критичне значення μ^* системного параметра, за якого точка $x^*(\mu)$ є стійкою н. т. системи (3.114)

при $\mu \leq \mu^*$, а при $\mu > \mu^*$ – стає н. н. т. цієї ж системи, яка в цьому випадку має інші регулярні або хаотичні атрактори. Проблема також полягає в локалізації та стабілізації н. н. т. $x^*(\mu)$ системи (3.114) при $\mu > \mu^*$ за допомогою малих збурень параметра μ .

Розглянемо $(m + 1)$ -вимірну динамічну систему, тобто розширену систему вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, \mu) + \varepsilon_k(q - \mu) \\ \dot{q} = Q(x, \mu) + \beta_i(q - \mu) \end{cases} \quad (3.115)$$

де $Q(x^*(\mu), \mu) = 0$, а $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)^T$ і $\beta \in R$ – управляючі параметри системи (тобто в традиційних позначеннях вектор управління – $u = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \beta)^T$), $q \in R$, а вектор стану – $\tilde{x} = (x, q)^T \in R^{m+1}$.

Відзначимо, що якщо точка $x^*(\mu)$ є н. н. т. системи (3.114), то точка $(x^*(\mu), \mu)$ буде н. н. т. системи (3.115).

Обчислимо якобіан правої частини відображення системи (3.115) у точці $(x^*(\mu), \mu)$:

$$J(\mu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(x^*(\mu), \mu)}{\partial x} & \frac{\partial F[\cdot]}{\partial q} \\ \frac{\partial Q(x^*(\mu), \mu)}{\partial x} & \frac{\partial Q(\cdot)}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \varepsilon \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \beta \end{bmatrix} \cdot (x^*(\mu), \mu).$$

Характеристичне рівняння матриці $J(\mu)$ є таким:

$$P(\lambda, \mu) = \det[J(u) - \lambda E] = (-\lambda)^{m+1} + b_1(-\lambda)^m + \dots + b_m(-\lambda) + b_{m+1}, \quad (3.116)$$

де $b_k = \sum_{i=1}^{C_{m+1}^k} J_{ki}(\mu)$, J_{ki} – головний міnor порядку k матриці $J(\mu)$. Зокрема $b_1 = T_r J(\mu)$, $b_{m+1} = \det J(\mu)$.

Вимагаємо, щоб (3.116) мало в точці μ^* всі корні $\lambda \equiv d < 0$.

У цьому випадку $P(\lambda, \mu^*) = (d - \lambda)^{m+1}$, а $b_k = C_{m+1}^k d^k$, $k = 1, 2, \dots, m+1$. Тоді управляючі параметри $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \beta$ повинні задовольняти системі з $(m + 1)$ лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{C_{m+1}^k} J_{ki}(\mu^*) = C_{m+1}^k d^k, \quad k = 1, 2, \dots, m+1. \quad (3.117)$$

Зокрема управляючий параметр β , визначається безпосередньо з рівняння $T_r J(\mu) = (m+1)d$:

$$\beta = -T_r \left\{ \frac{\partial F(x^*(\mu^*), \mu^*)}{\partial x} \right\} + (m+1)d = -T_r J_0 + (m+1)d.$$

Виходячи з гладкості сім'ї $\{F(x, \mu)\}$ у (3.114), можна стверджувати, що має місце наступна теорема.

Теорема 3. Якщо визначник D системи лінійних рівнянь (3.117) відмінний від нуля, то існує така область $\mu^* \leq \mu \leq \mu_1^*$, в якій для $\forall \mu \in [\mu^*, \mu_1^*]$ дійсні частини всіх власних значень матриці $J(\mu)$ є від'ємними, а точка $(x^*(\mu), \mu)$ – асимптотично стійкою н. т. системи (3.115). Отже, н. т. $x^*(\mu)$ динамічної системи (3.114) стабілізується при значеннях $\mu \in [\mu^*, \mu_1^*]$ за допомогою розв'язання системи (3.115) з початковими умовами $x_0 = x^*(\mu^*)$, $q_0 = \mu$.

Далі, використовуючи μ_1^* як нове критичне значення системного параметра й обчислюючи новий якобіан $J(\mu_1^*)$, можна скорегувати значення управляючих параметрів $\beta, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ у (3.115) та знову локалізувати і стабілізувати н. т. $x^*(\mu)$ системи (3.114) при нових значеннях $\mu \in [\mu_1^*, \mu_2^*]$. Цей процес можна продовжити на весь інтервал існування н. т. системи (3.114).

В окремому випадку відображення $Q(x, \mu)$ у (3.115) може мати вигляд

$$Q(x, \mu) = \sum_{i=1}^m a_i F_i(x, \mu),$$

де $a_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, m}$ вибираються з умови відмінності від 0 визначника D системи $(m+1)$ лінійних рівнянь (3.117) для управляючих параметрів.

7.3.2.3. Локалізація і стабілізація нестійких циклів (н. ц.) хаотичних динамічних систем

Ця задача є однією з найважливіших задач – складових проблеми управління хаосом.

Розглянемо нелінійну динамічну систему

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x \in R^m, \quad \mu \in R, \quad (3.118)$$

що витзнпачається сім'єю гладких відображень F .

Нехай $x^*(t, \mu)$ – замкнута періодична траєкторія (тобто граничний цикл) системи (3.118), залежна від системного параметра μ . Покладемо, що існує таке критичне значення системного параметра μ^* , за якого траєкторія $x^*(t, \mu)$ є асимптотично орбітально стійким циклом системи (3.118) при $\mu \leq \mu^*$, а при $\mu > \mu^*$ ця траєкторія є н. ц. системи (3.118). Сама ж ця система в такому випадку може мати в якості атракторів інші стійкі граничні цикли різних періодів, стійкі тори, а за подальшого збільшення значень параметра можуть з'явитися і нерегулярні атрактори, що свідчать про хаотичну динаміку системи.

Задача полягає в локалізації та стабілізації н. ц. $x^*(t, \mu)$ системи (3.118) малими збуреннями системного параметра μ в області $\mu > \mu^*$ хаотичної поведінки траєкторій системи за майже повної відсутності інформації про сам цикл $x^*(t, \mu)$.

Основна ідея методу розв'язання цієї задачі залишається тією ж – побудова більшої розмірності, для якої н. ц. $x^*(t, \mu)$ системи (3.118) є проекцією якогось її асимптотично орбітально стійкого в області $\mu > \mu^*$ граничного циклу.

Нехай цикл $x^*(t, \mu)$ системи (3.118) має період $T = T(\mu)$. Відзначимо, що при $\mu > \mu^*$ період циклу $x^*(t, \mu)$ також невідомий, і визначити його за розв'язком системи (3.118) неможливо. Розглянемо $(m + k + 1)$ -вимірну систему:

$$\begin{cases} \dot{y} = F(y, \mu) + Z(y, t, \mu)E(q - \mu e), \\ \dot{q} = DQ(y, s, t, \mu) + \beta(q - \mu e), \\ \dot{s} = C^T Q(y, s, t, \mu), \end{cases} \quad (3.119)$$

де $s(t)$ – скалярна функція, $y(t) \in R^m$, $q(t) \in R^k$, $1 \leq k < m$, D і E –

$(k \times m)$ - і $(m \times k)$ -вимірні постійні матриці, вектор $e = (1, \dots, 1)^T$, $\mu \in R$, $C \in R^m$ – постійний вектор, $\beta \in R$.

Відображення $Q(\bullet)$ і $Z(\bullet)$ визначимо таким чином:

$$Q(y, s, t, \mu) = x(s, \mu) - x(0, \mu), \quad Z(y, t, \mu) = \frac{\partial y}{\partial x(0, \mu)}, \quad (3.120)$$

де $x(\tau, \mu)$ – розв'язок системи (3.118) у момент τ , за умови $x(t, \mu) = y$.

Теорема 4. Існують постійні матриці E і D управляючих параметрів, вектор C , скаляр β , а також значення системного параметра $\mu_1^* > \mu^*$ – такі, що цикл $u^*(t, \mu)$ – розв'язок розширеної системи (3.119) – є асимптотично орбітально стійким граничним циклом системи (3.119) при всіх значеннях параметра $\mu \in [\mu^*, \mu_1^*]$.

7.3.3. Реконструкція динамічної системи за траєкторією нерегулярного атрактора

У багатьох випадках, у тому числі і в проблемі управління хаосом, необхідно вирішувати задачу відновлення систем диференційного рівняння (д. р.) виходячи із заданої множини (ряду) точок у фазовому просторі, що належать атрактору системи.

Для розв'язання цієї задачі раніше застосовувалися як методи синхронізації, так і прямі методи. Методи синхронізації засновані на використанні однонаправленого зв'язку двох хаотичних систем. При сильному зв'язку амплітуди коливань зв'язаних систем ідентичні і змінюються однаково хаотично. Параметри синхронізації системи підбираються таким чином, щоб її коливання співпадали з коливаннями невідомої системи, розв'язання якої задані початковою множиною точок (часовим рядом). Прямі методи засновані на апроксимації похідних, обчислюваних приблизно за заданою множиною точок певними функціями, найчастіше поліномами.

Ці методи дають достатньо гарні результати, якщо відомий вигляд правої частини системи і задача є лінійною за невідомими параметрами. Якщо ж права частина системи д. р. невідома, то такий підхід не дозволяє розв'язати задачу, оскільки розв'язки визначеної таким чином системи не співпадають з розв'язками для заданої множини точок.

Тут ми представляємо прямий метод розв'язання вказаної задачі, який не має цих недоліків.

Множина точок (часовий ряд), що визначає відрізок траєкторії нерегулярного атрактора в просторі R^n , задає певну криву, яка може бути

описана, наприклад, параметрично: $x_i(t_k) \equiv x_{ik}$, $i = \overline{1, n}$; $k = \overline{1, N}$ – множина значень незалежної змінної t (або кількість точок у заданій множині, тобто кількість членів часового ряду). Припустимо, що випадкові похибки, з якими задані точки множини, є некорельованими і мають нульове математичне очікування, тобто:

$$x_{ik} = x_{ik}^n + \varepsilon_{ik}, \quad i = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, N},$$

де x_{ik}^n – істинні значення початкового часового ряду, а ε_{ik} – випадкові похибки вимірювання (задавання), причому

$$M(\varepsilon_{ik} = 0) \text{ і } M(\varepsilon_{ik} \varepsilon_{il}) = 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad k, l = \overline{1, N}.$$

Множина $\{x_{ik}\}$ визначає сіткові функції (тобто матрицю), які задані на сітці. Вони задають у фазовому просторі R^n певну сіточну траєкторію $x(t_k)$.

Апроксимуємо множину значень $\{x_{ik}, \quad i = \overline{1, n}; \quad k, l = \overline{1, N}\}$ сіткової функції у фазовому просторі R^n розв'язком $x(t, Q) = (x_1(t, Q), \dots, x_n(t, Q))^T$ системи диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = F(x, Q), \quad x \in R^n, \quad Q \in R^m \quad (3.121)$$

на інтервалі часу $t \in [0, t_N]$ з початковою умовою $x(0) = x$, де $Q = (Q_1, \dots, Q_m)^T$ – вектор невідомих параметрів, а m – розмірність простору параметрів.

З множини розв'язків $\{x(t, Q)\}$ системи (3.121) необхідно вибрати такий розв'язок $x(t, \hat{Q})$, траєкторія якого у фазовому просторі R^n найбільш близька до заданої сіткової функції $x(t_k)$.

Для оцінки близькості в якості прикладу застосуємо функціонал

$$\Phi(x, Q) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N [x_{ik} - x_i(t_k, Q_1, \dots, Q_m)]^2. \quad (3.122)$$

Завдання полягає в тому, щоб знайти таке значення вектора параметрів \hat{Q} , за якого функціонал (3.122) матиме найменше значення, тобто розв'язується задача

$$\Phi(x, Q) \rightarrow \min_Q.$$

Необхідна умова екстремуму функціонала –

$$\frac{\partial \Phi(x, Q)}{\partial Q_j} = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

тобто

$$\sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^n (x_{ik} - x_i(t_k, Q)) \frac{\partial x_i(t_k, Q)}{\partial Q_j} = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.123)$$

Система нелінійних щодо невідомого вектора параметрів \hat{Q} .

Для числового розв'язання системи (3.123) за допомогою ітераційного процесу розкладемо розв'язок $x(t, Q)$ системи (3.121) у ряд Тейлора в якійсь точці $Q^0 \in R^m$ і знехтуємо величинами 2-го порядку малості $O(\bullet)$:

$$x(t_k, Q) = x(t_k, Q^0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x(t_k, Q)}{\partial Q_j} \bigg|_{Q=Q^0} (Q_j - Q_j^0) + O(\|Q - Q^0\|^2). \quad (3.124)$$

Тоді, підставляючи (3.124) у (3.123), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial x_i(t_k, Q)}{\partial Q_l} \cdot \frac{\partial x_i(t_k, Q)}{\partial Q_j} \right]_{Q=Q^0} (Q_i - Q_i^0) = \\ & = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N (x_{ik} - x_i(t_k, Q^0)) \cdot \frac{\partial x_i(t_k, Q)}{\partial Q_l} \bigg|_{Q=Q^0}, \quad l = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Ця система є лінійною щодо приростів (варіацій) δ_l^0 . У векторній формі вона має вигляд:

$$\sum_{k=1}^N U^T(t_k, Q^0) U(t_k, Q^0) \delta^0 = \sum_{k=1}^N U^T(t_k, Q^0) (x_k - x(t_k, Q^0)), \quad (3.125)$$

де $U(\bullet)$ – матриця з елементами $u_{ij} = \partial x_i(t_k, Q) / \partial Q_j$ при значенні $Q = Q^0$, $\delta^0 = Q - Q^0$, $x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})^T$ – вектор сіткової функції $x(t_k)$ у точці t_k у фазовому просторі R^n – розв'язок рівняння (3.121) у момент часу t_k при значенні $Q = Q^0$. Матриця U є розв'язком дифе-

ренційного матричного лінійного неоднорідного рівняння

$$\dot{U} = PU + Q$$

при $U(0) = O$, де O – $m \times n$ -вимірний нульовий матриця, а P і Q – $n \times n$ – $n \times m$ -вимірні матриці, похідні від правої частини системи (3.121) відповідно за змінними x і Q :

$$P = D_x [F(x, Q)], \quad Q = D_Q [F(x, Q)].$$

Отже, всі необхідні складові для розв’язання системи (3.125) лінійних алгебраїчних рівнянь знаходяться з розв’язку такої системи диференціальних рівнянь:

$$x^* = F(x, Q^0), \quad \dot{U} = P^0 \cdot U(t, Q^0 + Q^0(x)) \quad (3.126)$$

на відрізку $t \in [0, t_N]$ за вказаних вище початкових умов. Матриці P^0 і Q^0 у (3.126) обчислюються при $Q = Q^0$ і $x = x(t, Q^0)$.

Знайдений розв’язок системи (3.126) δ^0 мінімізує суму квадратів відхилень, тобто

$$\Phi^0(x, Q) = \sum_{k=1}^N [x_k - x(t_k, Q^0) - U(t_k, Q^0) \delta^0]^2,$$

і є у фазовому n -вимірному просторі оцінкою найменших квадратів для вектора $\delta = Q - Q^0$. Тому величина $Q^1 = Q^0 + \delta^0$ буде уточненою щодо Q^0 оцінкою вектора параметрів Q і може застосовуватися для подальшого поліпшення оцінки. Далі в наведеному вище алгоритмі замість значення Q^0 покладемо Q^1 .

Отже, починаючи з якогось значення $Q^0 \in R^m$, знайдемо послідовність векторів $\{Q^v\}$ за схемою $Q^{v+1} = Q^v + \delta^v$, $v \rightarrow \infty$. Границя цієї послідовності при $v \rightarrow \infty$ є розв’язком початкової задачі, тобто:

$$Q^v \rightarrow \hat{Q} \quad \text{при } v \rightarrow \infty.$$

Приклад. Розглянемо задачу відновлення динамічної системи Реслера за заданим часовим рядом (відрізком траєкторії), створеним у результаті числового розв’язання системи

$$\dot{x} = -(y + z), \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b + z(x - \mu) \quad (*)$$

за таких значень параметрів: $a = 0,5$, $b = 0,75$, $\mu = 2 \cdot 4$.

Як відомо, при $\mu > 2,35$ система Реслера має нерегулярний аттрактор.

Для апроксимації заданої множини застосовувалась система диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_i = a_i + \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^3 \sum_{e=1}^3 a_{ije} x_j x_i, \quad i = 1, 2, 3$$

з квадратичним поліномом у правій частині, що містить 30 невідомих параметрів, тобто $Q = (a_i, a_{ij}, a_{ije})$.

Розроблений метод дозволив розв'язати цю ж задачу при $Q^0 = 0$.

Було встановлено, що точність оцінок параметрів залежить, в основному, від похибки, з якою задані точки початкової множини (на аттракторі).

Отриманий результат числового обчислення, здійсненого за методом Рунге-Кутта:

$$a_{12} = a_{13} = -1, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = 0,5, \quad a_3 = 0,75, \quad a_{33} = -2,4, \quad a_{313} = 1$$

співпав з параметрами системи (*). Точність можна оцінити як $\Phi \sim 10^{-10}$.

7.4. Сценарій переходу складних систем до хаосу

Мабуть, не менше вражаючим за саме відкриття детермінованого хаосу стало відкриття сценаріїв переходу до хаосу, відкриття порядку в хаосі.

У 1976 р. американський фахівець у галузі математичної і теоретичної фізики Мітчел Фейгенбаум здійснив відкриття, яке полягає в тому, що сценарій переходу до хаосу через нескінченний каскад біфуркацій (КБ) подвоєння порядку є універсальним для великого класу динамічних систем.

По-перше, ще 1971 р. було знайдено цікаву властивість відображень типу $X_{n+1} = f(x_n)$: за зміни параметра λ існуючий цикл, що має період T , втрачає стійкість, а стійким стає цикл з періодом $2T$, потім $4T$ і т. д. При цьому інтервал зміни параметра λ , в межах якого цикл періоду 2^n є стійким, швидко звужується. Всі значення λ , за яких відбувається біфуркація подвоєння періоду, згущуються до якогось значення $\lambda = \lambda_{кр}$. Як тільки $\lambda > \lambda_{кр}$, усередині якоїсь області фазового простору (який є обмеженим і притягає) виявляється нескінченне число нестійких циклів (у тому числі й нескінченний з періодом $T_\infty = 2^\infty$). Вслід за цим складним утворенням відразу з'являється хаотичний (дивний) аттрактор.

По-друге, до цього відкриття вже виникали сумніви в сценарії виникнення турбулентності Ландау. Адже відомо, що за певних умов рух рідини буває різним: за одних – рівним, стійким, регулярним або, як кажуть, ламінарним, а за інших – нерівним, нестійким, нерегуляр-

ним, тобто турбулентним. Характер ламінарного руху (течії) легко визначається з розв'язку рівнянь, а ось непередбачуваність турбулентної течії описати непросто. Пояснення, запропоноване Л. Д. Ландау, полягає в тому, що в турбулентній течії виникає багато різних незалежних коливань з несумірними частотами. При цьому кожне з коливань може бути простим, але їхня сукупність призводить до непередбачуваної складності руху.

У працях Д. Рюеля (Франція) і Ф. Такенса (Нідерланди) (1971) виникнення турбулентності пов'язувалося з появою дивного атратора після невеликого числа (трьох) біфуркацій.

Зрозуміло, виникла ідея пов'язати безперервний перехід до турбулентності з можливістю реалізації в течії нескінченного КБ подвоєння періоду.

М. Фейгенбаум аналізував відображення

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n).$$

Він хотів вивчити комплексні аналітичні властивості функцій, породжуваних таким відображенням. Рівняння аналітично не розв'язувалося, і Фейгенбаум зайнявся числовими розрахунками значень параметра, за яких відбувалося кожне подвоєння. Він помітив, що значення параметра λ , відповідні кожному подвоєнню, сходяться як геометрична прогресія, тобто кожен подальший крок можна було знайти аналітично. Знаменник прогресії нині називається постійною Фейгенбаума, його позначають літерою δ , він дорівнює 4,6692116..., тобто $\lambda_{n+1} = \delta \lambda_n$, $n = 0, 1$.

Відомий американський математик С. Смейл підказав Фейгенбауму, що подвоєння має й розв'язок рівняння

$$x_{n+1} = \lambda \sin x_n.$$

Результат був той же: знову з'явилася геометрична прогресія зі знаменником $\delta = 4,6692116...$

Згодом з'ясувалося, що послідовність подвоєнь має властивість універсальності, яка не залежить від конкретних особливостей системи, а у багатьох випадках – і від розмірності фазового простору.

Розглянемо докладніше складну динаміку одновимірних відображень. Для задачі про еволюцію чисельності популяції її можна подати у вигляді:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (N - x_n) \equiv f(x_n, \lambda), \quad 0 \leq x_n \leq N. \quad (3.127)$$

Якщо $x_n \leq N$ (N – середня чисельність виду) і $\lambda N > 1$, то кількість особин швидко зростає, але вона починає зменшуватися, щойно

x_n стає великим. Введемо заміну: $x_n = x'_n N$, $\lambda = \lambda' N$. Тоді рівняння (7.127), якщо опустити штрихи, стане таким:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n), \quad 0 \leq x_n \leq 1. \quad (3.128)$$

Якою буде послідовність $\{x_n\}$ при $n \rightarrow \infty$ і за різних λ ?

Знайдемо екстремум функції

$$x_{n+1} = \lambda x_n (N - x_n) \equiv f(x_n, \lambda).$$

Неважко помітити: з $dx_{n+1} / dx_n = \lambda(1 - 2x_2) = 0$ випливає, що $x_n = 1/2$ за будь-яких λ , а $x_{n+1}^{екст} = \lambda / 4$.

Якщо переписати (3.128) як $y = f(x)$, стане очевидним, що функція $f(x)$ перетворює відрізок $[0, 1]$ у відрізок $[0, \lambda/4]$.

Нехай $\lambda = 1$ і $x_1 = 1/2$. Тоді, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2), \dots$, $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Якщо $\lambda \leq 4$, то всі $x_n \in [0, 1]$ за умови, що і $x_1 \in [0, 1]$. Тому кажуть, що рівняння (3.128) задає відображення відрізка в себе. Нерухома точка $x = y = 0$ є стійкою при всіх $\lambda \leq 1$, причому $\lambda = 1$ – критичне значення, після якого вона втрачає стійкість.

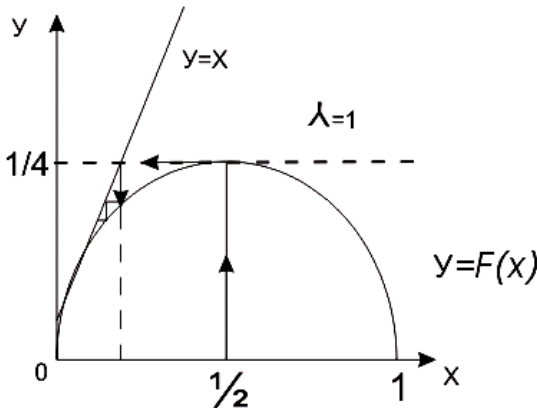


Рис. 3.64. Діаграма Ламерея

Нехай тепер $\lambda > 0$. Наприклад, $\lambda = 2$. Тоді для точки екстремуму $x_n = 1/2$ і $x_{n+1} = 1/2$. Нерухома точка $x^* = 1/2$, що знову з'явилася, стає стійкою (рис. 3.65).

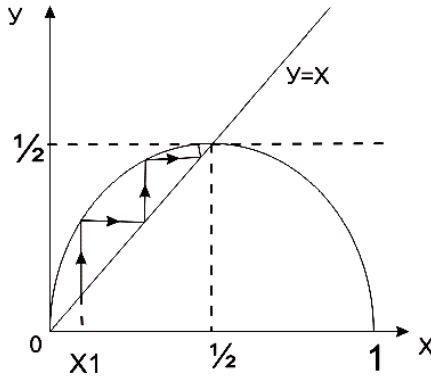


Рис. 7.65. Стійка точка

Як перевірити стійкість нерухомої точки x^* ? Розглянемо загальне відображення у вигляді

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda). \quad (3.129)$$

Нехай $x_n = x^* + \Delta x_n$, де Δx_n – мале відхилення від нерухомої точки. Якщо точка x^* стійка, то величина $|\Delta x|$ має зменшуватися зі зростанням n .

Перепишемо рівняння (3.129) у вигляді

$$x_{n+1} = \underline{x} + \Delta x_{n+1} = f(x^* + \Delta x_n, \lambda) \approx f(x^*, \lambda) + \left(\frac{df(x^*)}{dx} \right) \Delta x_n,$$

тобто

$$\Delta x_{n+1} = \frac{df(x^*, \lambda)}{dx} \Delta x_n.$$

Очевидно, для того, щоб із зростанням n $\Delta x_n \rightarrow 0$, має виконуватися умова $df(x^*, \lambda)/dx < 1$. Ця умова є достатньою для стійкості нерухомої точки x^* . У випадку протилежної нерівності точка x^* є нестійкою.

Продовжимо збільшувати параметр λ . Поведінка системи змінюється: починаючи з достатньо великих n , у послідовності $\{x_n\}$ чергуватимуть два числа: a_1 і a_2 . Отримуємо наступну послідовність:

$$\text{при } n \rightarrow \infty \quad x_{2n+1} \rightarrow a_1, \quad x_{2n} \rightarrow a_2, \quad \text{тобто } a_1 = f(a_2) \quad a_2 = f(a_1).$$

Відображення (3.128) у цьому випадку має стійкий цикл періоду 2 (рис. 3.66), який часто позначають як S_2 .

Якщо нерухому точку вважати циклом S_1 , то при $\lambda = 1 + \sqrt{5}$ відбувся перехід від S_1 до циклу S_2 – внаслідок біфуркації, яке має назву *біфуркація подвоєння періоду*.

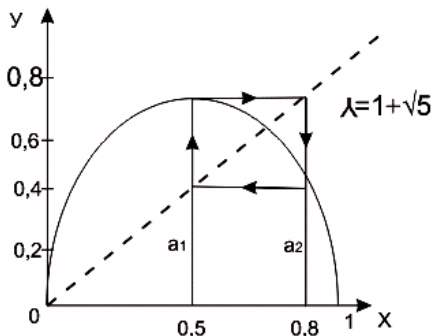


Рис. 3.66. Стійкість циклу періоду 2 при $\lambda > 2$

При подальшому збільшенні параметра λ виникає цикл S^4 , для якого $x_{4m} \rightarrow a_1$, $x_{4m+1} \rightarrow a_2$, $x_{4m+2} \rightarrow a_3$, $x_{4m+3} \rightarrow a_4$ при $m \rightarrow \infty$, причому $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, $a_4 = f(a_3)$, $a_1 = f(a_4)$, тобто чисельність популяції тепер змінюється з періодичністю в чотири роки.

7.5. Фрактали і фрактальний аналіз складних процесів

Фрактальний аналіз успішно застосовується для опису хаотичної поведінки нелінійних динамічних і дисипативних систем (у тому числі в економіці – для аналізу коливань фінансових змінних, наприклад, курсу валют і т. ін.). Поняття «фрактал» було введено французьким математиком польського походження Бенуа Мандельбротом у 1975 р.

Фрактал – самоподібна множина (об'єкт). Фрактальна крива є недиференційовною. Історія розвитку ідей фрактальної геометрії тісно пов'язана з іменами таких відомих математиків, як Вейерштрас, Кантор, Пеано, Хаусдорф, Безікович, Кох, Серпінський, Г. Жуліано, П. Фату та ін.

Ідеї фрактальної геометрії допомагають вивчати багато складних і загадкових явищ і процесів, в яких є нерегулярності, хаотичності, непередбачуваності і т. ін. У наш час фрактали і мультифрактали стрімко вторгаються до багатьох галузей фізики, біології, медицини, соціології, економіки і т. д.

Методи обробки зображень та розпізнавання образів, які викорис-

товують нові алгоритми, надають можливість дослідникам застосовувати цей математичний апарат для кількісного опису великої кількості природних об'єктів і структур.

Більш детальну інформацію про фрактали і мультифрактали можна знайти в джерелах, наведених у переліку літератури в кінці цього посібника, зокрема у списку інтернет-ресурсів.

7.5.1. Регулярні фрактали

Фракталами називаються геометричні об'єкти: лінії, поверхні, просторові тіла дуже порізаної форми, які мають властивість самоподібності.

Відзначимо, що властивість точної самоподібності характерна лише для регулярних фракталів. Якщо замість детермінованого способу побудови (створення) включати в алгоритм певний елемент випадковості, то виникають так звані випадкові фрактали. Основна їхня відмінність від регулярних полягає в тому, що властивість самоподібності справедлива тільки після відповідного усереднення за всіма статистичними незалежними реалізаціями об'єкта. При цьому збільшена частина фрактала не точно ідентична початковому фракталу, але їхні статистичні характеристики співпадають.

Зауважимо, що властивості природних фракталів спостерігаються лише на певних масштабах довжиною l , що задовольняють певному співвідношенню $l_{min} \ll l \ll l_{max}$, тобто за межами цього співвідношення властивість самоподібності зникає.

Визначимо, для прикладу, довжину берегової лінії між точками А і В (рис. 3.67).

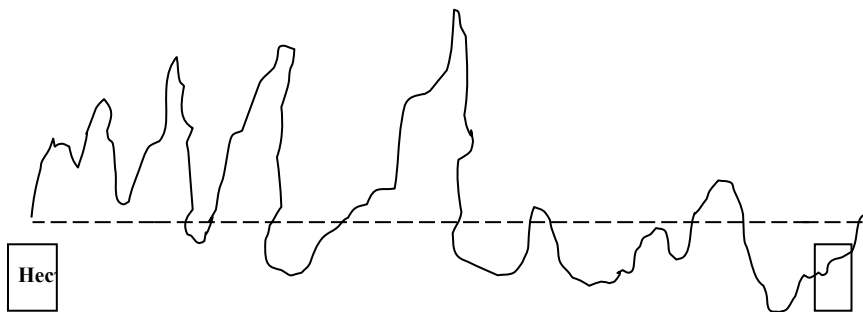


Рис. 3.67. Довжина берегової лінії

Нехай l – певний масштаб (шаблон), а L – довжина берегової лінії. Тоді довжина L не наближається до кінцевої границі (при $l \rightarrow 0$), а

збільшується за степеневим законом $L \approx l \cdot \left(\frac{R}{l}\right)^D$, де R – довжина відрізка $[A, B]$, а $D > 0$ – фрактальна розмірність.

При цьому кількість необхідних кроків становить $N = L/l$, або $N \approx (R/l)^D$, тобто при $l \rightarrow 0$ довжина берегової лінії необмежено зростає. Ця обставина різко відрізняє фрактальну криву від звичайної гладкої кривої, для якої границя довжини апроксимовної ламаної L при наближенні до нуля довжини її ланки l є скінченною. Для гладкої кривої її фрактальна розмірність $D = 1$, тобто співпадає з топологічною.

За досить незначних l величина $N(l)$ змінюється з l за степеневим законом:

$$N(l) \approx \frac{1}{l^D} = \left(\frac{1}{l}\right)^D,$$

де D – хаусфордова, або фрактальна розмірність об'єкта.

Отже,

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l} =$$

це загальне визначення фрактальної розмірності D , і ця величина є локальною характеристикою об'єкта.

7.5.2. Мультифрактали

Мультифрактали (МФ) – неоднорідні фрактальні об'єкти, для повного опису яких, на відміну від регулярних фракталів, недостатньо введення лише однієї величини – його фрактальної розмірності (ФР) D , а необхідний цілий спектр таких розмірностей, кількість яких є нескінченною.

Причина цього полягає в тому, що поряд із суто геометричними характеристиками, які визначаються величиною D , такі фрактали мають і деякі статистичні властивості. При цьому основна властивість фрактала – самоподібність – зберігається.

Розподіл точок (заселеність) по МФ є нерівномірним, а ФР D залишається при цьому незмінною, тобто такою, якою вона була для регулярного фрактала (одновимірного фрактала). Під словом «неоднорідний» ми розуміємо нерівномірний розподіл точок множини на фракталі.

7.5.3. Фрактальна розмірність

Узагальнені *фрактальні розмірності* D_q . Розглянемо фрактальний об'єкт, що займає певну обмежену область Ω розміру L в евклідовому

просторі R^n , тобто $\Omega \supset R^n$. Нехай цей фрактальний об'єкт є множиною з $N \gg 1$ точок, якимось чином розподілених у цій області Ω .

Розподілимо всю область на кубічні комірки I зі стороною $\varepsilon \ll L$ і ємністю ε^n . Надалі нас будуть цікавити тільки зайняті комірки, в яких є хоча б одна точка.

Нехай номер зайнятих комірок I змінюється як $i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$, де $N(\varepsilon)$ – сумарна кількість зайнятих комірок, що залежить від розміру комірок ε .

Нехай $n_i(\varepsilon)$ – це кількість точок в i -ї комірці. Тоді величина

$$p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N} -$$

це ймовірність того, що навмання взята точка з нашої множини знаходиться в комірці I , тобто $p_i(\varepsilon)$ характеризує відносну заселеність

комірок. Зауважимо, що $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) = 1$.

Величину $Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon)$, що характеризується показником ступеня q , який може набувати будь-яке значення на інтервалі $-\infty < q < \infty$, назовемо узагальненою (частковою) статистичною сумою.

Спектр узагальнених ФР D_q , які характеризують такий розподіл точок в області Ω , визначається співвідношенням:

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1},$$

де функція $\tau(q)$ має вигляд

$$\tau(q) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}.$$

Якщо $D_q = D = \text{const}$, тобто не залежить від q , то ця множина точок є звичайним, регулярним (однорідним) фракталом, який характеризується лише однією величиною – ФР D . І навпаки, якщо D_q змінюється щодо q , множина точок, що розглядається, є МФ.

Отже, МФ у загальному випадку характеризується певною нелінійною функцією $\tau(q)$, якою визначається поведінка узагальненої ста-

тистичної суми $Z(q, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, тобто $Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}$ (оскільки $\tau(q) \approx \ln Z(q, \varepsilon) / \ln \varepsilon$).

Зауважимо, що для звичайного регулярного фрактала $n_i(\varepsilon) = \frac{N}{N(\varepsilon)}$, тобто фрактал є однорідним і $p_i(\varepsilon) = 1 / N(\varepsilon)$.

Отже, $Z(q, \varepsilon) = N^{1-q}(\varepsilon)$.

Врахуємо тепер, що, за визначенням ФР D , число зайнятих комірок за досить незначного ε поводитьсь таким чином:

$$N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D}.$$

Отже, у випадку звичайного фрактала функція

$$\tau(q) = (q-1)D$$

є лінійною щодо q і $D_q = D$ для всіх q , тобто це справедливо для монофрактала.

Інформаційна розмірність фрактала. З'ясуємо тепер, який фізичний зміст мають узагальнені фрактальні розмірності D_q для певних конкретних значень q (узагальнені ФР D_q нагадують узагальнені числа золотого перетину).

При $q = 0$ з визначення узагальненої статистичної суми випливає, що

$$Z(0, \varepsilon) = N(\varepsilon), \text{ оскільки } Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon).$$

З іншого боку, за формулою $Z(q, \varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}$ у цьому випадку ми отримуємо вираз

$$Z(0, \varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(0)} = \varepsilon^{-D_0}, \text{ оскільки } \tau(q) = (q-1)D,$$

де D_0 – фрактальна розмірність монофрактала.

Отже, $N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D_0}$, тобто D_0 є звичайною хаусдорфовою розмірністю множини Ω . Вона є найбільш грубою (середньою) характеристикою МФ і не містить інформації про його статистичні властивості (тобто про ступінь насиченості структури фрактала).

Нехай тепер $q = 1$. Тоді узагальнена статистична сума є

$$Z(1, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i = 1 \text{ і } \tau(1) = 0.$$

Таким чином, ми маємо невизначеність у виразі для $D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}$ цього типу $\left(\frac{0}{0}\right)$. Розкриємо цю невизначеність за відомим правилом Лопітала.

Для цього розглянемо вираз вигляду:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \exp[(q-1) \ln p_i].$$

Розкладаючи \exp у ряд при $q \rightarrow 1$ і з урахуванням умов нормування ймовірностей $\{p_i\}$ отримуємо:

$$Z(q-1, \varepsilon) \cong \sum_1^{N(\varepsilon)} [p_i + (q-1) p_i \ln p_i] = 1 + (q-1) \sum_1^{N(\varepsilon)} \ln p_i.$$

У результаті маємо

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\left[\sum_1^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i \right]}{\ln \varepsilon} \text{ (оскільки } D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} \text{)}.$$

З точністю до знака чисельник у цій формулі є ентропією фрактальної множини Ω , тобто

$$S(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i.$$

Отже,

$$D_1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}.$$

Відзначимо, що величина ентропії $-S(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D_1}$, а величина D_1 характеризує інформацію, необхідну для визначення місцезнаходження точки в певній комірці. Тому узагальнену ФР D_1 часто називають *інформаційною розмірністю фрактала*. Вона показує, як інформація, необхідна для визначення положення точки, зростає при зменшенні розміру комірки ε до нуля.

Кореляційна розмірність фрактала. Нехай $q = 2$. Тоді узагальнена ФР набуде такого вигляду:

$$D_2 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2}{\ln \varepsilon}.$$

Визначимо парний кореляційний інтеграл як

$$I(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_n \sum_m \theta(\varepsilon - \|r_n - r_m\|),$$

де підсумовування здійснюється за всіма парами точок шуканої фрактальної множини з радіус-векторами r_n і r_m ; $\theta(x)$ – степенева функція Хевісайда: $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$ і $\theta(x) = 0$, якщо $x < 0$.

Суми у виразі для $I(\varepsilon)$ визначають число пар точок n, m , відстань між якими є меншою за ε . Тому, поділена на N^2 , вона визначає ймовірність того, що дві навмання взяті точки розділені відстанню меншою за ε .

Нагадаємо, що p_i – це ймовірність потрапляння точки в i -у комірку розміром ε . Отже, величина p_i^2 є ймовірністю потрапляння в цю комірку. Підсумовуючи її за всіма зайнятими комірками, ми отримуємо ймовірність того, що дві довільно вибрані точки з множини Ω знаходяться всередині однієї i -ї комірки розміром $\Omega \varepsilon$. Аналогічно, сума p_i^q за всіма зайнятими комірками, тобто узагальнена статистична сума $Z(q, \varepsilon)$, буде ймовірністю того, що q – довільно вибрані точки з множини Ω знаходяться всередині однієї i -ї комірки розміром (масштабом) ε .

Отже, з точністю до числових коефіцієнтів, з урахуванням виразу для D_2 , отримуємо:

$$I(\varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2 \approx \varepsilon^{D_2}.$$

Тобто узагальнена ФР D_2 визначає залежність для кореляційного інтеграла $I(\varepsilon)$ від ε у границі $\varepsilon \rightarrow 0$. Тому величину D_2 називають *кореляційною розмірністю*.

Зауважимо, що коли б точки, які складають мультифрактал, були розподілені на ньому рівномірно по всіх $N(\varepsilon)$ комірках з ймовірністю

$p_i(\varepsilon) = 1/N(\varepsilon)$, то ентропія такого розподілу була б максимальною і дорівнювала:

$$S_{max}(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i = \ln N(\varepsilon) \approx D_0 \ln \varepsilon.$$

Іншими словами, ця величина була б більшою за фактичну величину ентропії $S(\varepsilon)$ мультифрактала, розраховану для реального неоднорідного (нерівномірного) розподілу точок, тобто $S(\varepsilon) = -D_1 \ln \varepsilon$.

Отже, інформаційна розмірність мультифрактала D_1 завжди менша або дорівнює його хаусдорфовій розмірності D_0 , тобто $D_1 \leq D_0$.

У загальному випадку можна довести, що $D_q \geq D_{q'}$ при $q' > q$.

Знак рівності має місце, наприклад, для однорідного фрактала. Це означає, що максимальних значень $D_{max} = D_{-\infty}$ величина D_q досягає при $q \rightarrow -\infty$, а мінімальних $D_{min} = D_{\infty}$ – при $q \rightarrow \infty$.

Величина D_q завжди монотонно зменшується (або, в крайньому разі, залишається постійною) з ростом q (див. рис. 3.68).

У цілому $D_T \geq D_0 \geq D_1 \geq D_2 \geq \dots$, де D_T – топологічна (евклідова) розмірність; D_0 – хаусдорфова (традиційна) ФР; D_1 – інформаційна (ентропійна) ФР; D_2 – кореляційна розмірність мультифрактала.

Нагадаємо, що

$$D_0 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}; \quad D_1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \quad S(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i;$$

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum p_i^2}{\ln \varepsilon} \approx \frac{\ln I(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \quad I(\varepsilon) - \text{кореляційний інтеграл.}$$

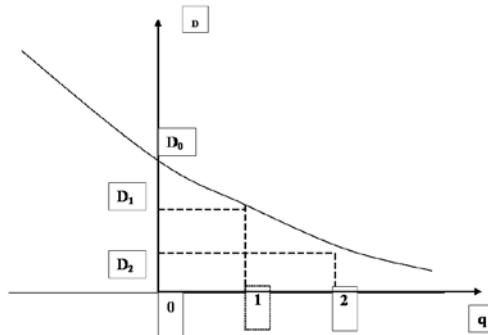


Рис. 3.68. Залежність набору узагальнених фрактальних розмірностей D_q від q

7.5.4. Спектральна функція $f(w)$ мультифракталу. Спектр фрактальних розмірностей

Отже, нехай є якийсь мультифрактал (МФ), тобто об'єкт (множина), що являє собою неоднорідний фрактал. Для його опису ми маємо набір узагальнених фрактальних розмірностей (ФР) D_q $-\infty < q < \infty$. Однак величини D_q не є, строго кажучи, ФР у загальноприйнятому розумінні цього слова. Тому вони й називаються узагальненими розмірностями.

Часто разом з ними для характеристики мультифрактальної множини використовують так звану функцію мультифрактального спектра (ФМС) $f(w)$ (спектр сингулярності, тобто порізаності форми МФ), до якої більше підходить термін ФР.

Можна показати, що величина $f(w)$ фактично дорівнює хаусдорфовій розмірності якоїсь однорідної фрактальної підмножини Ω_0 з початкової множини Ω , що забезпечує домінуючий внесок у статистичну суму Z при заданому q .

Однією з основних характеристик МФ є набір ймовірностей $\{p_i\}$, що показують відносну заселеність комірок масштабу ε , якими ми покривали цю множину. Для самоподібних множин залежність p_i від розміру комірки ε має степеневий характер:

$$p_i(\varepsilon) \approx \varepsilon^{w_i},$$

де w_i – певний, якийсь показник ступеня (загалом різний для різних i).

Відомо, що для регулярного (однорідного) фрактала всі показники ступеня w_i однакові і дорівнюють ФР D , тобто

$$p_i = 1 / N(\varepsilon) \cong \varepsilon^D.$$

У нашому випадку узагальнена статистична сума має вигляд

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) = N(\varepsilon) \varepsilon^{D_q} \approx \varepsilon^{D(q-1)}.$$

Тому $\tau(q) = D(q-1)$ і всі узагальнені ФР $D_q = D$ у цьому випадку співпадають і не залежать від q .

Однак для такого більш складного об'єкта, як мультифрактал, унаслідок його неоднорідності, ймовірності заповнення комірок p_i у загальному випадку є неоднаковими, і показник ступеня w_i для різних комірок може набувати різних значень. Типовою є ситуація, коли ці значення безперервно заповнюють певний замкнутий інтервал

$[w_{min}, w_{max}]$, причому

$$p_{min} \approx \varepsilon^{w_{max}}, \quad p_{max} \approx \varepsilon^{w_{min}}.$$

Нагадаємо, що

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad \text{і} \quad Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon).$$

Тоді

$$\frac{d\tau}{dq} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q \ln p_i / \left[\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q \right) \ln \varepsilon \right].$$

Якщо похідна $d\tau/dq$ не є постійною і змінюється залежно від q , то це означає, що ми маємо справу з мультифракталом.

Отже, у нашому випадку можна отримати таке співвідношення:

$$\tau(q) \approx q^{D_{\pm\infty}} \quad \text{при} \quad q \rightarrow \pm\infty,$$

$$\text{тобто} \quad \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow +\infty} = D_{\infty} = w_{min}, \quad \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty} = D_{-\infty} = w_{max}.$$

Іншими словами, інтервал можливих значень w визначається граничними значеннями (при $q \rightarrow \pm\infty$) узагальненої ФР D_q , тобто $D_{\infty} \leq w \leq D_{-\infty}$.

Який розподіл ймовірностей різних значень w_i ?

Нехай імовірність того, що w_i знаходяться в інтервалі від w до $w + dw$, є $p(w) dw$, тобто $p(w) dw$ – це відносне число комірок I , які мають однакову міру p_i з w_i , що лежить у цьому інтервалі.

Якщо ми маємо справу з монофракталом, для якого всі w_i однакові (і дорівнюють ФР D), це число, очевидно, є пропорційним загальній кількості комірок $N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D}$ і степеневно залежне від розміру комірки ε . Показник ступеня тут визначається фрактальною розмірністю множини D .

А ось для МФ це не так, і різні значення w_i зустрічаються з ймовірністю, яка характеризується не однакою величиною D , а різними (залежно від w) значеннями показника ступеня $f(w)$:

$$p(w) \approx \varepsilon^{-f(w)}.$$

Отже, фізичний зміст функції $f(w)$ полягає в тому, що вона є хаусдорфовою розмірністю деякої однорідної фрактальної підмножини $\Omega_w \subset \Omega$, яка характеризується однаковими ймовірностями запов-

нення комірок $p_i \approx \varepsilon^w$. Оскільки ФР підмножини явно завжди менша або дорівнює ФР вихідної множини, то має місце нерівність, важлива для спектра $f(w)$:

$$f(w) \leq D.$$

Це означає, що набір різних значень функції $f(w)$ (при різних w) є спектром фрактальних розмірностей (СФР) однорідних підмножин Ω_w , на які можна розбити початкову множину Ω .

Звідси стає зрозумілим термін «мультифрактал» (МФ).

Так, МФ $\Omega = \bigcup_w (\Omega_w | f(w))$, тобто МФ є об'єднанням різних однорідних фрактальних підмножин $\Omega_w \subset \Omega$, кожна з яких має своє значення ФР $f(w)$. Оскільки будь-якій підмножині належить лише частина від загального числа комірок $N(\varepsilon)$ (усього покриття, на якому ми розподілили вихідну множину Ω), умова нормування ймовірностей не буде виконуватися при підсумовуванні тільки з цієї підмножини комірок. Сума цих ймовірностей виявляється меншою за 1:

$$\sum_{i=1}^{N'(\varepsilon)} p_i \leq 1 \quad \text{при} \quad N'(\varepsilon) \leq N(\varepsilon).$$

Тому можна отриматитаку важливу нерівність:

$$f(w) \leq w.$$

Для монофракталу $f(w) = w = D_0$.

7.5.5. Перетворення Лежандра (ПЛ)

Встановимо зв'язок функції спектра $f(w)$ з функцією $\tau(q)$. Обчислимо статистичну суму $Z(q, \varepsilon)$. Для цього візьмемо ймовірності $p_i \approx \varepsilon^{w_i}$ і перейдемо від підсумовування за I до інтегрування за w зі щільністю ймовірності $p(w) \approx \varepsilon^{-f(w)}$. Одержимо:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \int \varepsilon^{q \cdot w} p(w) dw \approx \int \varepsilon^{qw - f(w)} dw.$$

Оскільки величина ε дуже мала, то основний внесок у цей інтеграл дадуть ті значення w , за яких показник ступеня $[qw - f(w)]$ виявля-

ється мінімальним (а, відповідно, підінтегральна функція – максимальною).

Умови мінімальності показника визначаються співвідношеннями:

$$\frac{d}{dw} [qf(w)] \Big|_{w=w(q)} = 0, \quad \frac{d^2}{dw^2} [qw - f(w)] \Big|_{w=w(q)} > 0.$$

У результаті відзначимо, що величина $w(q)$ неявно визначається з рівняння $q = df(w)/dw$ і функція $f(w)$ є скрізь опуклою $f''(w) > 0$.

Підставляючи отримане значення $w(q)$ у початковий інтеграл, одержуємо вираз:

$$Z(q, \varepsilon) \approx \varepsilon^{q \cdot w(q) - f(w(q))}.$$

Це означає, що величина $f(w(q))$ дійсно визначає ФР тієї підмножини $\Omega_{w(q)}$, що дає домінуючий внесок у статистичну суму при заданому показнику ступеня q .

Тепер, з огляду на те що $Z(q, \varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}$, отримаємо вираз:

$$\tau(q) = q \cdot w(q) - f(w(q)).$$

Тоді

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} = \frac{1}{q-1} [qw(q) - f(w(q))].$$

Отже, якщо ми знаємо функцію мультифрактального спектра $f(w)$, тоді можна знайти D_q . І навпаки, знаючи D_q , – обчислити залежність $w(q)$:

$$w(q) = \frac{d}{dq} [(q-1)D_q],$$

і після цього знайти залежність $f(w(q))$ відносно D_q .

Це означає, що співвідношення $w = d\tau/dq$, $f(w) = q \cdot \frac{d\tau}{dq} - \tau$ є прямими перетвореннями Лежандра від змінних $\{q, \tau(q)\}$ до змінних $\{w, f(w)\}$.

Зворотне перетворення Лежандра визначається за формулами:

$$q = df/dw, \quad \tau(q) = w \frac{df}{dw} - f(w).$$

Відзначимо також, що $\frac{d^2 f}{dw^2} = \left(\frac{d^2 \tau}{dq^2} \right)^{-1}$.

Максимум функції $f(w)$ дорівнює величині D_0 , тобто це є розмірність монофрактала (рис. 3.69).

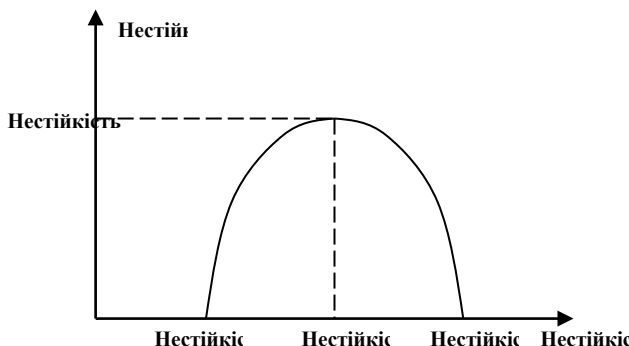


Рис. 3.69. Вигляд функції мультифрактального спектра

Функція $f(w)$ поблизу свого максимуму може бути апроксимована

параболою: $f(w) \approx D_0 - \frac{(w - w_0)^2}{2[2(w_0 - D_0) + D''_{q=0}]}$. При цьому

$$D_1 = w(1) = f(w(1)) \text{ і } D_2 = 2w(2) - f(w(2)).$$

7.5.6. Фрактальний аналіз складних економічних процесів на основі статистики Херста

Нижче буде показано важливість і простоту застосування статистики (показника) Херста для аналізу економічних процесів і часових рядів, зокрема для аналізу фінансових часових рядів.

Як зазвичай люди приймають рішення? Дехто реагує на інформацію відразу після її отримання, однак більшість людей чекають підтвердження і нічого не починають доти, доки тренд не стане вочевидь усталеним. Для підтвердження дійсності тренду необхідна певна кількість підтвердженої інформації, однак нерівномірність її засвоєння може стати причиною зміщених випадкових блукань. Останні широко вивчалися Херстом у 40-х рр. і Мандельбротом у 60–70-х рр. XX ст. Мандельброт назвав їх узагальненим броунівським рухом. У наш час ми можемо назвати їх фрактальними часовими рядами.

Показник Херста. При створенні моделі Херстом було висунуто загальне припущення про те, що некерована частина досліджуваного процесу дотримується «випадкових блукань». Це звичайне припущення, що висувається стосовно великих систем із багатьма ступенями вільності. Коли Херст вирішив перевірити це припущення, він у результаті дав нам нову статистику – показник Херста (H). Цей показник має широке застосування в аналізі часових рядів завдяки своїй чудовій стійкості. Він містить мінімальні припущення про досліджувану систему і може класифікувати часові ряди, а також відрізнити випадковий ряд від не випадкового, навіть якщо випадковий ряд не гаусовський (тобто не нормально розподілений). Херст виявив, що більшість природних систем не дотримуються «випадкового блукання» – гаусовського або якогось іншого.

Херст вимірював коливання рівня води в резервуарі відносно середнього значення з часом. Можна було очікувати, що діапазон цих флуктуацій буде змінюватися залежно від величини часового проміжку вимірів. Якщо ряд випадковий, розмах буде збільшуватися пропорційно кореневі квадратному з часу. Для калібрування цих часових вимірів Херст увів безрозмірне відношення – шляхом ділення розмаху на стандартне відхилення спостережень. Цей спосіб аналізу став називатися методом нормованого розмаху (R/S -аналіз). Херст показав, що більшість природних явищ, включаючи річкові стоки, температури, опади, сонячні плями, впливають зі «зміщеного випадкового блукання» – тренду із шумом. Сила тренду і рівень шуму можуть бути оцінені тим, як змінюється нормований розмах з часом, або, іншими словами, наскільки величина H перевищує значення 0.5.

Ми маємо намір поширити метод Херста вивчення часових рядів природних явищ на часові ряди в економіці та на фінансових ринках, щоб з'ясувати, чи є ці ряди також зміщеними випадковими блуканнями. Для переформулювання положень у праці Херста стосовно загальнених часових рядів ми повинні насамперед визначити розмах, який був би порівнянний з коливаннями рівня в резервуарі:

$$X_{t,N} = \sum_{u=1}^t (e_u - M_N), \quad (3.130)$$

де $X_{t,N}$ – накопичене відхилення за N періодів;

e_u – приплив у році u ;

M_N – середнє e_u за N періодів.

Тоді розмах стає різницею між максимальним і мінімальним рівнями, досягнутими в (3.130),

$$R = \max(X_{t,N}) - \min(X_{t,N}), \quad (3.131)$$

де R – розмах відхилення X ;

$\max(X)$ – максимальне значення для X ;

$\min(X)$ – мінімальне значення для X .

Для порівняння різних типів часових рядів Херст поділив цей розмах на стандартне відхилення початкових спостережень. Цей «нормований розмах» повинен зростати з часом. Херст увів таке співвідношення:

$$R / S = (\alpha * N)^H, \quad (3.132)$$

де R/S – нормований розмах;

N – кількість спостережень;

α – константа;

H – показник Херста.

Відповідно до статичної механіки, показник H повинен дорівнювати 0.5, якщо ряд є «випадковим блуканням». Іншими словами, розмах накопичених відхилень має зростати пропорційно квадратному кореневі з часу N . Коли Херст застосував свою статистику до запису стоків Нілу, то знайшов, що $H = 0.9$! Він випробував інші ряди. Значення H було, як правило, більше за 0.5. Щодо інших природних явищ в усіх випадках Херст отримував H теж більше за 0.5. Про що це свідчить?

Коли H відрізняється від 0.5, це означає, що спостереження не є незалежними. Кожне спостереження «тримає в пам'яті» всі попередні події. Це не короткочасна пам'ять, яку часто називають «марковською», це інша пам'ять – довгострокова, яка теоретично зберігається назавжди. Недавні події чинять вплив більший, ніж події віддалені, але залишковий вплив останніх завжди відчутний. У довгостроковому масштабі система, що дає статистику Херста, є результатом тривалого потоку взаємозалежних подій. Те, що трапляється сьогодні, впливає на майбутнє. Те, де ми знаходимося тепер, визначається тим, де ми були в минулому. Час виявляється важливим фактором. Подібно до того, як галька захоплюється поточною водою, сьогоднішні події спрямовуються в майбутнє. Сила цього прагнення поступово слабшає – доти, доки всі його цілі та наміри не зводяться до нуля.

Включення «стріли часу» не можливе в стандартній економетриці, яка вважає ряди інваріантними відносно часу. Вплив сьогодення на майбутнє може бути вираженим кореляційним співвідношенням:

$$C = 2^{2H-1} - 1, \quad (3.133)$$

де C – міра кореляції;

H – показник Херста.

На основі статистики (показника) Херста можна виділити три класи часових рядів (випадкових процесів):

1) $H = 0.5$; 2) $0 \leq H < 0.5$; 3) $0.5 < H < 1.0$.

Стисло опишемо їх.

Величина H , що дорівнює 0.5, вказує на суто випадковий ряд, тобто події випадкові та некорельовані. Права частина виразу (3.133) обертається в нуль. Сьогодення не впливає на майбутнє. Функція щільності ймовірності може бути нормальною кривою, однак це не обов'язкова умова. R/S-аналіз може класифікувати довільний ряд, безвідносно до того, який вид розподілу йому відповідає. Статистика стверджує, що природа дотримується нормального розподілу. Відкриття Херста це положення спростовує. Показник H , як правило, буває більшим за 0.5, а ймовірнісні розподіли не є нормальними.

Перед тим як вивчити цей клас, варто коротко розглянути випадок $0 \leq H < 0.5$. Цей діапазон відповідає антиперсистентним, або ергодичним рядам. Такий тип системи часто називають «повернення до середнього». Якщо система демонструє зростання у попередньому періоді, тоді швидше за все в наступному розпочнеться спад. І навпаки, якщо відбувалося зниження, тоді ймовірний близький підйом. Стійкість такої антиперсистентної поведінки залежить від того, наскільки H близький до нуля. Чим ближче його значення до нуля, тим ближче C у рівнянні (3.133) до -0.5 , або до від'ємної кореляції. Такий ряд більш мінливий (або волатильний), ніж ряд випадковий, тому що складається з частих реверсів «спад – підйом». Попри широке поширення концепції повернення до середнього в економічній і фінансовій літературі, досі було знайдено мало антиперсистентних рядів.

При $0.5 < H < 1.0$ ми маємо персистентні, або трендостійкі ряди.

Якщо ряд зростає (зменшується) у попередньому періоді, тоді ймовірно, що він буде зберігати цю тенденцію певний час і в майбутньому. Тренди очевидні. Трендостійкість поведінки, або сила персистентності, збільшується при наближенні H до одиниці, або 100 % кореляції, у співвідношенні (3.133). Чим ближче H до 0.5, тим більше за-

шумлено ряд і тим менш виражений його тренд. Персистентний ряд – це *узагальнений броунівський рух*, або *зміщені випадкові блукання*. Сила цього зміщення залежить від того, наскільки H більше 0.5.

Персистентні часові ряди є цікавішим класом, оскільки з'ясувалося, що вони не тільки достатньо представлені в природі – це відкриття належить Херсту, – але й властиві ринкам капіталу. Що ж є причиною персистентності? Чому ряди мають ефект пам'яті?

Фрактальна природа показника H . Персистентний часовий ряд, визначений для $0.5 < H \leq 1.0$, є фракталом, оскільки може бути описаний як узагальнений броунівський рух. У цьому русі існує кореляція між подіями на часовій шкалі. Внаслідок цього ймовірність двох подій, що впливають одна з другої, не «50 на 50». Показник Херста H описує таку ймовірність, за якої дві події, що відбуваються послідовно, можуть бути однаковими. Якщо $H = 0.6$, тоді існує, в принципі, велика ймовірність того, що якщо попередній рух був невід'ємним, то він і залишиться невід'ємним ще деякий час. Це не істинна ймовірність, це просто міра «зміщення».

Оскільки точки (події) часового ряду не є рівноймовірнісними (тому що породжуються «випадковим блуканням»), фрактальна розмірність ймовірнісного розподілу не дорівнює 2 – її величина лежить у діапазоні від 1 до 2. Мандельброт (1972) показав, що величина, зворотна H , є фрактальною розмірністю. «Випадкове блукання» при $H = 0.5$ повинно мати фрактальну розмірність, що дорівнює 2. Якщо $H = 0.7$, тоді ця розмірність дорівнює $1/0.7$, або 1.43. Відзначимо, що «випадкове блукання» насправді є двовимірним і цілком заповнює площину.

Емпіричний розрахунок статистики Херста. Херст запропонував також формулу для оцінки величини H за значенням R/S :

$$H = \log(R/S) / \log(n/2), \quad (3.134)$$

де n – кількість спостережень.

У цій формулі передбачається, що константа a зі співвідношення (3.132) дорівнює 0.50. Е. Федер показав, що цей емпіричний закон має тенденцію перебільшувати H , коли воно більше 0.7, і навпаки, применшувати, якщо $H \leq 0.4$, однак для коротких рядів, де регресія неможлива, цей емпіричний закон може бути використаний як розумне наближення.

Фрактальна розмірність і статистика Херста. Фрактальна розмірність часового ряду, або накопичених змін при «випадковому блу-

канні», дорівнює 1.5, фрактальна розмірність кривої лінії – 1, а геометричної площини – 2. Отже, фрактальна розмірність «випадкового блукання» лежить ніби на півдорозі між кривою лінією і площиною. Показник Херста може бути перетворений у фрактальну розмірність за допомогою наступної формули:

$$D = 2 - H. \quad (3.135)$$

Отже, якщо $H = 0.5$, то $D = 1.5$. Обидві величини характеризують незалежну випадкову систему. Величина $0.5 < H \leq 1$ буде відповідати фрактальній розмірності, більш близькій до кривої лінії. Це, за термінологією Херста, персистентний часовий ряд, що дає більш гладку, менш зазубрену лінію, ніж «випадкове блукання». Антиперсистентна величина H ($0 < H < 0.50$) дає, відповідно, більш високу фрактальну розмірність і більш переривчасту лінію, ніж «випадкове блукання», і отже, характеризує систему, яка більше схильна до змін. Це чітко відповідає антиперсистентному часовому ряду.

РОЗДІЛ IV

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В НЕЛІНІЙНОМУ АНАЛІЗІ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

ГЛАВА 8. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В НЕЛІНІЙНОМУ АНАЛІЗІ

8.1. Технології аналізу інформації, синтезу і прийняття рішень у складних системах

З появою перших ЕОМ настав етап інформатизації різних сторін людської діяльності. Якщо раніше людина основну увагу надавала речовині, потім енергії, то сьогодні можна без перебільшення сказати, що розпочався етап усвідомлення процесів, пов'язаних з інформацією. Нині сучасні обчислювальні системи і комп'ютерні мережі дозволяють накопичувати великі масиви даних для розв'язання задач з обробки та аналізу. Однак машинна форма представлення даних містить інформацію, необхідну людині, у прихованому вигляді.

Щоб отримати ці знання, необхідно застосовувати спеціальні методи автоматичного аналізу, які допоможуть практично здобути необхідні дані із «завалів» інформації. За цим напрямом міцно закріпився термін «добування даних», або *Data mining*. Класичне визначення цього терміну дав у 1996 р. один із засновників напрямку – Григорій Пятецький-Шапіро. *Data mining* – це дослідження і виявлення машиною (алгоритмами, засобами штучного інтелекту) в сирих даних прихованих знань, які раніше не були відомі, нетривіальних, практично корисних, доступних для інтерпретації людиною.

Методи *Data mining* допомагають вирішити багато задач, з якими стикається аналітик. З них основними є: класифікація, регресія, пошук асоціативних правил і кластеризація.

Data mining – це мультидисциплінарна галузь, що виникла і розвивалася на базі таких наук, як прикладна статистика, розпізнавання образів, штучний інтелект, теорія баз даних та ін. (див. рис. 4.1).

Численність понять, які об'єдналися в *data mining*, а також різноманіття методів, що підтримують цю технологію, початківцю аналітику можуть нагадати мозаїку, частини якої мало пов'язані між собою.

Як же можна поєднати в одне ціле задачі, методи, дії, закономірності, застосування, дані, інформацію, розв'язки?

Розглянемо два потоки:

- 1) ДАНІ – ІНФОРМАЦІЯ – ЗНАННЯ І РІШЕННЯ;
- 2) ЗАДАЧІ – ДІЇ ТА МЕТОДИ РІШЕННЯ – ЗАСТОСУВАННЯ.

Ці потоки є «двома сторонами однієї медалі», відображенням одного процесу, результатом якого повинне стати знання і прийняття рішення.

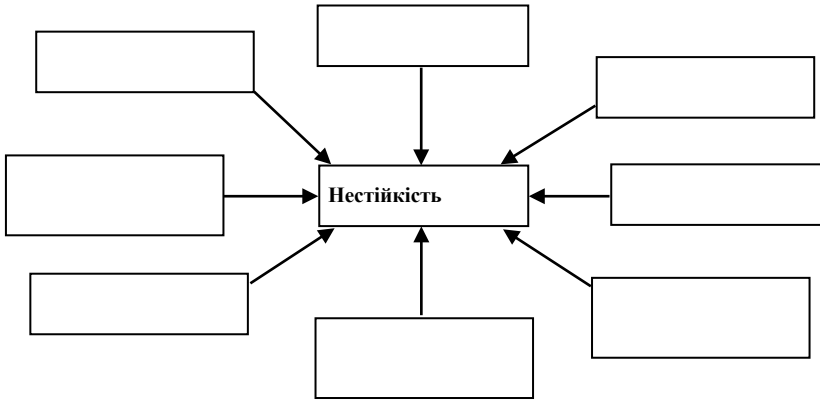


Рис. 4.1. Data mining як мультидисциплінарна галузь

Спершу розглянемо перший потік. На рис. 4.2 показано зв'язок понять «дані», «інформація» і «рішення», який виникає в процесі прийняття рішень. Як видно на рисунку, цей процес є циклічним. Прийняття рішень вимагає інформації, яка заснована на даних. Дані забезпечують інформацію, яка підтримує рішення, і т. д.

Розглянуті поняття є складовою частиною так званої інформаційної піраміди, в основі якої знаходяться дані, наступний рівень – це інформація, потім слідує рішення, а завершує піраміду рівень знання. З просуванням угору інформаційною пірамідою обсяги даних переходять у цінність рішень, тобто цінність для бізнесу.

Тепер підійдемо до цього ж процесу з іншого боку (рис. 4.3). Рисунок не претендує на повноту, зате відображає всі рівні, які охоплює Data mining.

Слід зазначити, що рівні аналізу (дані, інформація, знання) практично відповідають етапам еволюції аналізу даних, що відбувалася протягом останніх років.

Верхній – рівень застосувань – є рівнем бізнесу (якщо ми маємо справу із бізнесовою задачею), на ньому менеджери ухвалюють рішення. Наведено приклади застосувань: перехресні продажі, контроль якості, утримання клієнтів.

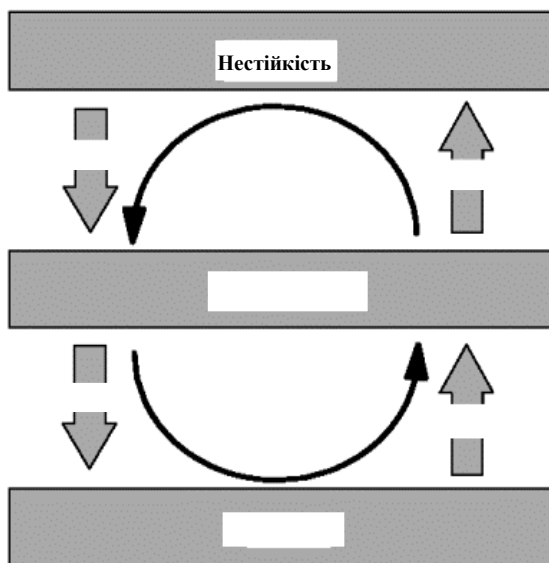


Рис. 4.2. Рішення, інформація і дані

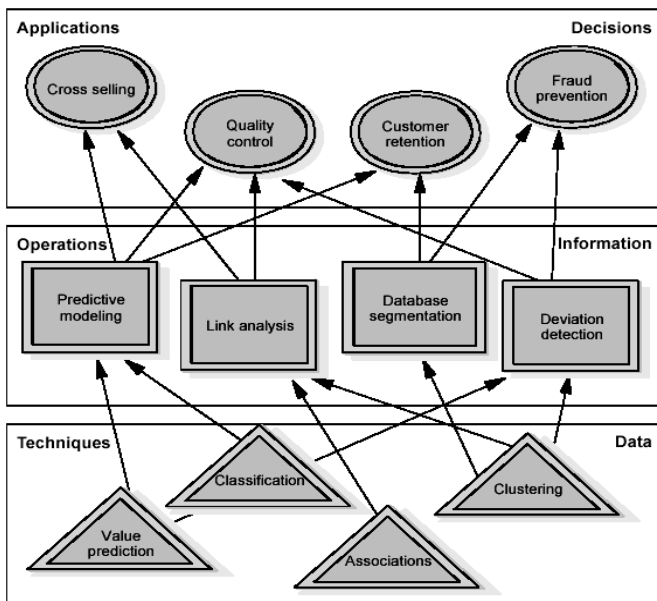


Рис. 4.3. Задачі, дії, застосування

Середній – рівень дій – за своєю суттю є рівнем інформації, саме на ньому виконуються дії Data mining; на рисунку показано такі дії: прогностичне моделювання, аналіз зв’язків, сегментація даних тощо.

Нижній – рівень визначення задачі data mining, яку необхідно розв’язати за наявними даними; на рисунку показано задачі: прогнозування числових значень, класифікація, кластеризація, асоціація.

Розглянемо таблицю, що демонструє зв’язок цих понять (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

Рівні Data mining

Рівень 3	застосування	утримання клієнтів	знання	data mining результат
Рівень 2	дії	прогностичне моделювання	інформація	метод аналізу
Рівень 1	задачі	класифікація	дані	запити

Нагадаємо, що для розв’язання задачі класифікації результати роботи першої стадії (індукції правил) застосовуються для віднесення нового об’єкта, більш-менш впевнено, до одного з відомих зумовлених класів на підставі відомих значень.

Розглянемо задачу утримання клієнтів (визначення надійності клієнтів фірми).

Перший рівень. Дані – база даних про клієнтів. Є дані про клієнта (вік, стать, професія, прибуток). Певна частина клієнтів, скориставшись продуктом фірми, залишилися їй вірною; інші клієнти більше не придбавали продукти фірми. На цьому рівні ми визначаємо тип задачі – це задача класифікації.

На *другому рівні* визначаємо дію – прогностичне моделювання. За допомогою прогностичного моделювання ми з певною мірою впевненості можемо віднести новий об’єкт, у нашому випадку – нового клієнта, до одного з відомих класів: він є постійним клієнтом або це, швидше за все, його разова покупка.

На *третьому рівні* ми можемо скористатися застосуванням для прийняття рішення. В результаті здобуття знань фірма може істотно знизити витрати – наприклад, на рекламу, знаючи наперед, яким із клієнтів слід активно розсилати рекламні матеріали.

Зупинимося на ще не розглянутому понятті інформації. Попри його поширеність, це поняття не завжди можна точно визначити і відрізнити від поняття «дані». Інформація, за своєю суттю, має багатогранну природу. З розвитком людства, особливо з розвитком комп’ютерних технологій, інформація набуває все нових і нових властивостей.

Звернемося до словника. Інформація (лат. *informatio*) – це:

- 1) будь-які повідомлення про що-небудь;
- 2) відомості, що є об'єктом зберігання, переробки і передачі (наприклад, генетична інформація);
- 3) у математиці (кібернетиці) – кількісна міра усунення невизначеності (ентропія), міра організації системи;
- 4) у теорії інформації – розділ кібернетики, що вивчає кількісні закономірності, які пов'язані зі збором, передачею, перетворенням і обчисленням інформації.

Інформація – будь-які, не відомі раніше відомості про якусь подію, сутність, процес і т. ін. – є об'єктом певних операцій, для яких існує змістова інтерпретація.

Під операціями тут мається на увазі сприйняття, передача, перетворення, зберігання і використання. Для сприйняття інформації необхідна якась сприймаюча система, що може інтерпретувати її, перетворювати, визначати відповідність певним правилам і т. ін. Отже, поняття інформації слід розглядати тільки за наявності джерела й отримувача інформації, а також каналу зв'язку між ними.

Властивості інформації

1. *Повнота інформації.* Ця властивість характеризує якість інформації і визначає достатність даних для прийняття рішень, тобто інформація повинна містити весь необхідний набір даних.

Приклад. «Продажі товару А почнуть скорочуватися» – ця інформація неповна, оскільки невідомо, коли саме вони почнуть скорочуватися.

Приклад повної інформації. «Починаючи з першого кварталу, продажі товару А почнуть скорочуватися» – цієї інформації достатньо для прийняття рішень.

2. *Достовірність інформації.* Інформація може бути достовірною і недостовірною. У недостовірній інформації наявний інформаційний «шум», і чим він вищий, тим нижчою є достовірність інформації.

3. *Цінність інформації.* Цінність інформації не може бути абстрактною. Інформація повинна бути корисною і цінною для певної категорії користувачів.

4. *Адекватність інформації.* Ця властивість характеризує ступінь відповідності інформації реальному, об'єктивному стану. Адекватна інформація – це повна і достовірна інформація.

5. *Актуальність інформації.* Інформація має бути актуальною, тобто не застарілою. Ця властивість характеризує ступінь відповідності інформації дійсному моменту часу.

6. *Ясність інформації.* Інформація має бути зрозумілою для того кола осіб, якому вона призначена.

7. *Доступність інформації*. Доступність характеризує міру можливості отримати певну інформацію. На цю властивість впливають одночасно доступність даних і доступність адекватних методів.

8. *Суб'єктивність інформації*. Інформація має суб'єктивний характер, вона визначається мірою сприйняття суб'єкта (одержувача інформації).

Вимоги, які ставляться до інформації:

1. Динамічний характер інформації. Інформація існує тільки в момент взаємодії даних і методів, тобто в момент інформаційного процесу. Решту часу вона перебуває в стані даних.

2. Адекватність методів, що використовуються. Інформація отримується з даних. Проте в результаті використання одних і тих же даних може з'являтися різна інформація. Це залежить від адекватності вибраних методів обробки початкових даних.

Дані, за своєю суттю, є об'єктивними, а методи – суб'єктивними: в основі останніх лежать алгоритми, суб'єктивно складені та підготовлені. Отже, інформація виникає та існує в момент діалектичної взаємодії об'єктивних даних і суб'єктивних методів.

Для бізнесу інформація є вихідною складовою прийняття рішень.

Усю інформацію, яка виникає в процесі функціонування бізнесу та управління ним, можна класифікувати певним чином. Залежно від джерела отримання, інформацію розділяють на внутрішню і зовнішню (наприклад, інформація, що описує явища, які відбуваються за межами фірми, але безпосередньо її стосуються).

Також інформація може бути класифікована на фактичну і прогнозну. До *фактичної інформації* про бізнес належить інформація, що характеризує факти, які відбулися; вона є точною. *Прогнозна інформація* – це та, що розраховується або передбачається, тому її не можна вважати точною, вона може мати певну похибку.

Знання – сукупність фактів, закономірностей та евристичних правил, за допомогою яких розв'язується поставлена задача.

Отже, формування інформації здійснюється в процесі збору і передачі, тобто обробки даних. Яким же чином з інформації отримують знання?

Все частіше істинні знання утворюються на основі розподілених взаємозв'язків різномірної інформації. Якщо інформація зібрана і передана для отримання вочевидь наперед не визначеного результату, то ви отримуєте знання. Сама по собі інформація «в чистому вигляді» не має сенсу. Звідси випливає висновок, що інформація – це чиєсь тактичне знання, передаване у вигляді символів і за допомогою якихось прикладних засобів.

За визначенням Денхема Грея, «знання – це абсолютне викорис-

тання інформації і даних, разом з потенціалом практичного досвіду людей, здібностями, ідеями, інтуїцією, переконаністю і мотиваціями».

Для того щоб упевнено оперувати поняттями «інформація», «дані», «знання», необхідно не тільки розуміти суть цих понять, але й усвідомити відмінності між ними. Проте лише інтуїтивної інтерпретації цих понять тут недостатньо. Складність розуміння відмінностей вищезазначених понять – в їхній нібито синонімічності. Пригадаймо, що поняття data mining перекладається на українську мову за допомогою цих же трьох понять: як здобування даних, «витягання» інформації, «розкопування» знань.

Щоб з'ясувати різницю, розглянемо використання цих трьох понять на простому прикладі.

Спершу спробуємо розібратися в цих термінах на простих прикладах.

1. Студент, який складає іспит, потребує даних.
2. Студент, який складає іспит, потребує інформації.
3. Студент, який складає іспит, потребує знань.

При розгляді першого варіанту – студент потребує даних – виникає думка, що студентові потрібні дані, наприклад, для обчислень. Інформацією в другому варіанті може виступати конспект або підручник. Унаслідок їх використання студент отримує лише інформацію, яка в певних випадках може перейти в знання. Третій варіант звучить найбільш логічно.

Інформація, на відміну від даних, має сенс.

Поняття «інформація» і «знання», з філософської точки зору, є поняттями більш високого рівня, ніж «дані», яке виникло відносно недавно.

Поняття «інформація» безпосередньо пов'язане з суттю процесів усередині інформаційної системи, тоді так поняття «знання» швидше орієнтоване на якість процесів. Поняття «знання» тісно пов'язане з процесом прийняття рішень.

Попри відмінності, розглянуті поняття, як уже наголошувалося, не є розрізненими і незв'язаними. Вони є частиною одного потоку: біля його витоку знаходяться дані, у процесі передачі яких виникає інформація, а в результаті використання інформації, за певних умов, виникають знання.

Під час руху вгору інформаційною пірамідою обсяги даних переходять у цінність знань. Проте великі обсяги даних зовсім не означають і, тим більше, не гарантують отримання знань. Існує певна залежність цінності отриманих знань від якості та потужності процедур обробки даних. Типовим прикладом інформації, яку не можна перетворити на знання, є текст іноземною мовою. За відсутності словника і перекладача ця інформація взагалі не має цінності, вона не може перейти в

знання. За наявності словника процес переходу від інформації до знання можливий, але тривалий і трудомісткий. За наявності перекладача інформація дійсно переходить у знання.

Отже, для отримання цінних знань необхідні якісні процедури обробки. Процес переходу від даних до знань займає багато часу і дорого коштує. Тому очевидно, що технологія Data mining з її могутніми і різноманітними алгоритмами є інструментом, за допомогою якого, сходячи інформаційною пірамідою, ми можемо отримувати дійсно якісні та цінні знання.

Базові методи Data mining

До базових методів Data mining прийнято відносити передусім алгоритми, засновані на переборі. Простий перебір усіх досліджуваних об'єктів вимагає $O(2^N)$ операцій, де N – кількість об'єктів. Отже, зі збільшенням кількості даних обсяг обчислень росте експоненційно, що за великих обсягів даних робить розв'язання будь-якої задачі таким методом практично неможливим.

Для зниження обчислювальної складності в таких алгоритмах зазвичай використовують різні евристики, що скорочують перебір. Оптимізація цих алгоритмів зводиться до приведення залежності кількості операцій від кількості досліджуваних даних до функції лінійного вигляду. І все ж залежність від кількості атрибутів, як правило, залишається експоненційною. За умови, що їх небагато (у переважній більшості випадків атрибутів значно менше, ніж даних), така залежність є прийнятною.

Основною перевагою таких алгоритмів є їхня простота, як з погляду розуміння, так і в реалізації. До недоліків можна віднести відсутність формальної теорії, на підставі якої будуються такі алгоритми, а отже, і складнощі, пов'язані з їхнім дослідженням та розвитком.

До базових методів Data mining можна включити й підходи, що використовують елементи теорії статистики. Оскільки Data mining є розвитком статистики, таких методів досить багато. Їхня основна ідея зводиться до кореляційного, регресійного та інших видів статистичного аналізу. Головним недоліком є усереднювання значень, що призводить до втрати інформативності даних. Це, в свою чергу, спричиняє зменшення кількості знань, що добуваються.

8.2. Нечітка логіка і нечітке моделювання

Основним способом дослідження задач аналізу даних є їхнє відображення у формалізованій мові і подальший аналіз отриманої моделі. Невизначеність за обсягом відсутньої інформації в системного аналітика можна розділити на три великі групи:

- 1) невідомість;

- 2) неповнота (недостатність, неадекватність);
- 3) невірогідність.

Невірогідність буває фізичною (її джерелом є зовнішнє середовище) і лінгвістичною (виникає внаслідок словесного узагальнення й обумовлюється необхідністю опису нескінченного числа ситуацій обмеженим числом слів за обмежений час).

Виділяють два види фізичної невизначеності:

- 1) неточність (неточність вимірювань значень певної величини, виконуваних фізичними приладами);
- 2) випадковість (або наявність у зовнішньому середовищі декількох можливостей, кожна з яких випадково може стати дійсністю; передбачається знання відповідного закону розподілу ймовірності).

Існує два види лінгвістичної невизначеності:

- 1) невизначеність значень слів (багатозначність, розпливчастість, неясність, нечіткість). Вона виникає у випадку, якщо об'єкти задачі управління, що відображаються одним і тим же словом, різні;
- 2) неоднозначність значення фраз (виділяють синтаксичну і семантичну).

Для обробки фізичних невизначеностей успішно застосовуються методи теорії ймовірності та класична теорія множин. Проте з розвитком систем, що використовують методи теорії штучного інтелекту, в яких вимагається обробляти поняття і відношення звичайної мови, виникла необхідність збільшити кількість формальних методів з метою врахування лінгвістичної невизначеності задач.

Основною сферою застосування нечіткої логіки було і багато в чому залишається управління. Невипадково основоположником теорії нечітких множин став відомий фахівець у галузі управління Л. Заде. Справа в тому, що в початкову ідею про нечітку логіку дуже добре вкладалися уявлення про управління і процеси прийняття рішень. А оскільки такі задачі виникають майже в усіх технологічних процесах, потреби в розвитку цієї теорії та можливості її застосувань є досить значними.

Зі збільшенням розмірів і підвищенням складності системи істотно ускладнюється її моделювання за допомогою відомих математичних виразів. Це пов'язано зі зростанням кількості змінних і параметрів, ускладненням вимірювання окремих змінних. Внаслідок цього, створення адекватної моделі стає практично неможливим. Натомість Л. Заде запропонував лінгвістичну модель, яка використовує не математичні вирази, а слова, що відображають якість. Застосування словесної моделі не забезпечує точності, аналогічної математичному моделюванню, проте створення гарної, якісної моделі є можливим. У цьому випадку предметом обговорення стає нечіткість слів мови опису системи.

Людині в процесі управління складними об'єктами властиво оперувати поняттями і відношеннями з розпливчатими межами. Джерелом розпливчатості є наявність класів об'єктів, ступінь належності до яких – величина, що безперервно змінюється: від повної належності до того чи іншого класу до цілковитої неналежності. Звичайне математичне поняття множини, засноване на бінарній характеристичній функції, не дозволяє формалізувати такий опис.

Введення Л. Заде двох основних вихідних понять – нечіткої множини і лінгвістичної змінної – істотно розширило можливості формалізації описів таких складних систем. Ці моделі стали називатися лінгвістичними.

Розглянемо основні переваги нечіткої логіки, які найяскравіше проявляються на прикладі загальної задачі нечіткого управління. Якщо говорити коротко, то нечітка логіка дозволяє вдало представити мислення людини. Очевидно, що в повсякденній діяльності вона ніколи не застосовує формальне моделювання на основі математичних виразів, не шукає одного універсального закону, який описує все, що її оточує. Людина використовує нечіткий природний «втик». У процесі прийняття рішення вона легко опановує ситуацією, розділяючи її на події, знаходить рішення складних проблем, застосовуючи для окремих подій відповідні, згідно з досвідом, правила прийняття рішень та використовуючи при цьому велику кількість іноді навіть суперечливих якісних критеріїв. Отже, перед людиною постає ряд локальних моделей, що описують властивості фрагментів об'єктів у певних умовах. Украй важливим є те, що всі моделі мають щось спільне і є дуже простими для розуміння на якісному рівні. Яскравим прикладом каркаса такої словесної моделі є конструкція «якщо ..., то ...».

Тепер визначимо три основні особливості нечіткої логіки:

1. Правила прийняття рішень є умовними висловами на зразок «якщо ..., то ...» і реалізуються за допомогою механізму логічного висновку.

2. Замість одного чіткого узагальненого правила нечітка логіка оперує безліччю окремих правил. При цьому для кожної локальної області розподіленого інформаційного простору, для кожної регульованої величини, для кожної мети управління задаються свої правила. Це дозволяє відмовитися від трудомісткого процесу згортки цілей та отримання узагальненого цільового критерію, що, в свою чергу, дає змогу оперувати навіть протилежними цілями.

3. Правила у вигляді «якщо ..., то ...» дозволяють розв'язувати задачі класифікації в режимі діалогу з оператором, що сприяє підвищенню якості класифікатора вже в процесі експлуатації.

Отже, неважко помітити істотні загальні риси нечіткої логіки і мислення людини, тому методи управління на основі нечіткої логіки мож-

на вважати достатньо евристичними. Евристичні прийоми розв'язання задач засновані не на строгих математичних моделях і алгоритмах, а на міркуваннях «здорового глузду».

Розвитком евристичних алгоритмів обробки нечітких даних можна вважати системи, які самоорганізуються. У будь-якому разі, вихідним ядром останніх є обробка нечіткостей, а отже, застосовуються принципи мислення людини. Проте системи, що самоорганізуються, йдуть далі і починають розвиватися, налаштовуватися на об'єкт управління, у певному значенні, самостійно, використовуючи отримувану в процесі роботи інформацію про цей об'єкт.

У загальному випадку можна запропонувати таку схему реалізації процесу управління: розпізнавання → прогнозування → ідентифікація → прийняття рішення → управління.

Можна показати, що всі ці задачі належать до одного класу і можуть бути розв'язані системами, що самоорганізуються.

8.3. Моделювання і прогнозування на основі штучних нейронних мереж. Генетичні алгоритми

Будь-який вид діяльності вимагає систематизації даних, які збираються. Ідея нейронних мереж зародилася в рамках теорії штучного інтелекту – в результаті спроб імітувати здатність біологічних нервових систем навчатися і виправляти помилки. Нейронні мережі (neural networks) – це моделі біологічних нейронних мереж мозку, в яких нейрони імітуються відносно простими, часто однотипними, елементами (штучними нейронами).

Нейронна мережа може бути представлена спрямованим графом зі зваженими зв'язками, в якому штучні нейрони є вершинами, а синаптичні зв'язки – дугами.

Нейронні мережі широко використовуються для розв'язання різноманітних задач. Серед галузей застосування нейронних мереж – автоматизація процесів розпізнавання образів, прогнозування, адаптивне управління, створення експертних систем, організація асоціативної пам'яті, обробка аналогових і цифрових сигналів, синтез та ідентифікація електронних ланцюгів і систем.

За допомогою нейронних мереж можна, наприклад, прогнозувати обсяги продажів виробів, показники біржового ринку, виконувати розпізнавання сигналів, конструювати самонавчальні системи.

Моделі нейронних мереж можуть бути програмного й апаратного виконання. Розглянемо мережі першого типу.

Якщо говорити звичною мовою, шарувата нейронна мережа є сукупністю нейронів, які складають шари. У кожному шарі нейрони між собою ніяк не зв'язані, але пов'язані з нейронами попереднього і нас-

тупного шарів. Інформація надходить з першого на другий шар, з другого – на третій і т. д.

Серед задач data mining, які розв’язуються за допомогою нейронних мереж, розглянемо такі:

Класифікація (навчання з учителем). Приклади задач класифікації: розпізнавання тексту, розпізнавання мови, ідентифікація особи.

Прогнозування. Для нейронної мережі задача прогнозування може бути поставлена так: знайти найкраще наближення функції, заданої скінченним набором вхідних значень (навчаючих прикладів). Наприклад, нейронні мережі дозволяють розв’язати задачу відновлення пропущених значень.

Кластеризація (навчання без учителя). Прикладом задачі кластеризації може бути задача стиснення інформації шляхом зменшення розмірності даних. Задачі кластеризації розв’язуються, наприклад, карти Кохонена, що самоорганізуються.

Розглянемо три приклади задач, для розв’язання яких можна застосувати нейронні мережі.

Медична діагностика. Упродовж нагляду за різними показниками стану пацієнтів накопичено базу даних. Ризик настання ускладнень може відповідати складній нелінійній комбінації спостережуваних змінних, яка виявляється за допомогою нейромережевого моделювання.

Прогнозування показників діяльності фірми (обсяги продажів). На основі ретроспективної інформації про діяльність організації можна визначити обсяги продажів на наступні періоди.

Надання кредиту. Використовуючи базу даних про клієнтів банку, застосовуючи нейронні мережі, можна встановити групу клієнтів, які належать до групи потенційних «неплатників».

8.3.1. Елементи нейронних мереж

Штучний нейрон (формальний нейрон) – елемент штучних нейронних мереж, що моделює певні функції біологічного нейрона.

Головна функція штучного нейрона – формувати вихідний сигнал залежно від сигналів, які надходять на його входи.

У найпоширенішій конфігурації вхідні сигнали обробляються адаптивним суматором, потім вихідний сигнал суматора надходить до нелінійного перетворювача, де він перетвориться функцією активації, а результат буде подано на вихід (у точку галуження). Загальний вигляд штучного нейрона показано на рис. 4.4.

Нейрон характеризується поточним станом і має групу синапсів – однонаправлених вхідних зв’язків, сполучених з виходами інших нейронів.

Нейрон має аксон – вихідний зв'язок даного нейрона, з якого сигнал (збудження або гальмування) надходить на синапси наступних нейронів. Кожен синапс характеризується величиною синаптичного зв'язку (її вагою w_i). Поточний стан нейрона визначається як зважена сума його входів:

$$s = \sum_{i=1}^n x_i * w_i$$

Виходом нейрона є функція його стану:

$$y = f(s).$$

Активаційна функція, яку ще називають характеристичною функцією, – це нелінійна функція, що обчислює вихідний сигнал формального нейрона.

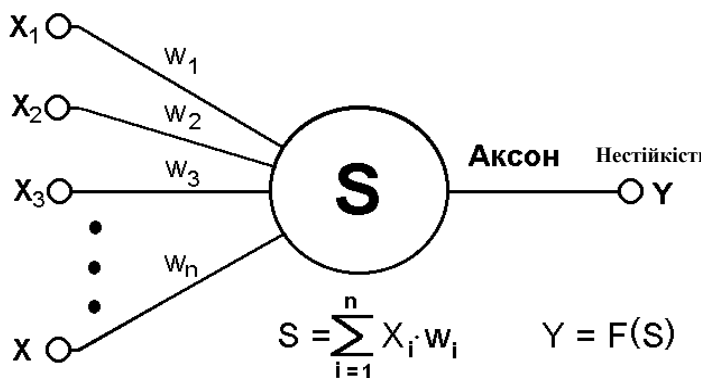


Рис. 4.4. Штучний нейрон

Активаційні функції, які використовуються найчастіше:

- жорстка порогова функція;
- лінійний поріг;
- сигмоїдальна функція.

Вибір активаційної функції визначається специфікою поставленої задачі або обмеженнями, що накладаються, певними алгоритмами навчання.

Нелінійний перетворювач – це елемент штучного нейрона, що перетворює поточний стан нейрона (вихідний сигнал адаптивного суматора) у вихідний сигнал нейрона за певним нелінійним законом (активаційної функції).

Точка галуження (вихід) – це елемент формального нейрона, що посилає його вихідний сигнал за декількома адресами і має один вхід та декілька виходів. На вхід точки галуження зазвичай подається вихідний сигнал нелінійного перетворювача, який потім посилається на входи інших нейронів.

8.3.2. Архітектура нейронних мереж

Нейронні мережі можуть бути синхронними і асинхронними. В синхронних нейронних мережах у кожен момент часу свій стан змінює лише один нейрон. В асинхронних – стан змінюється відразу в цілої групи нейронів, як правило – в усього шару.

Можна виділити дві базові архітектури – шаруваті та повнозв'язні мережі. Ключовим у шаруватих мережах є поняття шару. Шар – один або декілька нейронів, на входи яких подається один і той же загальний сигнал.

Шаруваті нейронні мережі – нейронні мережі, в яких нейрони розбиті на окремі групи (шари) так, що обробка інформації здійснюється пошарово.

У шаруватих мережах нейрони i -го шару отримують вхідні сигнали, перетворюють їх і через точки галуження передають нейронам $(i + 1)$ шару. І так до k -го шару, який видає вихідні сигнали для інтерпретатора і користувача. Число нейронів у кожному шарі не пов'язане з кількістю нейронів в інших шарах і може бути довільним.

У межах одного шару дані обробляються паралельно, а в масштабах всієї мережі обробка здійснюється послідовно – від шару до шару. До шаруватих нейронних мереж належать, наприклад, багатошарові перцептрони, мережі радіальних базисних функцій, когнитрон, некогнитрон, мережі асоціативної пам'яті.

Проте сигнал не завжди подається на всі нейрони шару. В когнитроні, наприклад, кожен нейрон поточного шару отримує сигнали тільки від близьких йому нейронів попереднього шару.

Шаруваті мережі, у свою чергу, можуть бути одношаровими і багатошаровими.

Одношарова мережа – мережа, що складається з одного шару.

Багатошарова мережа – мережа, що має декілька шарів.

У багатошаровій мережі перший шар називається вхідним, подальші – внутрішніми або прихованими, останній шар – вихідним. Отже, проміжні шари – це всі шари в багатошаровій нейронній мережі, крім вхідного і вихідного.

Вхідний шар мережі реалізовує зв'язок з вхідними даними, вихідний – з вихідними. Таким чином, нейрони можуть бути вхідними, вихідними і прихованими. Вхідний шар організований з вхідних ней-

ронів (input neuron), які отримують дані та поширюють їх на входи нейронів прихованого шару мережі. Прихований нейрон (hidden neuron) – це нейрон, що знаходиться в прихованому шарі нейронної мережі. Вихідні нейрони (output neuron), з яких організований вихідний шар мережі, видає результати роботи нейронної мережі.

У повнозв'язних мережах кожен нейрон передає свій вихідний сигнал решті нейронів, включаючи самого себе. Вихідними сигналами мережі можуть бути всі або деякі вихідні сигнали нейронів після декількох тактів функціонування мережі. Всі вхідні сигнали подаються всім нейронам.

8.3.3. Навчання нейронних мереж

Перед використанням нейронної мережі її необхідно навчити. Процес навчання нейронної мережі полягає в підлаштуванні її внутрішніх параметрів під конкретну задачу. Алгоритм роботи нейронної мережі є ітеративним, його кроки називають епохами, або циклами.

Епоха – одна ітерація в процесі навчання, що включає пред'явлення всіх прикладів з навчаючої множини і, можливо, перевірку якості навчання на контрольній множині.

Процес навчання здійснюється на навчаючій вибірці. Ця вибірка містить вхідні значення і відповідні їм вихідні значення набору даних. У процесі навчання нейронна мережа знаходить певну залежність вихідних полів від вхідних.

Отже, перед нами постає питання: які вхідні поля (ознаки) нам необхідно використовувати. Спочатку вибір здійснюється евристично, далі кількість входів може бути змінена.

Складність може викликати питання щодо кількості спостережень у наборі даних. І хоча існують певні правила, які описують зв'язок між необхідною кількістю спостережень і розміром мережі, їхню правильність не доведено.

Кількість необхідних спостережень залежить від складності задачі, яка розв'язується. При збільшенні кількості ознак кількість спостережень зростає нелінійно; ця проблема має назву «прокляття розмірності». За недостатньої кількості даних рекомендується застосовувати лінійну модель.

Аналітик має визначити кількість шарів у мережі та кількість нейронів у кожному шарі.

Далі необхідно задати такі значення вагів і зміщень, які зможуть мінімізувати помилку розв'язку. Ваги і зміщення автоматично налаштовуються так, щоб мінімізувати різницю між бажаним і отриманим на виході сигналами, яка називається помилкою навчання.

Помилка навчання для побудованої нейронної мережі обчислюється

ся шляхом порівняння вихідних і цільових (бажаних) значень. З отриманих різниць формується функція помилок. Функція помилок – це цільова функція, що вимагає мінімізації в процесі керованого навчання нейронної мережі. За допомогою функції помилок можна оцінити якість роботи нейронної мережі під час навчання. Наприклад, часто використовується сума квадратів помилок.

Від якості навчання нейронної мережі залежить її здатність розв'язувати поставлені перед нею задачі.

Перенавчання нейронної мережі

У процесі навчання нейронних мереж часто виникає серйозна трудність, названа проблемою перенавчання (overfitting). Перенавчання, або надто близька підгонка – це надмірно точна відповідність нейронної мережі конкретному набору навчаючих прикладів, за якої мережа втрачає здатність до узагальнення. Перенавчання виникає у випадку дуже довгого навчання, недостатньої кількості навчаючих прикладів або надскладної структури нейронної мережі.

Перенавчання зв'язане з тим, що вибір навчаючої (тренувальної) множини є випадковим. З перших кроків навчання відбувається зменшення помилки. На подальших кроках з метою зменшення помилки (цільової функції) параметри підлаштовуються під особливості навчаючої множини. Проте при цьому відбувається підлаштування не під загальні закономірності ряду, а під особливості його частини – навчаючої підмножини, а це зменшує точність прогнозу.

Один з варіантів боротьби з перенавчанням мережі – розділення навчаючої вибірки на дві множини (навчаючу і тестову). На навчаючій множині відбувається навчання нейронної мережі, а на тестовій – здійснюється перевірка побудованої моделі. Ці множини не повинні перетинатися.

З кожним кроком параметри моделі змінюються, проте постійне зменшення значення цільової функції відбувається саме на навчаючій множині. Після розділення множини на дві ми можемо паралельно спостерігати змінювання помилки прогнозу на обох множинах. І там, і там помилка прогнозу зменшується на якусь кількість кроків. Проте на певному кроці помилка на тестовій множині починає зростати, а помилка на навчаючій – продовжує зменшуватися. Цей момент вважається кінцем реального, або поточного навчання, – з нього й починається перенавчання.

Описаний процес проілюстровано на рис. 4.5.

На першому кроці помилки прогнозу для навчаючої та тестової множин однакові. На подальших кроках значення обох помилок зменшуються, проте з 70-го кроку помилка на тестовій множині починає зростати, тобто починається процес перенавчання мережі.

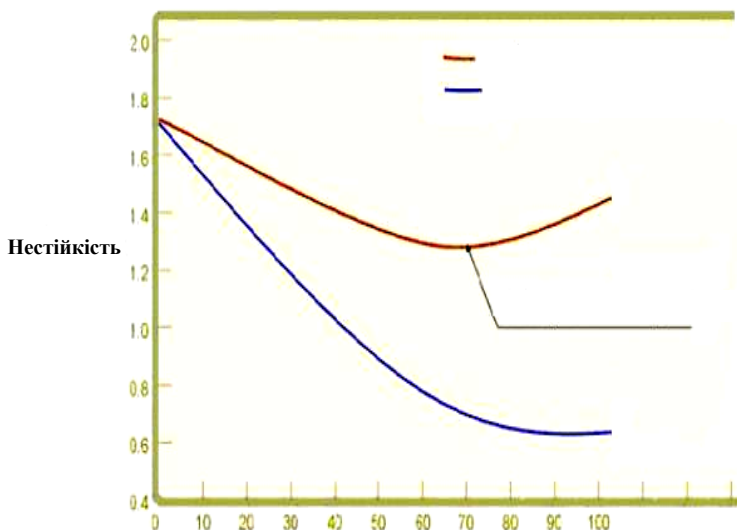


Рис. 4.5. Процес навчання мережі. Явище перенавчання

Прогнозування на тестовій множині є перевіркою працездатності побудованої моделі. Помилка на тестовій множині може бути помилкою прогнозу, якщо ця множина максимально наближена до теперішнього моменту.

8.3.4. Моделі нейронних мереж

Розглянемо найпростіші моделі нейронних мереж: одношаровий і багатошаровий персептрон.

Персептрон. Велику кількість моделей персептрона було розглянуто в основоположній праці Розенблатта. Найпростіша модель нейронної мережі – одношаровий персептрон.

Одношаровий персептрон (персептрон Розенблатта) – одношарова нейронна мережа, всі нейрони якої мають жорстку порогову функцію активації.

Одношаровий персептрон має простий алгоритм навчання і здатний розв'язувати лише найпростіші задачі. Ця модель викликала до себе значний інтерес на початку 1960-х рр. і стала поштовхом до розвитку штучних нейронних мереж.

Класичний приклад такої мережі – одношаровий трьохнейронний персептрон – представлено на рис. 4.6.

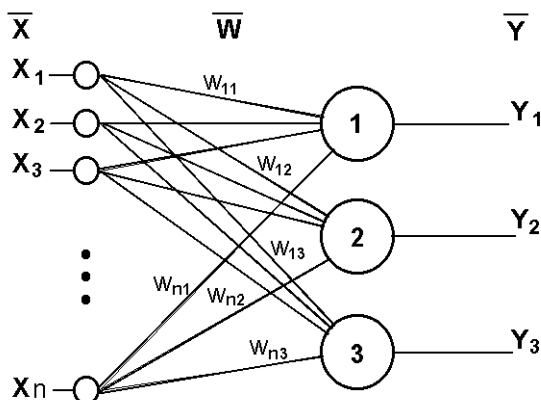


Рис. 4.6. Одношаровий трьохнейронний перцептрон

Зображена мережа має n входів, на які надходять сигнали, що йдуть синапсами на три нейрони, – останні й утворюють єдиний шар цієї мережі та видають три вихідні сигнали.

Багатошаровий перцептрон (MLP) – нейронна мережа прямого поширення сигналу (без зворотних зв'язків), у якій вхідний сигнал перетворюється у вихідний, проходячи послідовно через декілька шарів.

Перший з таких шарів називають вхідним, останній – вихідним. Ці шари містять так звані вироджені нейрони і іноді в кількості шарів не враховуються. Крім вхідного і вихідного шарів, у багатошаровому перцептроні є один або декілька проміжних, які називають прихованими.

У цій моделі перцептрона має бути хоча б один прихований шар. Наявність декількох таких шарів виправдана лише у випадку використання нелінійних функцій активації.

Приклад двошарового перцептрона представлено на рис. 4.7.

Представлена на цьому рисунку мережа має n входів. На них надходять сигнали, що йдуть далі синапсами на три нейрони, які утворюють перший шар. Вихідні сигнали першого шару передаються двом нейронам другого. Останні, у свою чергу, видають два вихідні сигнали.

Метод зворотного поширення помилки (back propagation, backprop) – алгоритм навчання багатошарових перцептронів, який заснований на обчисленні градієнта функції помилок. У процесі навчання ваги нейронів кожного шару нейромережі корегуються з урахуванням сигналів, що надійшли з попереднього шару, і відхилом кожного шару, який обчислюється рекурсивно у зворотному напрямку від останнього шару до першого.

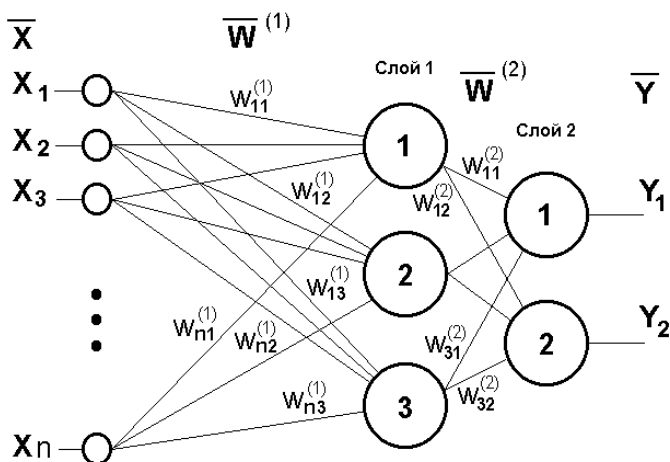


Рис. 4.7. Двошаровий персептрон

8.3.5. Програмне забезпечення для роботи з нейронними мережами

Програмне забезпечення, що імітує роботу нейронної мережі, називають нейросимулятором або нейропакетом.

Більшість нейропакетів містить наступну послідовність дій:

- створення мережі (вибір користувачем параметрів або ухвалення встановлених стандартно);
- навчання мережі;
- видача розв'язку користувачеві.

Існує величезна різноманітність нейропакетів, можливість використання нейромереж включена також у практично всі відомі статистичні пакети.

Серед спеціалізованих нейропакетів можна назвати такі: BrainMaker, NeuroOffice, NeuroPro та ін. Критерії порівняння нейропакетів: простота застосування, наочність інформації, що надається, можливість використовувати різні структури, швидкість роботи, наявність документації. Вибір визначається кваліфікацією і вимогами користувача.

8.3.6. Генетичні алгоритми

Переваги і недоліки нейромережевої оптимізації пізнаються у порівнянні з іншими розвиненими в наш час методами. З методів, які іноді дають аналогічні, а деколи й кращі результати, виділимо генетичні та еволюційні алгоритми (Fogel, 1993), а також метод мурашиних колоній (Dorigo & Gambardella, 1996).

Зупинимося стисло на методі генетичного алгоритму, оскільки цей підхід, як і нейромережі, використовує чіткі, зрозумілі та плідні біологічні аналогії. Крім того, генетичні алгоритми широко застосовуються і для навчання самих нейронних мереж, оскільки це навчання пов'язане з мінімізацією функціонала помилки.

Ці алгоритми можуть застосовуватися для пошуку екстремуму нелінійних функцій з множинними локальними мінімумами. Вони імітують адаптацію живих організмів до зовнішніх умов у процесі еволюції. Точніше, вони моделюють еволюцію цілих популяцій організмів і тому вимагають достатньо великих ресурсів пам'яті та високої швидкості обчислювальних систем. Важливою їхньою перевагою є те, що вони не ставлять ніяких вимог до вигляду функції, що мінімізується (наприклад, диференційованість). Тому їх можна застосовувати у випадках, коли градієнтні методи не застосовні.

Генетичні алгоритми використовують відповідну термінологію: конфігурації системи називають хромосомами, над якими можна здійснювати операції кросингвера і мутації. Хромосома є головною інформаційною одиницею, що кодує змінну, щодо якої шукається оптимум. Зазвичай вона є бітовим рядком, хоча компоненти цього рядка можуть мати і більш загальний вигляд (так, для задачі комівояжера компоненти хромосом є послідовністю номерів міст у конкретному, заданому, маршруті, наприклад (145321)). Кожна компонента хромосоми називається геном. Вибір вдалого представлення для хромосоми, або ж кодування шуканого розв'язку, може значно полегшити пошук цього розв'язку.

Навчання відбувається в популяції хромосом, до яких на кожному кроці еволюції застосовуються дві основні операції. При мутаціях у хромосомі випадково вибираються і змінюються її компоненти (гени). При кросингвері дві хромосоми, A і B , «розрізають» на дві частини у навмання вибраній одній точці $A = (A_1, A_2)$ і $B = (B_1, B_2)$ і обмінюються генами, створюючи дві нові хромосоми: $A' = (A_1, B_2)$ і $B' = (B_1, A_2)$ (рис. 4.8).

Після кожного кроку еволюції (генерації), на якому мутують і піддаються кросингверу всі хромосоми, для кожної з нових хромосом обчислюється значення цільового функціонала, яке досягається на кодованих ними розв'язках. Чим менше це значення для даної хромосоми, тим з більшою ймовірністю вона відбирається для кросингвера. У процесі еволюції усереднене за популяцією значення функціонала зменшуватиметься, і після завершення процесу (здійснення заданого числа генерацій) хромосома з мінімальним його значенням вибирається як наближений розв'язок поставленої задачі. Можна значно поліпшити властивості генетичного алгоритму, якщо після «народжен-

ня» нової генерації N хромосом заздалегідь об'єднати її з попередньою популяцією і вибрати з $2N$ отриманих хромосом N найкращих.

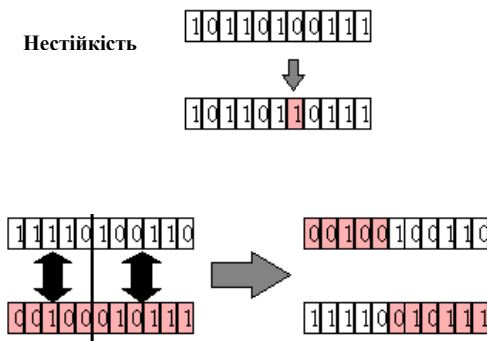


Рис. 4.8. Представлення шуканого розв'язку у вигляді бітового рядка – хромосоми (вгорі). Операції мутації та кросингвера (внизу)

Досвід показує, що генетичні алгоритми особливо ефективні для пошуку глобального оптимуму, оскільки вони здійснюють цей пошук у широкому просторі розв'язків. Якщо закодувати у вигляді хромосом значення вагів і порогів нейронної мережі заданої архітектури і застосовувати в ролі функції, що мінімізується, функціонал помилки, то генетичні алгоритми можна використовувати для навчання цієї нейронної мережі. Очевидно, що для такої ж мети можна застосовувати і метод імітації відпалу.

8.4. Нейронечіткі системи

8.4.1. Способи інтеграції нечітких і нейронних систем

Нейронечіткі, або гібридні системи, що містять нечітку логіку, нейронні мережі, генетичні алгоритми та експертні системи, є ефективним засобом для розв'язання значного кола задач реального світу.

Кожен інтелектуальний метод має свої індивідуальні особливості (наприклад, здатність до навчання, здатність до пояснення розв'язків), які роблять його застосовним тільки для розв'язання конкретних специфічних задач.

Так, нейронні мережі успішно застосовуються в розпізнаванні моделей, але вони неефективні для пояснення способів досягнення своїх розв'язків.

Системи нечіткої логіки, які пов'язані з неточною інформацією, успішно застосовуються для пояснення своїх розв'язків, але не можуть

автоматично поповнювати системи правил, необхідних для прийняття цих розв'язків.

Ці обмеження стали поштовхом для створення інтелектуальних гібридних систем, де два або більше методів об'єднуються для того, щоб подолати обмеження кожного окремого методу.

Гібридні системи відіграють важливу роль при розв'язанні задач у різних прикладних галузях, де існують проблеми, пов'язані з окремими компонентами, кожен з яких може вимагати «своїх» методів обробки.

Якщо у складній прикладній галузі є дві окремі підзадачі, наприклад задача обробки сигналу і задача виведення розв'язку, тоді нейронна мережа і експертна система будуть використані відповідно для розв'язання цих окремих задач.

Інтелектуальні гібридні системи успішно застосовуються в багатьох галузях, таких як управління, технічне проектування, торгівля, оцінювання кредиту, медична діагностика і когнітивне моделювання. Крім того, діапазон застосування цих систем постійно зростає.

Тоді як нечітка логіка забезпечує механізм логічного виходу з когнітивної невизначеності, обчислювальні нейронні мережі мають такі помітні переваги: навчання, адаптація, відмовостійкість, паралелізм і узагальнення.

Для того щоб система могла обробляти когнітивні невизначеності так, як це роблять люди, потрібно застосувати концепцію нечіткої логіки в нейронних мережах. Такі гібридні системи називаються нечіткими нейронними, або нечітко-нейронними мережами.

Нейронні мережі використовуються для налаштування функцій належності в нечітких системах, які застосовуються як системи прийняття рішень.

Нечітка логіка може описувати наукові знання напряду, використовуючи правила лінгвістичних міток, проте багато часу зазвичай займає процес проектування і налаштування функцій за тієї надійності, яку визначають ці мітки.

Навчаючі методи нейронних мереж автоматизують цей процес, істотно скорочуючи час розробки і витрати на отримання цих функцій.

Теоретично нейронні мережі та системи нечіткої логіки є рівноцінними, оскільки вони взаємно трансформуються, проте на практиці кожна з них має свої переваги і недоліки.

У нейронних мережах знання автоматично отримуються завдяки застосуванню алгоритму виведення зі зворотним ходом, але процес навчання здійснюється досить повільно, а аналіз навченої мережі є складним («чорна скринька»).

Витягнути структуровані знання (правила) з навченої нейронної

мережі, а також зібрати особливу інформацію про проблему для того, щоб спростити процедуру навчання, неможливо.

Нечіткі системи знаходять досить широке застосування, оскільки їхня поведінка може бути описана за допомогою правил нечіткої логіки, а отже, цими системами можна управляти, регулюючи ці правила. Слід зазначити, що отримання (витягання) знань – процес досить складний, за якого область змінювання кожного вхідного параметра необхідно розбивати на декілька інтервалів, застосування систем нечіткої логіки обмежене областями, які передбачають знання експерта і набір вхідних параметрів досить малий.

Для розв’язання проблеми здобуття знань нейронні мережі доповнюються властивістю автоматичного отримання правил нечіткої логіки з числових даних.

Обчислювальний процес є процесом використання саме таких нечітких нейронних мереж. Він починається з розробки «нечіткого нейрона» і заснований на розпізнаванні біологічних нейронних морфологій згідно з механізмом навчання. При цьому можна виділити такі три етапи обчислювального процесу нечіткої нейронної мережі:

- розробка нечітких нейронних моделей на основі біологічних нейронів;
- створення моделі синоптичних з’єднань, які вносять невизначеність у нейронні мережі;
- розробка алгоритмів навчання (метод регулювання синоптичних вагових коефіцієнтів).

На рис. 4.9 і 4.10 наведено дві можливі моделі нечітких нейронних систем.

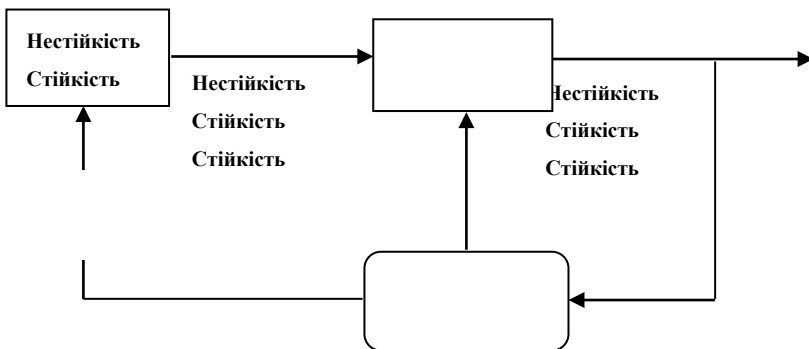


Рис. 4.9. Перша модель нечіткої нейронної системи

Одержане лінгвістичне твердження інтерфейсний блок нечіткої логіки перетворює на вхідний вектор багаторівневої нейронної мере-

жі. Нейронна мережа може бути навчена виробляти необхідні вихідні команди або рішення.

Багаторівнева нейронна мережа запускає інтерфейсний механізм нечіткої логіки.

Основні оброблювані елементи нейронної мережі називаються штучними нейронами, або просто нейронами. Сигнал з нейронних входів x_j вважається однонаправленим, напрям позначений стрілкою, те ж стосується нейронного вихідного сигналу. Проста нейронна мережа представлена на рис. 4.11. Усі сигнали і ваги задаються дійсними числами.

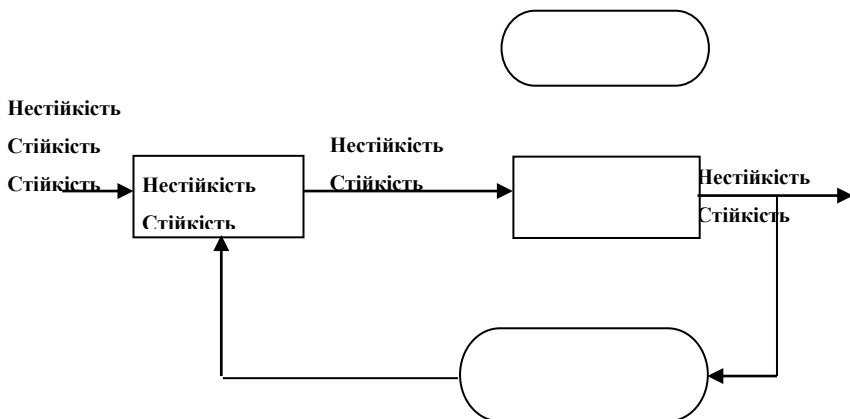


Рис. 4.10. Друга модель нечіткої нейронної системи

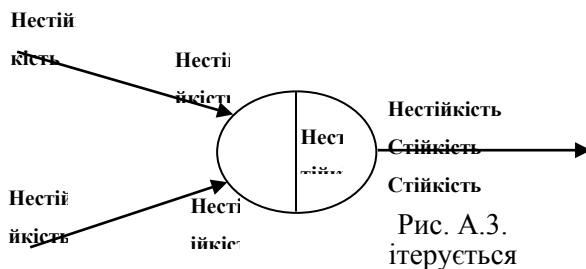


Рис. 4.11. Проста нейронна мережа.

Вхідні нейрони не змінюють вхідного сигналу, тому вихідні та вхідні параметри співпадають.

При взаємодії з ваговим коефіцієнтом зростає сигнал x_i отримуємо: $p_i = w_i x_i$, $i = 1, \dots, n$. Елементи вхідної інформації p_i додаються і

в результаті дають вхідне значення для нейрона:

$$net = p_1 + \dots + p_n = w_1 x_1 + \dots + w_n x_n.$$

Нейрон застосовує свою передавальну функцію, яка може бути сигмоїдальною функцією вигляду:

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}.$$

Обчислимо вихідне значення нейрона:

$$y = f(net) = f(w_1 x_1 + \dots + w_n x_n).$$

Цю просту нейронну мережу, яка здійснює множення, додавання і обчислює сигмоїдальну функцію, називається *стандартною нейронною мережею*.

Гібридна нейронна мережа – це нейронна мережа з нечіткими сигналами і вагами та нечіткими передатними функціями. Проте: (1) можна об'єднати x_i і w_i , здійснивши інші безперервні операції; (2) додати компоненти p_i за допомогою інших безперервних функцій; (3) передатна функція може мати вигляд будь-якої іншої безперервної функції (рис. 4.12).

Оброблювальний елемент гібридної нейронної мережі називається *нечітким нейроном*.

Слід зазначити, що всі вхідні, вихідні параметри і ваги гібридної нейронної мережі є дійсними числами з інтервалу $[0, 1]$.

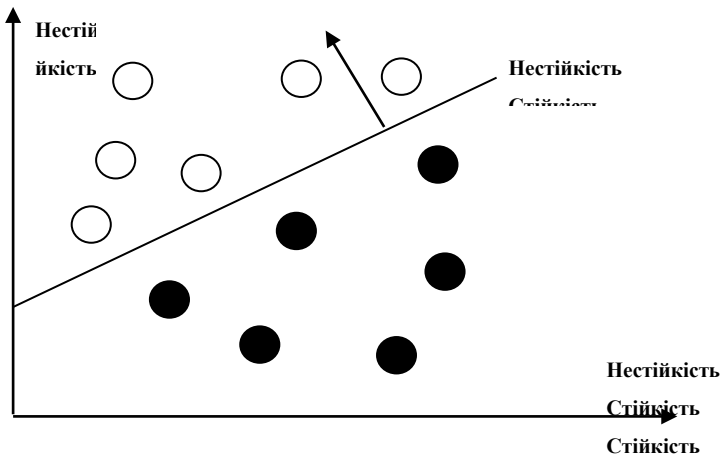


Рис. 4.12. Передатна функція гібридної нейронної мережі.

8.4.2. Нечіткі нейрони

Визначення 1 — нечіткий нейрон *I*. Сигнали x_i і w_i об'єднуються оператором максимуму і дають:

$$p_i = \max \{w_i, x_i\}, i = 1, 2..$$

Елементи вхідної інформації p_i об'єднуються за допомогою оператора мінімуму і в результаті дають вихідну інформацію нейрона:

$$y = \min \{p_1, p_2\} = \min \{w_1 \vee x_1, w_2 \vee x_2\}.$$

Визначення 2 – нечіткий нейрон *АБО*. Сигнал x_i і вага w_i об'єднуються оператором мінімуму.

$$p_i = \min \{w_i, x_i\}, i = 1, 2.$$

Елементи вхідної інформації p_i об'єднуються оператором максимуму і дають вихідну інформацію нейрона:

$$y = \max \{w_1 \wedge x_1, w_2 \wedge x_2\}.$$

Визначення 3 – нечіткий нейрон *АБО* (максимум добутку). Сигнал x_i і вага w_i об'єднується оператором множення:

$$p_i = w_i \cdot x_i, i = 1, 2.$$

Елементи вхідної інформації p_i об'єднуються оператором максимуму і дають вихідну інформацію нейрона (рис. 4.13):

$$y = \max \{w_1 x_1, w_2 x_2\}.$$

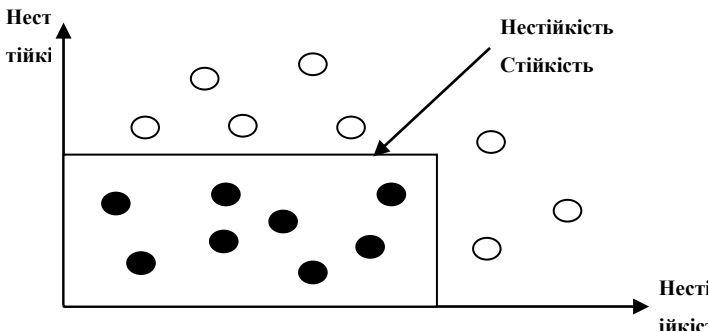


Рис. 4.13. Передатна функція нечіткого нейрона *АБО*

Нечіткі нейрони I та $АБО$ здійснюють стандартні логічні операції над значеннями множини. Роль з'єднань полягає в тому, щоб розрізнити конкретні рівні впливу, який може бути здійснений окремими вхідними параметрами на результат їхнього об'єднання.

Відомо, що стандартні мережі є універсальними апроксимаціями, тобто вони можуть апроксимувати будь-яку безперервну функцію на компактній множині з будь-якою точністю. Задача з таким розв'язком є неконструктивною і не дає інформації про те, як побудувати таку мережу.

Гібридні нейронні мережі застосовуються для реалізації правил нечіткої логіки IF-THEN конструктивним шляхом.

Хоча гібридні нейронні мережі не здатні використовувати безпосередньо стандартний алгоритм виведення зі зворотним ходом, вони можуть бути навчені методами найшвидшого спуску розпізнавати параметри функцій належності, які є лінгвістичними термінами в правилах.

8.4.3. Навчання методами спуску

Процедура навчання виправленню помилок є всього лише концепцією. Ця процедура полягає в наступному: протягом навчання вхідна інформація надходить до мережі, де можливими шляхами здійснює перетворення, видаючи безліч вихідних значень.

Далі отримані експериментально вихідні значення порівнюються з теоретичними значеннями і обчислюється невідповідність. Якщо експериментальні та теоретичні значення співпадають, то параметри мережі не змінюються. Проте якщо ці значення розходяться, необхідно здійснити зміни з'єднань відповідно до отриманої невідповідності.

Нехай диференційовна функція $f : R \rightarrow R$ постійно зростає у напрямі своєї похідної і спадає в протилежному напрямі.

У методі спуску для мінімізації функції наступний крок w^{n+1} повинен задовольняти умові:

$$f(w^{n+1}) < f(w^n),$$

тобто значення функції f у точці w^{n+1} має бути меншим за значення функції на попередньому кроці w^n .

У процедурі навчання виправленню помилок на кожній ітерації методу спуску розраховується напрям спуску (протилежний напрям похідної) від точки w^n , отже, за достатньо малих $\eta > 0$ має виконуватися нерівність:

$$f(w^n - \eta f'(w^n)) < f(w^n),$$

де w^{n+1} є вектором

$$w^{n+1} = w^n - \eta f'(w^n).$$

Хай функція $f : R^n \rightarrow R$ є дійсною.

У методі спуску подальша ітерація w^{n+1} повинна задовольняти умові:

$$f(w^{n+1}) < f(w^n),$$

тобто значення функції f у точці w^{n+1} має бути меншим за значення функції у попередньому наближенні w^n .

На кожній ітерації методу спуску розраховується напрям спуску в точці i (напрямок, протилежний напрям похідної); це означає, що за достатньо малих $\eta > 0$ має виконуватися нерівність:

$$f(w^n - \eta f'(w^n)) < f(w^n),$$

де w^{n+1} є вектором

$$w^{n+1} = w^n - \eta f'(w^n).$$

Вправа 1. Мінімізувати функцію помилки, задану формулою:

$$E(w_1, w_2) = \frac{1}{2}[(w_2 - w_1)^2 + (1 - w_1)^2].$$

Знайти аналітично вектор градієнта:

$$E'(w) = \begin{bmatrix} \partial_1 E(w) \\ \partial_2 E(w) \end{bmatrix}.$$

Знайти аналітично вектор вагових коефіцієнтів, який мінімізує функцію помилок так, що $E'(w) = 0$.

Застосувати метод найшвидшого спуску для мінімізації функції E .

Рішення 1. Вектор градієнта функції E :

$$E'(w) = \begin{bmatrix} (w_1 - w_2) + (w_1 - 1) \\ (w_2 - w_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w_1 - w_2 - 1 \\ w_2 - w_1 \end{bmatrix},$$

і єдиний розв'язок рівняння:

$$\begin{bmatrix} 2w_1 - w_2 - 1 \\ w_2 - w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Метод найшвидшого спуску для мінімізації функції E :

$$\begin{bmatrix} w_1(t+1) \\ w_2(t+1) \end{bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} 2w_1(t) - w_2(t) - 1 \\ w_2(t) - w_1(t) \end{bmatrix},$$

де η – константа навчання, а t – показчик номера ітерації. Тобто:

$$w_1(t+1) = w_1(t) - \eta(2w_1(t) - w_2(t) - 1),$$

$$w_2(t+1) = w_2(t) - \eta(2w_2(t) - w_1(t)).$$

8.4.4. Нечіткі схеми міркувань

Нехай експертна система на основі продукційних правил має такий вигляд:

$\mathfrak{R}_1 : \text{if } x \text{ is } A_1 \text{ and } y \text{ is } B_1 \text{ then } z \text{ is } C_1$

$\mathfrak{R}_2 : \text{if } x \text{ is } A_2 \text{ and } y \text{ is } B_2 \text{ then } z \text{ is } C_2$

.....

$\mathfrak{R}_n : \text{if } x \text{ is } A_n \text{ and } y \text{ is } B_n \text{ then } z \text{ is } C_n$

$\text{fact} : x = x_0 \text{ and } y = y_0$

$\text{consequence} : z \text{ is } C,$

де A_i і B_i – нечіткі множини, $i = 1, \dots, n$.

Процедура отримання нечіткої вихідної інформації з такої бази знань включає три етапи:

- знайти межі застосування кожного правила;
- знайти вихідні параметри кожного правила;
- об'єднати окремі вихідні параметри правил для отримання повної вихідної інформації системи.

Sugeno і Такагі застосовують наступні правила:

$\mathfrak{R}_1 : \text{if } x \text{ is } A_1 \text{ and } y \text{ is } B_1 \text{ then } z_1 = a_1x + b_1y;$

$\mathfrak{R}_2 : \text{if } x \text{ is } A_2 \text{ and } y \text{ is } B_2 \text{ then } z_2 = a_2x + b_2y / .$

Межі застосування правил обчислюються за формулами:

$$\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0), \alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0),$$

потім вихідна інформація кожного окремого правила виводиться з відношення (рис. 4.14):

$$z_1 = a_1x_0 + b_1y_0, z_2 = a_2x_0 + b_2y_0,$$

і вплив чіткого управління виражається як

$$o = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2,$$

де β_1 і β_2 – нормовані значення α_1 і α_2 по відношенню до суми $(\alpha_1 + \alpha_2)$, тобто:

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

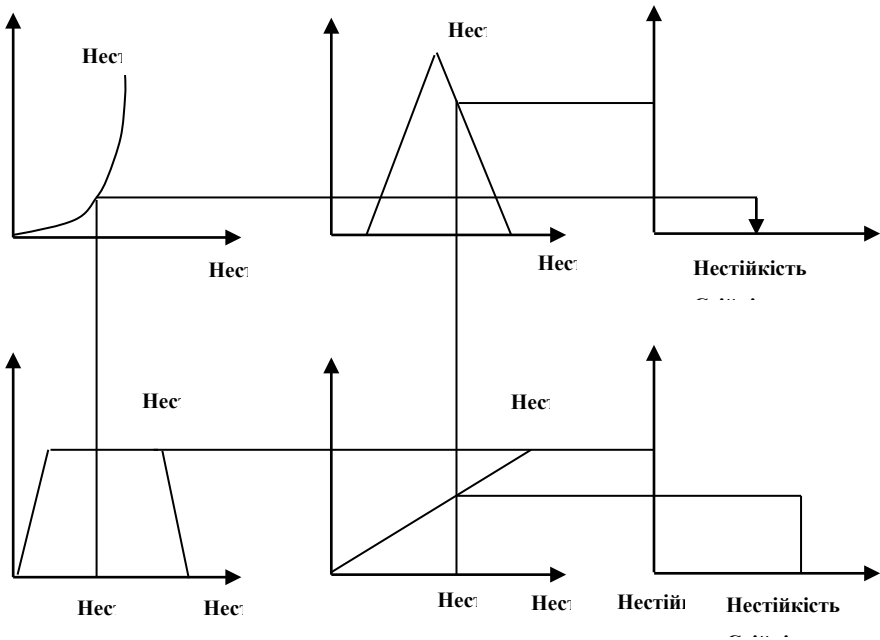


Рис. 4.14. Вихідна інформація правила

Приклад 1. Проілюструємо метод міркувань Sugeno на такому прикладі:

if x is SMALL and y is BIG then o = x - y;
if x is BIG and y is SMALL then o = x + y;
if x is BIG and y is BIG then o = x - 2y;

де функції належності *SMALL* і *BIG* визначаються так:

$$SMALL(v) = \begin{cases} 1 & \text{if } v \leq 1 \\ 1 - \frac{v-1}{4}, & \text{if } 1 \leq v \leq 5; \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$BIG(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u \geq 5 \\ 1 - \frac{(5-u)}{4}, & \text{if } 1 \leq u \leq 5. \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Припустимо, що є такі вхідні параметри: $x_0 = 3$ і $y_0 = 3$. Якими будуть при цьому вихідні параметри системи?

Межа застосування першого правила:

$$\alpha_1 = \min\{SMALL(3), BIG(3)\} = \min\{0.5, 0.5\} = 0.5,$$

характерний вихідний параметр першого правила (рис. 4.14):

$$o_1 = x_0 - y_0 = 3 - 3 = 0.$$

Межа застосування другого правила:

$$\alpha_1 = \min\{BIG(3), SMALL(3)\} = \min\{0.5, 0.5\} = 0.5,$$

характерний вихідний параметр другого правила:

$$o_2 = x_0 + y_0 = 3 + 3 = 6.$$

Межа застосування третього правила:

$$\alpha_1 = \min\{BIG(3), BIG(3)\} = \min\{0.5, 0.5\} = 0.5,$$

характерний вихідний параметр третього правила:

$$o_3 = x_0 + 2y_0 = 3 + 6 = 9.$$

вихідний параметр системи, o , обчислюється з рівняння:

$$o = \frac{0 * 0.5 + 6 * 0.5 + 9 * 0.5}{1.5} = 5.0.$$

В якості прикладу покажемо спосіб побудови гібридної нейронної мережі (названої *Jang-адаптивною мережею*), яка за функціональністю є еквівалентом інтерфейсного механізму Sugeno.

Гібридна нейронна мережа, ідентична за обчислювальними алгоритмами механізму Sugeno, відображена на рис. 4.15.

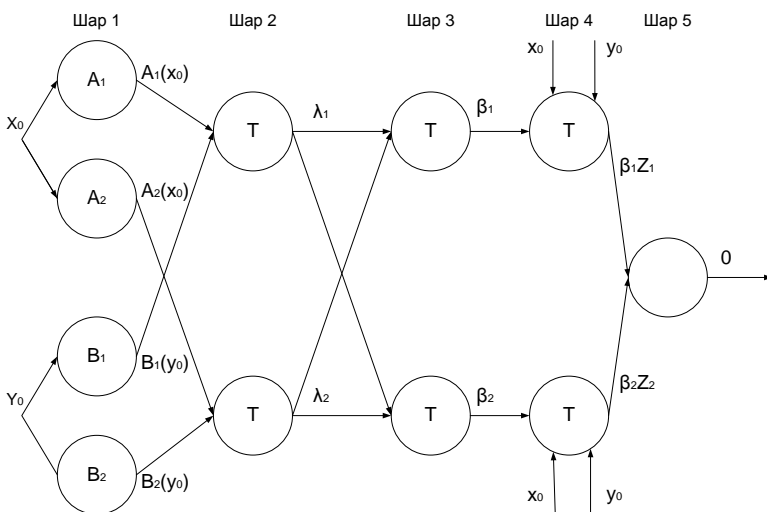


Рис. 4.15. Гібридна нейронна мережа

Для простоти враховуватимемо тільки два правила і два лінгвістичні значення для кожного вхідного параметра.

Рівень 1. Вихідний параметр вузла є ступенем відповідності даним вхідного параметра лінгвістичній мітці, зв'язаний з цим вузлом. Звичайно вибираються дзвоновидні функції належності, які визначають лінгвістичні терміни:

$$A_i(u) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u - a_{i1}}{b_{i1}} \right)^2 \right],$$

$$B_i(v) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{v - a_{i2}}{b_{i2}} \right)^2 \right],$$

де $\{a_{i1}, a_{i2}, b_{i1}, b_{i2}\}$ – множина параметрів.

Зі зміною значень цих параметрів відповідно змінюються дзвоновидні функції, набуваючи різних форм функцій належності для лінгвістичних міток A_i і B_i .

Насправді, будь-які безперервні функції належності, як і трапецієвидні та трикутні, теж квантифіковані варіантами вузлових функцій цього рівня. Параметри останнього належать до вихідних параметрів.

Рівень 2. Для кожного вузла обчислюється потужність впливу відповідного правила.

Вихідна інформація, що поміщається на вершину нейрона, складає:

$$\alpha_1 = A_1(x_0) * B_1(y_0) = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0),$$

а вихідна інформація основи нейрона –

$$\alpha_2 = A_2(x_0) * B_2(y_0) = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0).$$

Обидва вузли цього рівня мають мітку T , тому що можна вибрати інші t -норми для моделювання логічного оператора. Вузли рівня 2 називаються вузлами правил.

Рівень 3. Кожен вузол цього рівня має мітку N , указуючи на нормованість меж застосування правил.

Вихідна інформація вершини нейрона нормалізує межу застосування першого правила (при цьому здійснюється операція додавання і нормалізації нормованості межі):

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Вихідна інформація вагів нейрона нормує кінцеву функцію:

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Рівень 4. Вихідна інформація вершини нейрона є результатом нормованої межі застосування та окремого вихідного параметра першого правила:

$$\beta_1 z_1 = \beta_1(a_1 x_0 + b_1 y_0).$$

Вихідна інформація вершини нейрона є результатом нормованої межі застосування та окремого вихідного параметра другого правила:

$$\beta_2 z_2 = \beta_2(a_2 x_0 + b_2 y_0).$$

Рівень 5. Для окремого вузла цього рівня розраховується повна вихідна інформація як сума всіх вхідних сигналів, тобто:

$$o = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2.$$

Якщо задано нечітку навчаючу послідовність:

$$\{(x^k, y^k), k = 1, \dots, K\},$$

то параметри гібридної нейронної системи (яка визначає форму функцій належності вихідних умов) можуть бути вивчені за допомогою методу спуску.

Функція помилок для моделі k може бути задана таким чином:

$$E_k = \frac{1}{2} * (y^k - o^k)^2,$$

де y^k – бажаний результат, а o^k – експериментальне значення, отримане при обчисленні гібридної нейронної мережі.

Маємо *спрощену нечітку схему міркувань*: якщо характерна вихідна інформація правил задана crisp-числами, то можна використовувати їх вагову суму (де вага є firing-потужністю відповідних правил) для визначення повної вихідної інформації системи:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 : & \text{if } x_1 \text{ is } A_1 \text{ and } x_2 \text{ is } B_1 \text{ then } o = z_1 \\ & \dots\dots\dots \\ \mathfrak{R}_m : & \text{if } x_1 \text{ is } A_m \text{ and } x_2 \text{ is } B_m \text{ then } o = z_m \\ \text{fact} : & x_1 = u_1 \text{ and } x_2 = u_2 \\ \text{consequence} : & o = z_0, \end{aligned}$$

де A_{ij} – нечіткі множини.

Отримуємо значення z_0 з вихідного змісту бази даних $\{u_1, u_2\}$ і з бази правил нечіткої логіки, застосовуючи спрощену нечітку схему міркувань як середнє з вихідної інформації окремо взятих правил:

$$o = z_0 = \frac{z_1\alpha_1 + \dots + z_m\alpha_m}{\alpha_1 + \dots + \alpha_m},$$

де межа застосування i -го правила визначається так:

$$\alpha_i = A_i(u_1) \wedge B_i(u_2).$$

8.4.5. Налаштування нечітких параметрів управління за допомогою нейронних мереж

Нечіткі міркування застосовуються в багатьох галузях. Для реалізації нечіткого контролера необхідно визначити функції належності, що представляють лінгвістичні терміни лінгвістичних правил виведення.

Розглянемо лінгвістичний термін «приблизно один». Очевидно, що відповідна нечітка множина має бути унімодальною функцією з максимумом у точці 1. Для знаходження максимуму ні форма, яка може бути трикутною або гаусовською, ні діапазон значень, які визначають функцію належності, не дозволяють визначити поняття «приблизно один».

Як правило, головний експерт має певні міркування щодо діапазону значень функцій належності, але він може міркувати вже про дещо змінений діапазон.

У зв'язку з цим, налаштування функцій належності стає важливим питанням для нечіткого контролера. Далі задача налаштування може бути представлена як задача оптимізації нейронних мереж, а *генетичні алгоритми* надають можливі шляхи її розв'язання.

Прямий підхід полягає у визначенні точної форми функцій належності декількох змінних, які, в свою чергу, можуть бути вивчені за допомогою нейронної мережі.

Згідно з цією ідеєю, функції належності набувають вигляду функцій симетричних трикутників, залежних від двох параметрів, один з яких визначає максимум такої функції, а другий – задає ширину основи функції (рис. 4.16).

Обидва підходи вимагають багатьох експериментальних даних у вигляді правильних кортежів входу / виходу і докладного опису правил, який містить попереднє визначення відповідних функцій належності.

Опишемо простий метод навчання функцій належності антецедента (попередній член відношення) і консеквента (подальший член відношення) нечітких правил IF-THEN.

Передбачається, що невідоме нелінійне відображення, виконуване нечіткою системою, може бути представлено в такому вигляді:

$$y^k = f(x^k) = f(x^k, \dots, x_n^k),$$

для $k = 1, \dots, K$, тобто є наступна навчаюча послідовність:

$$\{(x^1, y^1), \dots, (x^k, y^k)\}.$$

Для моделювання невідомого відображення f застосуємо спрощене нечітке правило IF-THEN такого вигляду:

$$\mathcal{R}_1 : \text{if } x_1 \text{ is } A_{i1} \text{ and...and } x_n \text{ is } A_{i1} \text{ then } o = z_i,$$

$i = 1, \dots, m$, де A_{ij} – нечіткі числа трикутної форми, а z_i – дійсні числа.

У цьому випадку слово «спрощене» означає, що вихідна інформація правил виходу подається crisp-числами і тому стає можливим використання вагової суми (де ваги є потужностями впливу відповідних правил) для отримання загальної вихідної інформації системи.

Припустимо, що o – це вихід нечіткої системи і відповідає входу x . Відповідно, firing-рівень i -го правила, позначений через α_i , визначається оператором добутку таким чином:

$$\alpha_i = \prod_{j=1}^n A_{ij}(x_j),$$

а вихід системи обчислюється як

$$o = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_i}.$$

Найчастіше помилка для k -го навчаючого образу задається формулою

$$E = \frac{1}{2}(o - y)^2,$$

де o – розрахований вихід нечіткої системи \mathfrak{R} , відповідний вхідному образу x , а y – бажаний результат.

Метод найшвидшого спуску застосовується для навчання z_i у консеквентній частині нечіткого правила \mathfrak{R}_1 , тобто:

$$z_i(i+1) = z_i(t) - \eta \frac{\partial E}{\partial z_i} = z_i(t) - \eta(o - y) \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_m},$$

для $i=1, \dots, m$, де m – навчаюча константа, а t показує кількість регулювань z_i . Проілюструємо описаний вище процес налаштування на простому прикладі (див. рис. 4.16).

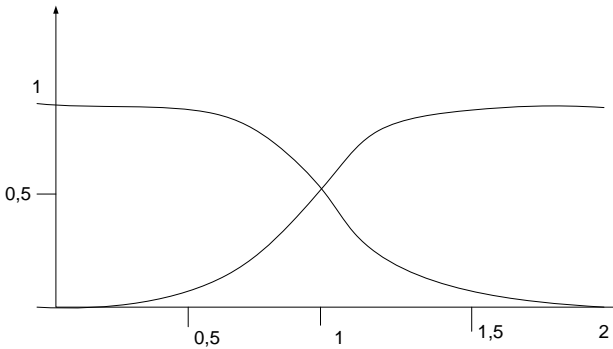


Рис. 4.16. Симетрична функція належності

Нехай задано два нечіткі правила з одним вхідним і одним вихідним параметрами:

$\mathfrak{R}_1 : \text{if } x \text{ is } A_1 \text{ then } o = z_1;$

$\mathfrak{R}_2 : \text{if } x \text{ is } A_2 \text{ then } o = z_2,$

де нечіткі області A_1 *SMALL* і A_2 *BIG* мають сигмовидні функції належності вигляду:

$$A_1(x) = \frac{1}{1 + \exp(-b(x - a))},$$

$$A_2(x) = \frac{1}{1 + \exp(b(x - a))}.$$

Тут a і b – параметри A_1 і A_2 .

У цьому випадку рівняння $A_1(x) + A_2(x) = 1$ справедливе для всіх областей A_1 і A_2 .

Загальний вихід системи обчислюється за формулою:

$$o = \frac{A_1(x)z_1 + A_2(x)z_2}{A_1(x) + A_2(x)}.$$

Вагові коефіцієнти визначаються таким чином:

$$z_1(t+1) = z_1(t) - \eta \frac{\partial E}{\partial z_1} = z_1(t) - \eta(o - y)A_1(x),$$

$$z_2(t+1) = z_2(t) - \eta \frac{\partial E}{\partial z_2} = z_2(t) - \eta(o - y)A_2(x^k),$$

$$\alpha(t+1) = \alpha(t) - \eta \frac{\partial E(a,b)}{\partial a},$$

$$b(t+1) = b(t) - \eta \frac{\partial E(a,b)}{\partial b},$$

де

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial a} = (o - y) \frac{\partial o^k}{\partial a} = (o - y) \frac{\partial}{\partial a} [z_1 A_1(x) + z_2 A_2(x)] =$$

$$= (o - y) \frac{\partial}{\partial a} [z_1 A_1(x) + z_2 (1 - A_1(x))] = (o - y)(z_1 - z_2) b A_1(x) A_2(x);$$

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial b} = (o - y)(z_1 - z_2) \frac{\partial A_1(x)}{\partial b} = -(o - y)(z_1 - z_2)(x - a) A_1(x) A_2(x).$$

Це означає, що чим більше нечітких термінів (отже, правил) використовується в базі правил, тим ближчим буде вихідний параметр до потрібних значень функції, що апроксимується.

8.4.6. Нейро-нечіткі класифікатори

Звичайний підхід до класифікації моделей включає кластеризацію навчаючих зразків і зіставлення (порівняння) кластерів з даними кате-

горіями. Складність і обмеженість попереднього механізму більшою мірою стосуються відсутності ефективного шляху визначення граничних областей між кластерами.

Ця проблема стає найскладнішою у випадку збільшення кількості властивостей, покладених в основу класифікації.

Навпаки, нечітка класифікація припускає, що границя між двома сусідніми класами є безперервною з областю, яка перекриває і в якій будь-який об'єкт частково наявний у кожному з класів. Ця точка зору не тільки відповідає багатьом реальним застосуванням, у яких категорії мають нечіткі границі, а й забезпечує просте представлення можливого ділення множини простору властивостей.

Нечіткі правила IF-T застосовуються для стислого опису класифікатора. Припустимо, що K структури $x_p = (x_{p1}, \dots, x_{pn})$, $p = 1, \dots, K$ задані з двох класів, де x_p – n -вимірний нечіткий вектор. Типова нечітка класифікація правил для $n = 2$:

if x_{p1} is SMALL and x_{p2} is VERY LARGE then $x_p = (x_{p1}, x_{p2})$ belongs to Clas C_1 ;

if x_{p1} is LARGE and x_{p2} is VERY SMALL then $x_p = (x_{p1}, x_{p2})$ belongs to Clas C_2 ,

де x_{p1} і x_{p2} – властивості моделі (або об'єкта) p , *SMALL* і *VERY LARGE* – лінгвістичні терміни, що характеризуються відповідними функціями належності.

Межа застосування правила:

\mathfrak{R}_1 : *if x_{p1} is A_i and x_{p2} is B_i then $x_p = (x_{p1}, x_{p2})$ belongs to Class C_i .*

Що ж до об'єкта x_{p1} , то він інтерпретується як *ступінь належності x_{p1} до C_i* .

Тут межа застосування, позначена через α_i , зазвичай визначається так:

$$\alpha_i = A_i(x_{p1}) \wedge A_2(x_{p2}),$$

де \wedge – трикутна норма, що моделює логічний сполучник «і».

По суті, нечітке правило дає смисловий вираз якісних сторін людської свідомості.

Грунтуючись на результатах зіставлення антецедентів правил і вхідних сигналів, ряд нечітких правил запускається паралельно з різними значеннями потужностей впливу.

Окремо виконані дії об'єднуються за допомогою комбінаційної логіки. Більше того, необхідно, щоб система мала здатність до навчан-

ня при оновленні і до тонкого налаштування самої себе на основі нової інформації, яка продовжує надходити.

Задача нечіткої класифікації полягає в створенні відповідного нечіткого поділу простору властивостей. У цьому випадку слово «відповідного» означає, що набір неправильно класифікованих моделей дуже малий або відсутній.

База правил має бути поліпшена за рахунок видалення невживаних правил.

Проблема двокласної класифікації представлена на рис. 4.17. Припустимо, що нечіткий поділ для кожної вхідної властивості складається з трьох лінгвістичних термінів

$$\{SMALL, MEDIUM, BIG\},$$

які описуються трикутними функціями належності.

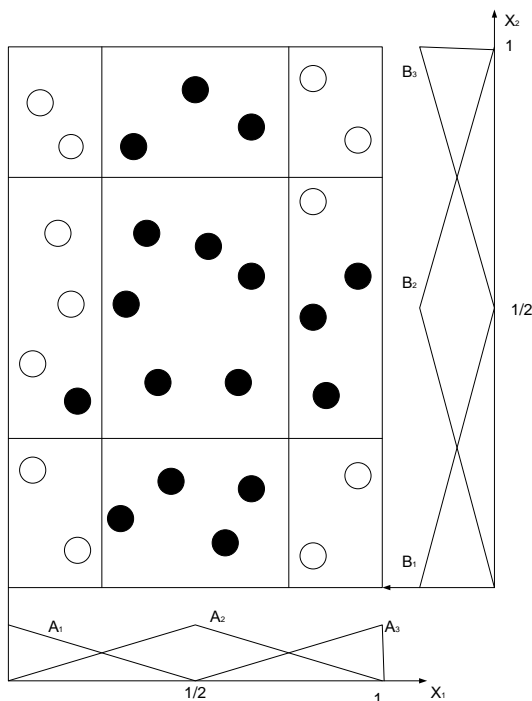


Рис. 4.17. Вихідні нечіткі поділи дев'ятьма нечіткими підпросторами та двома неправильно класифікованими моделями. Замальовані та порожні кружальця відображають моделі, відповідно, класу 1 та класу 2

Обидва вихідні нечіткі поділи на рис. 4.17 задовольняють повноті значенням 0,5 кожного вхідного параметра, а модель x_p класифікована в класі j , якщо існує хоча б одне правило для класу j у базі правил, потужність впливу яких (що визначається мінімумом r -норми) стосовно x_p більша або дорівнює 0,5.

Отже, правило створюється за знайденою для даної вхідної моделі x_p комбінації нечітких множин, кожна з яких має високий ступінь належності до відповідної вхідної властивості. Якщо ця комбінація не співпадає з антецедентами вже існуючого правила, тоді створюється нове правило.

Проте створення правила може відбутись і у випадку неправильно виконаного нечіткого поділу або у випадку недостатньої кількості лінгвістичних термінів для вхідних властивостей. Тоді деякі моделі можуть бути класифіковані помилково.

Наступні дев'ять правил можуть бути створені з початкових нечітких поділів, показаних на рис. 4.17:

\mathcal{R}_1 : if x_1 is *SMALL* and x_2 is *BIG* then $x_p = (x_1, x_2)$ belongs to Class C_1 ;

\mathcal{R}_2 : if x_1 is *SMALL* and x_2 is *MEDIUM* then $x_p = (x_1, x_2)$ belongs to Class C_1 ;

\mathcal{R}_3 : if x_1 is *SMALL* and x_2 is *SMALL* then $x_p = (x_1, x_2)$ belongs to Class C_1 ;

\mathcal{R}_4 : if x_1 is *BIG* and x_2 is *SMALL* then $x_p = (x_1, x_2)$ belongs to Class C_1 ;

\mathcal{R}_5 : if x_1 is *BIG* and x_2 is *BIG* then $x_p = (x_1, x_2)$ belongs to Class C_1 ;

\mathcal{R}_6 : if x_1 is *MEDIUM* and x_2 is *SMALL* then $x_p = (x_1, x_2)$ belongs to Class C_2 ;

\mathcal{R}_7 : if x_1 is *MEDIUM* and x_2 is *MEDIUM* then $x_p = (x_1, x_2)$ belongs to Class C_2 ;

\mathcal{R}_8 : if x_1 is *MEDIUM* and x_2 is *BIG* then $x_p = (x_1, x_2)$ belongs to Class C_2 ;

\mathcal{R}_9 : if x_1 is *BIG* and x_2 is *MEDIUM* then $x_p = (x_1, x_2)$ belongs to Class C_2 ,

де використовуються лінгвістичні терміни *SMALL* для A_1 і B_1 , *MEDIUM* для A_2 і B_2 та *BIG* для A_3 і B_3 .

Проте такий же рівень помилок може бути досягнутий міркуванням: якщо x_1 — *MEDIUM*, тоді модель (x_1, x_2) належить класу 2 незалежно від значення x_2 , тобто наступні сім правил дають той же результат класифікації:

\mathcal{R}_1 : if x_1 is *SMALL* and x_2 is *BIG* then x_p belongs to Class C_1 ;

\mathcal{R}_2 : if x_1 is *SMALL* and x_2 is *MEDIUM* then x_p belongs to Class C_1 ;

\mathcal{R}_3 : if x_1 is *SMALL* and x_2 is *SMALL* then x_p belongs to Class C_1 ;

\mathfrak{R}_4 : if x_1 is *BIG* and x_2 is *SMALL* then x_p belongs to Class C_1 ;

\mathfrak{R}_5 : if x_1 is *BIG* and x_2 is *BIG* then x_p belongs to Class C_1 ;

\mathfrak{R}_6 : if x_1 is *MIDIUM* then x_p belongs to Class C_2 ;

\mathfrak{R}_7 : if x_1 is *BIG* and x_2 is *MEDIUM* then x_p belongs to Class C_2 .

Рисунок 4.18 демонструє приклад нечітких поділів (три лінгвістичні терміни для першої вхідної властивості та п'ять – для другої), які коректно класифікують моделі.

Sun Ch.-T. і Jang J.-S.R. у своїй праці «A neuro-fuzzy classifier and its applications» (1993) пропонують нечіткий класифікатор на основі адаптивної мережі для розв'язання проблем нечіткої класифікації.

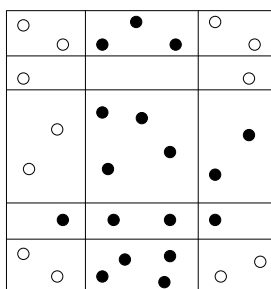


Рис. 4.18. Приклад нечіткого поділу

На рис. 4.19 показано архітектуру такого класифікатора з двома вхідними параметрами x_1 і x_2 . Навчаючі дані поділяються на два класи: C_1 і C_2 , кожен вхід представлено двома лінгвістичними термінами; таким чином ми отримуємо чотири правила.

Рівень 1. Вихідний параметр вузла є ступенем відповідності цього вхідного параметра лінгвістичній мітці, пов'язаній з цим вузлом.

Зазвичай вибираються дзвоновидні функції належності, які визначають лінгвістичні терміни:

$$A_1(u) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u - a_{i1}}{b_{i1}} \right)^2 \right],$$

$$A_2(v) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{v - a_{i2}}{b_{i2}} \right)^2 \right],$$

де $\{a_{i1}, a_{i2}, b_{i1}, b_{i2}\}$ – множина параметрів.

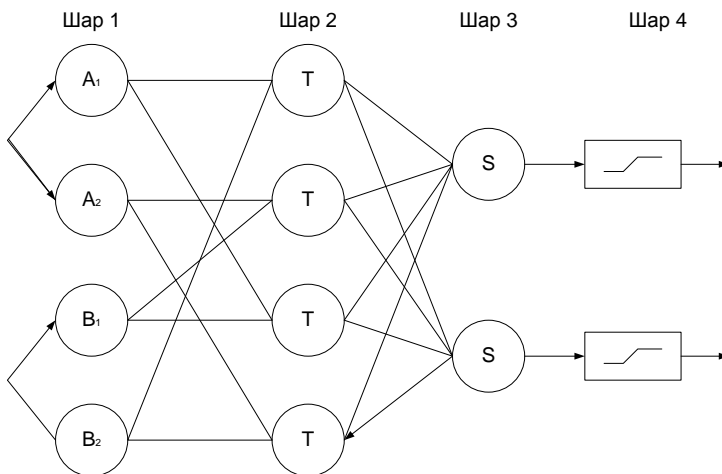


Рис. 4.19. Архітектура нечіткого класифікатора

За зміною значень цих параметрів відповідно змінюються дзвоновидні функції, набуваючи різних форм функцій належності для лінгвістичних міток A_i і B_i .

Рівень 2. Кожен вузол створює сигнал, відповідний кон'юнктивній комбінації окремих ступенів відповідності. Вихідний сигнал – це потужність впливу нечіткого правила на об'єкт, який має бути класифікований.

Оскільки не існує єдиного оператора, який може бути застосовним для всіх застосувань, то для розгляду цієї динамічної властивості побудови класифікатора можна використовувати параметризовані t -норми.

Всі вузли цього рівня позначаються міткою T , оскільки є можливість вибрати будь-яку t -норму для моделювання логічного оператора i . Вузли цього рівня називаються вузлами правила.

Властивості можуть бути поєднані шляхом компенсації. Наприклад, можна використовувати узагальнений p -mean, запропонований Dycckhoff і Pedrycz:

$$\left(\frac{x^p + y^p}{2} \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Візьмемо лінійну комбінацію потужностей впливу правил рівня 3 і застосуємо сигмоїдальну функцію рівня 4 для розрахунку ступеня належності до певного класу.

Якщо задано навчаючу множину

$$\{(x^k, y^k), \quad k = 1, \dots, K\},$$

де x^k належить до k -ї вхідної моделі і

$$y^k = \begin{cases} (1,0)^T & \text{if } x^k \text{ belongs to Class1} \\ (0,1)^T & \text{if } x^k \text{ belongs to Class2} \end{cases},$$

тоді параметри гібридної нейронної мережі (які визначають форму функцій належності до початкових умов) можуть бути вивчені за допомогою методів спуску.

Функція помилки для моделі може бути визначена як:

$$E_k = \frac{1}{2} [(o_1^k - y_1^k)^2 + (o_2^k - y_2^k)^2],$$

де y^k – бажаний вихід, а o^k – обчислений результат гібридної нейронної мережі.

8.5. Об'єктно-орієнтовані технології

В економічних системах виникає необхідність розглядати такі поняття, як стан системи, ситуації, планування. Ці процеси підтримуються інформаційними системами, які часто оперують неповною або неточною інформацією. Для адекватного опису понять «віра», «знання», «можливий стан», «плани», «майбутній стан системи» використовуються такі розділи математики: модальна логіка, семантика «можливих світів» Кріпке, немонотонна логіка, тимчасова логіка, епістемічна логіка (або логіка знання) і, нарешті, концепція активного агента. Немонотонність логіки дозволяє змінювати склад її аксіом у міру надходження нових знань.

При визначенні поняття «агент» зручно спиратися на уявлення про об'єкт, розвинений школою об'єктно-орієнтованого програмування (ООП). Тоді штучний агент може уявлятися як метаоб'єкт, наділений певною мірою суб'єктивності, тобто здатний маніпулювати іншими об'єктами, створювати і знищувати їх, а також має розвинені засоби взаємодії з середовищем і схожими на себе. Інакше кажучи, це «активний об'єкт» або «штучний діяч», який знаходиться на помітно більш високому рівні складності порівняно з традиційними об'єктами в ООП і використовує їх для досягнення своїх цілей управління, змінюючи їхні стани.

Відповідно, мінімальний набір базових характеристик довільного агента включає такі властивості:

а) активність, здатність до організації та реалізації дій;

б) автономність (напівавтономність), відносна незалежність від навколишнього середовища або наявність певної «свободи волі», достатнє ресурсне забезпечення його поведінки;

в) комунікабельність, яка впливає з необхідності вирішувати свої задачі спільно з іншими об'єктами і забезпечується розвиненими протоколами комунікації;

г) цілеспрямованість, яка передбачає наявність власних джерел мотивації, а у більш широкому плані – спеціальних інтенційних характеристик. Таке уявлення близьке до одного з найвідоміших визначень поняття «агент» у М. Вулдріджа і Н. Дженнінгса. Вони вважають, що агент – це програмно або апаратно реалізована система, яка має такі властивості:

- *автономність* – здатність функціонувати без прямого втручання людей або комп'ютерних засобів і при цьому здійснювати самоконтроль над своїми діями і внутрішніми станами;
- *суспільна поведінка* (social ability), тобто здатність взаємодії з іншими агентами (а, можливо, людьми), обмінюючись повідомленнями за допомогою мов комунікації;
- *реактивність* – здатність сприймати стан середовища (фізичного світу, користувача) через призначений для користувача інтерфейс, сукупність інших агентів, мережа Internet, або відразу все з цих компонентів зовнішнього середовища;
- *цілеспрямована активність* (pro-activity) – здатність агента не просто реагувати на стимули, що надходять із середовища, а й здійснювати цілеспрямовану поведінку, виявляючи ініціативу.

Розв'язання задачі одним агентом на основі інженерії знань є точкою зору класичного штучного інтелекту (ШІ), згідно з якою агент (наприклад, інтелектуальна система), володіючи глобальним баченням проблеми, має всі необхідні здібності, знання і ресурси для її вирішення. І навпаки, в розподіленому штучному інтелекті (РШІ) і взагалі в області МАС передбачається, що окремий агент може мати лише часткове уявлення про загальну задачу і здатний розв'язати лише якусь її підзадачу. Тому для розв'язання більш-менш складної проблеми, як правило, потрібна взаємодія агентів, яка невіддільна від організації мультиагентної системи (МАС). Цей соціальний (колективний) аспект розв'язання задач – одна з фундаментальних характеристик концептуальної новизни передових комп'ютерних технологій у штучних (віртуальних) організаціях.

Саме поширення різних мереж породжує «розподілений» погляд на світ. Розвиток мобільних комп'ютерних засобів, коли вся інформація і ресурси її обробки розподілені між різними вузлами мережі, вимагає перегляду класичних моделей обчислень, заснованих на однопотоко-

вій, послідовній машині фон Неймана, і прийняття нових концепцій обчислювального простору, наприклад, концепції «гігантської павутини», як у випадку WWW або «обчислювального поля» за аналогією з фізичними полями.

Об'єкт (як реалізація фрейма за М. Мінським) має єдине ім'я і свої власні дані та процедури. Об'єкт може складатися з декількох так само визначених об'єктів і, в свою чергу, бути частиною більш крупного об'єкта. Об'єкти містять слоти, які, знову ж таки, можуть складатися з фактів. Слот може бути просто атрибутом або відношенням. Усі дії в ООП виконуються через повідомлення (але повідомлення вказують об'єкту, *що* робити, але не *як* робити). В цілому, поняття об'єкта визначається за допомогою чотирьох ознак:

- а) інкапсуляція;
- б) відношення «клас–приклад»;
- в) властивість спадкоємності;
- г) проходження повідомлень, що допускають визначення поліморфних процедур, тобто процедур, код яких може розрізнятися залежно від приймача повідомлення.

Об'єкти не можуть аналізувати свою поведінку, визначати характер зв'язків з іншими об'єктами або природу адресованих їм повідомлень. Їхній механізм отримання повідомлень зводиться до виклику процедури. А головне, вони не можуть самостійно формувати цілі.

Наявність у агента механізму цілеутворення забезпечує принципово новий рівень автономії. Це означає, що він не обов'язково виконує розпорядження якогось іншого агента, а просто залежить від умов середовища, включаючи цілі та наміри інших агентів. На відміну від об'єкта, агент може взяти на себе певні зобов'язання або, навпаки, відмовитися від виконання певної роботи, мотивуючи це відсутністю компетентності, зайнятістю іншою задачею і т. ін. В той же час агент може виконувати такі дії, як створення, придушення і заміна інших агентів, активізація функція (як своїх, так і в інших агентів), активізація сценарію діяльності, запам'ятовування поточного стану інших агентів та ін.

Концепція агентів передбачає звернення до низки нових для фахівців з інформатики та штучного інтелекту (ШІ) понять – із психології та соціології та, в першу чергу, понять з теорії діяльності та теорії комунікації. При цьому діяльність і інтелект розуміються як процеси, рекурсивно залежні один від одного, що забезпечує їхнє створення і реалізацію.

Різні визначення поняття «агент» поділяються на «слабкі» і «сильні», програмістські і антропоморфні.

За М. Коеном, агенти – це програми, які мають взаємні зобов'язання, що визначаються в процесі діалогу, ведуть переговори і коор-

динують передачу інформації. Тут очевидно, що переговорний процес передбачає наявність сприйняття і дії, а діалог неможливий без засобів комунікації. Агенти володіють наполегливістю, що пов'язана з наявністю своїх власних уявлень про те, як розв'язувати задачу, або своїх особистих програм дій.

Віртуальних агентів (тобто існуючих тільки в програмному середовищі) нерідко називають «програмними роботами» (software robots), або скорочено – софтбот (softbot). Софтбот – це, як правило, мобільний пошуковий агент. Але іноді такі мобільні софтботи (мотоботи) можуть трактуватися як розподілені, суто комунікативні агенти, які не мають власних засобів сприйняття і дій (тому вони не маніпулюють ніякими об'єктами), а лише використовують ресурси, що розташовуються, для комунікації з іншими агентами та міграції по мережі у пошуках релевантних даних і процедур.

Інтелектуальних агентів називають також когнітивними. Когнітивний агент, завдяки розвиненим внутрішнім уявленням про зовнішнє середовище і здатності до мислення, може аналізувати різні ситуації, передбачати можливі реакції на свої дії, робити з цього висновки, корисні для подальших дій, і, в результаті, планувати свою поведінку. Саме інтелектуальні здібності дозволяють таким агентам будувати віртуальні світи, працюючи в яких, вони формують плани дій. Більшість інтелектуальних (когнітивних) агентів можна віднести до числа інтенційних. Такі агенти наділені власним механізмом мотивації.

Агент може відповідати на запитання, виконувати завдання, які ставлять перед ним інші агенти, але розв'язання цих задач не приводить до появи у них власних цілей. Типовим прикладом таких вироджених агентів є системи пошуку в базах даних і найпростіші логічні регулятори.

Підводячи підсумок сказаному, можна сказати, що є сильне і слабе визначення агента. Під інтелектуальним агентом (ІА) у слабкому значенні розуміється програмно або апаратно реалізована система, яка має такі властивості:

- автономність – здатність ІА функціонувати без втручання людини і при цьому здійснювати контроль над своїми діями і внутрішнім станом;
- суспільна поведінка (social ability) – здатність функціонувати спільно з іншими агентами, обмінюючись із ними повідомленнями за допомогою мови комунікацій;
- реактивність (reactivity) – здатність сприймати стан середовища і своєчасно відповідати (реагувати) на ті зміни, які в ньому відбуваються;
- активність (pro-activity) – здатність агента брати на себе ініціа-

тиву, тобто здатність генерувати цілі та діяти раціонально для їх досягнення, а не тільки реагувати на зовнішні події.

Сильне визначення агента передбачає доповнення щойно перерахованих характеристик ще низкою якостей. Зокрема, головною з них є наявність у агента хоча б якоїсь підмножини так званих «ментальних властивостей» (інтенційних понять), до яких належать такі:

- знання (knowledge) – постійна частина знань агента про себе, середовище та інших агентів, яка не змінюється в процесі його функціонування;
- переконання (beliefs) – змінні знання агента про себе і середовище, зокрема про інших агентів (це ті знання, які можуть змінюватися в часі, проте агент може не мати про це інформації і продовжувати залишатися переконаним, що на них можна засновувати свої висновки);
- бажання (desires) – стани або ситуації, досягнення яких з різних причин є для агента бажаними, проте вони можуть бути суперечливими і тому агент не чекає, що всі вони будуть досягнуті;
- наміри (intensions) – те, що агент має зробити через свої зобов'язання щодо інших агентів (йому це доручено, і він узяв задачу на себе), або те, що впливає з його бажань (тобто несуперечлива велика кількість бажань, вибрана з тих чи інших причин, яка є сумісною з прийнятими на себе зобов'язаннями);
- цілі (goals) – конкретна множина скінченних і проміжних станів, досягнення, які агент прийняв у якості поточної стратегії поведінки;
- зобов'язання щодо інших агентів (commitments) – задачі, які агент бере на себе на прохання інших агентів у рамках кооперативних цілей або цілей окремих агентів у процесі їхньої співпраці.

Перші два з наведених понять називають «позицією агента», його «точкою зору» (attitudes), інші характеризуються в англomовній літературі загальним терміном «pro-attitude», суть якого полягає в тому, що вони «направляють» поведінку агента так, щоб зробити відповідні цьому терміну змістовні та формальні твердження істинними.

8.5.1. Архітектура агента

Основна ідея архітектури полягає в тому, щоб представити агента як множину рівнів, які зв'язані через управляючу структуру і використовують загальну базу знань. Це архітектура представлена на рис. 4.20.

Вона складається з п'яти основних блоків: інтерфейсу із зовнішнім світом; компоненти, заснованої на поведінці; плануючої компоненти;

компоненти, відповідальній за кооперацію з іншими агентами, і бази знань агента. Інтерфейс із зовнішнім світом визначає можливості агента зі сприйняття подій зовнішнього світу, впливи на нього і засоби комунікації.

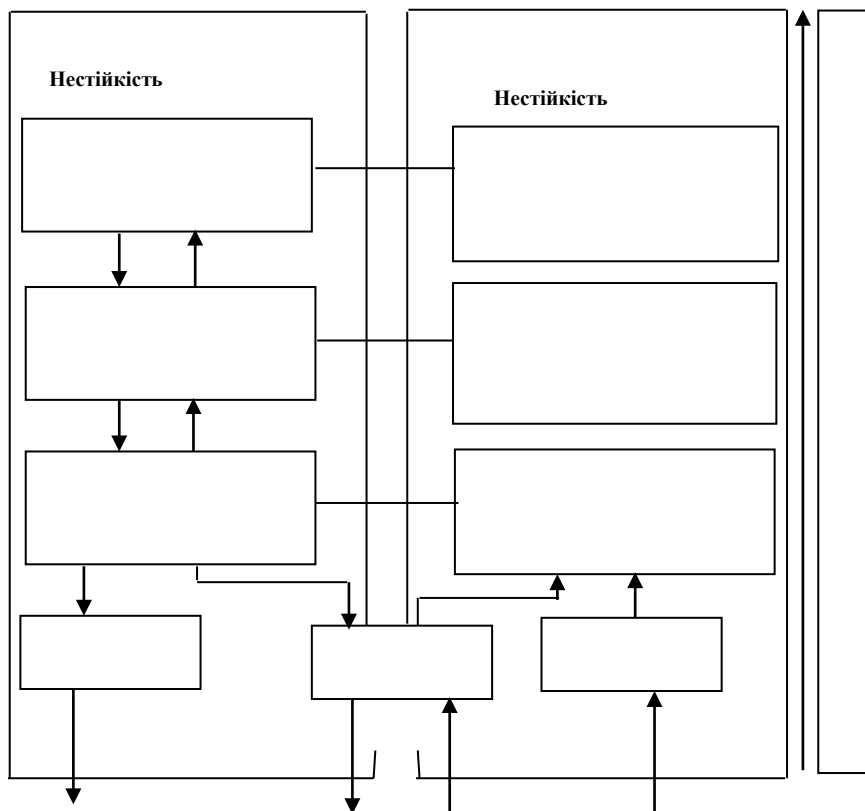


Рис. 4.20. Архітектура агента

Компонента, відповідальна за реактивну поведінку, використовує базові можливості агента з реактивної поведінки і, частково, його знання процедурного характеру. Вона базується на понятті «фрагмента поведінки» – як деяких наперед заготовлених реакцій агента на деякі стандартні ситуації. Це дозволяє агенту в стандартних ситуаціях не звертатися до планування на основі знання і реалізовувати значну частину своєї поведінки рутинним чином з достатньою ефективністю. З бази знань цієї компоненти доступні тільки знання нижнього рівня абстракції, де міститься інформація про фрагменти поведінки.

Компонента, відповідальна за планування, містить механізм планування, що дозволяє будувати локальні плани агента, тобто плани, не пов'язані з кооперативною поведінкою. План представляється у вигляді графа, вузлами якого можуть бути або конкретні набори дій аж до елементарних кроків поведінки, або нові субплани, що підлягають подальшій конкретизації. Отже, плануюча компонента активує поведінку (через компоненту, яка лежить нижче), що направляється цілями. Вона ж бере участь і в плануванні, пов'язаному з кооперативною поведінкою агентів. Ця компонента може використовувати знання двох нижніх рівнів абстракції.

Компонента, відповідальна за кооперацію агентів, бере участь у конструюванні планів спільної поведінки агентів для досягнення деяких загальних цілей або виконання своїх зобов'язань перед іншими агентами, а також виконання угод. Цій компоненті доступні всі значення всіх трьох рівнів абстракції.

8.5.2. Мультиагентні системи (МАС) і віртуальні організації

Будь-яка багатоагентна система (МАС) складається з наступних основних компонентів:

- 1) множина організаційних одиниць, в якій виділяються підмножини агентів 1а), маніпулюючих підмножинами об'єктів 1б);
- 2) множина задач;
- 3) середовище, тобто якийсь простір, у якому існують агенти і об'єкти;
- 4) множина відносин між агентами;
- 5) множина дій агентів (наприклад, операцій між об'єктами).

У МАС задачі розподілені між агентами, кожен з яких розглядається як член групи або організації. Розподіл задач передбачає призначення ролей кожному з членів групи, визначення міри його відповідальності та вимог до досвіду.

Основним напрямом у розробці МАС є розподілений штучний інтелект (РШІ). Ядро РШІ складають дослідження взаємодії та кооперації незначного числа інтелектуальних агентів, наприклад класичних інтелектуальних систем, що включають бази знань і вирішувачі. Головною проблемою РШІ є розробка інтелектуальних груп і організацій, здатних розв'язувати задачі шляхом міркувань, пов'язаних з обробкою символів. Іншими словами, тут колективна інтелектуальна поведінка утворюється на основі індивідуальних інтелектуальних поведінок. Це передбачає узгодження цілей, інтересів і стратегій різних агентів, координацію дій, розв'язання конфліктів шляхом переговорів; теоретичну базу тут складають результати, отримані у психології малих груп і соціології організацій.

Важливим розділом РШП є кооперативне розподілене розв'язування задач. Йдеться про мережу слабо зв'язаних між собою вирішувачів, які спільно працюють з метою розв'язання задач, що виходять за рамки індивідуальних можливостей. Різні вузли такої мережі, як правило, мають неоднаковий досвід (знання, точки зору) і різні ресурси. Кожен вузол має бути здатним модифікувати свою поведінку залежно від обставин, а також планувати свої стратегії комунікації та кооперації з іншими вузлами. Тут показниками рівня кооперації є: характер розподілу задач, об'єднання різних точок зору у кінці, можливість вирішення загальної проблеми за заданий час.

Розподілене розв'язування (вирішення) задач декількома агентами розбивається на такі етапи:

- 1) агент-менеджер (центральний орган) здійснює декомпозицію вихідної проблеми на окремі задачі;
- 2) ці задачі розподіляються між агентами-виконавцями;
- 3) кожен агент-виконавець розв'язує свою задачу, іноді також розділяючи її на підзадачі;
- 4) для отримання загального результату здійснюється композиція, інтеграція окремих результатів, відповідних виділеним задачам.

Взаємодія агентів – це перше, що постає перед нами, коли ми говоримо про МАС. Взаємодія означає встановлення двосторонніх динамічних відносин між агентами. При цьому воно є одночасно джерелом і продуктом якоїсь організації. Іншими словами, взаємодія є не тільки наслідком якихось дій у МАС, виконуваних агентами в один і той же час, але й необхідною умовою формування соціальних організацій.

Координована співпраця означає, що агенти мають погоджувати свої дії (можливо, за допомогою спеціального агента-координатора), щоб продуктивно використовувати наявний досвід і ресурси.

Індивідуальне суперництво за ресурси є класичним варіантом конфліктної ситуації, коли кожен агент хоче монополізувати наявні спільні ресурси. У випадку суто колективного суперництва, агентам, що мають різні індивідуальні цілі, але недостатній досвід для їх досягнення, доводиться об'єднуватися в коаліції. При цьому спочатку відбувається формування груп агентів, а потім починається суперництво між цими групами. І нарешті, колективне суперництво за ресурси, тобто ситуація, яка комбінує колективне суперництво та індивідуальні конфлікти за ресурси, є найпродуктивнішим випадком конфліктної ситуації з погляду функціонування МАС, оскільки конкуруючі групи сприяють ліквідації монополій і розширенню ринку послуг.

Поняття кооперації агентів відіграє центральну роль у МАС. Кооперація – це основна форма організації взаємодії між агентами, яка характеризується об'єднанням їхніх зусиль для досягнення спільної

мети при одночасному розподіленні між ними функцій, ролей та обов'язків. У загальному випадку це поняття можна визначити формулою: кооперація = співпраця + координація дій + вирішення (розв'язання) конфліктів.

Більш детально рівень кооперації агентів у МАС можна визначити на основі таких показників:

- 1) високий ступінь розподілу ресурсів (у тому числі знань);
- 2) уникнення (або коротка тривалість) конфліктів;
- 3) координація дій, яка включає узгодження дій агентів у просторі та часі;
- 4) високий рівень паралелювання (поєднання) задач, вирішуваних різними агентами;
- 5) ненадмірність дій, досить незначне число дій, які дублюють, повторюють одна одну;
- 6) стійкість, що розуміється як здатність МАС витримати відмову або втрату агента.

Механізм опосередкованої комунікації реалізовується за допомогою архітектури «дошки оголошень» (blackboard). Тут основна ідея полягає у відтворенні взаємодії декількох агентів за допомогою дошки оголошень, на якій написано всі відомі дані та вказано задачі, які вирішуються.

У принципі, модель дошки оголошень складається з трьох частин:

- а) джерел знань;
- б) структура даних типу дошки оголошень;
- в) управляюча компонента.

У побудованих таким чином розподілених інтелектуальних системах бази знань розбиваються на окремі незалежні модулі знань, орієнтовані на конкретну задачу і відповідні компетенції чинного агента. Нерідко модулі знань розділяються на два основні класи:

- 1) модулі стратегій, які використовуються для планування та управління процесом прийняття рішення задачі;
- 2) модулі тактик (активації правил), які забезпечують реалізацію стратегій та виконання дій.

Загальна архітектура дошки оголошень не накладає ніяких обмежень на спосіб представлення знань. Ці модулі можуть функціонувати на основі правил, фреймів, мереж, сценаріїв і т. д., а можуть бути і простими інтерфейсами для звичайних алгоритмічних програм. Когнітивні агенти як джерела знань не беруть участі в їхній поточній обробці – вони мають декларативні знання і метазнання, що використовуються в модулях знань.

Спеціальний клас джерел знань утворює схему знань, аналогічну схемі баз даних. Ці джерела реалізують механізм збереження мета-

знань, які описують модулі знань. Метазнання визначають за тим, як вони співвідносяться з контекстом та іншими модулями знань. По суті, метазнання – це декларативні знання, які описують процес розв’язання задачі та знаходяться на верхньому рівні інтелектуальної системи.

Дошка оголошень повинна містити область проходження повідомлень, інформацію про процес розв’язання задачі та стан агентів. Область повідомлень забезпечує механізм комунікації, обміну запитами для різних модулів знань. У найпростішому випадку дошка оголошень має статичну структуру, що включає слоти для всіх модулів знань, і розбита на рівні, які відображають різні ступені абстракції та задачі, що вирішується. У слоти поміщається опис різних гіпотез і варіантів комунікації. При роботі інтелектуальної системи різні модулі знань незалежно породжують, обновляють і оцінюють гіпотези, що стосуються проблемної області.

З дошкою оголошень пов’язаний також спеціальний модуль – схема дошки оголошень, що охоплює декларативні знання про вміст організації та використання дошки оголошень. У цьому модулі також зберігається інформація про те, які модулі знань мають справу з різними слотами. Ця інформація служить для інтеграції різних компонентів системи. Таким чином забезпечується механізм інтерпретації дошки оголошень і посилення нових повідомлень.

Відповідно до цього підходу, базова операційна стратегія спільної роботи агентів на основі дошки оголошень полягає у висуненні та обґрунтуванні гіпотез (припущень). Різні агенти (джерела знань) визначають, як сформулювати і довести гіпотезу (стратегічний рівень) і, далі, як здійснити її покрокову верифікацію (тактичний рівень). Механізм виведення складається з двох компонентів: список (послідовність) задач і монітор. У список (agenda) включаються всі задачі, отримані МАС за поточний період часу. У будь-який момент часу в ньому містяться всі задачі, виконувані на основі даних дошки оголошень.

Монітор використовується для контролю всього процесу розв’язання задачі. Він сортує задачі зі списку та евристичним шляхом вибирає наступну для виконання. Монітор здійснює перевірку дошки оголошень і області повідомлень після роботи кожного агента, аналізує слоти класної дошки, пов’язані з гіпотезами, що визначають поточний стан процесу розв’язання. На основі механізмів прямого або зворотного виведення монітор визначає, які модулі знань відповідають поточному стану.

Найважливішою сферою досліджень в області комунікації агентів є побудова протоколів для проведення переговорів. До розробки протоколів зазвичай пред’являються такі вимоги:

а) простота;

б) децентралізація (переговори здійснюються напряму, без централізованого управління);

в) симетричність (усі агенти є рівноправними учасниками переговорів);

г) стійкість (протоколи переговорів не повинні дозволяти агентам, що порушили установлені правила їх проведення, отримувати додатковий зиск);

д) ефективність (як щодо окремих агентів, так і щодо їхніх коаліцій).

Побудова протоколу ведення переговорів включає три кроки:

- визначення простору можливих угод;
- введення правил взаємодії (наприклад, на підставі теорії мовних актів у термінах «пропозиція – контрпропозиція»;
- задавання оптимальних стратегій агентів.

Класичними методами дослідження переговорних процесів є методи теорії корисності та теорії ігор, зокрема відомі моделі та умови оптимальності, які виражені у вигляді принципів рівноваги. Так, принцип Парето застосовується для надміру централізованих систем, підсистемами яких мають широкі можливості для обміну інформацією про прийняті рішення, а рівновага за Нешем характеризує децентралізовані системи. Ці типи оптимальності мають різні «ідейні основи»: основою оптимальності за Нешем є стійкість системи, обумовлена інтересами і можливостями окремих підсистем, тоді як принцип оптимальності за Парето спирається на ідею корисності, вигоди для системи в цілому, що розуміється як вигода відразу для всіх її підсистем. З урахуванням вищенаведених вимог, для розробки протоколів у МАС частіше застосовується арбітражна схема Неша або математично еквівалентна їй модель Зейтена.

Серед протоколів ведення переговорів у РШІ широке розповсюдження отримав протокол *монотонних мінімальних поступок*, який визначає процес переговорів між двома агентами. Агенти роблять пропозиції по черзі, починаючи з найвигідніших для себе пропозицій. У процесі переговорів агенти монотонно відступають від своїх первинних вимог, тобто функція корисності кожного агента монотонно спадає на послідовності його пропозицій. Доведено, що в результаті переговорів агенти вибирають ту угоду, яка максимізувала добуток їхніх функцій корисності. Множина можливих угод у протоколі монотонних мінімальних поступок (переговорна множина) складається з усіх індивідуально раціональних угод, ефективних за Парето.

На початку 1980-х років Р. Сміт розробив модель розподіленого розв'язування задач, названу ним «контрактною (договірною) мере-

жею» (contract net), яка й нині має великий резонанс. В основі моделі договірних мереж лежить найпростіша ідея ринкових торгів. Є два типи агентів: агенти-менеджери і агенти-виконавці (покупці). Агент-менеджер розповсюджує оголошення про завдання і визначає початкову ціну, а агенти – потенційні виконавці – пропонують послуги, надсилаючи свої варіанти цін, та іноді беруть участь у конкурсі на визначення найкращих пропозицій за початковим завданням. Потім агент-менеджер відбирає найвигідніші для нього пропозиції та укладає угоду з вибраними агентами-виконавцями, які стають агентами-підрядчиками.

Основна перевага моделі договірних мереж полягає в її простоті та легкості реалізації. Крім того, модель перешкоджає появі агентів-посередників, які виступають як спекулянти, купуючи і перепродаючи одну і ту ж задачу кілька разів. Недоліками цієї моделі є, в першу чергу, відсутність продуманого механізму вибору підрядчика і високе завантаження комунікаційних каналів.

Відомі різні удосконалення моделі Сміта. Наприклад, можуть вводитися спеціальні агенти-консультанти, роль яких полягає в наданні допомоги менеджерам при сповіщенні потенційних виконавців і обробці пропозицій. На сьогодні найвдалішим варіантом розвитку моделі договірних мереж вважається комбінована модель Т. Сандхолма, де агентам-підрядчикам дозволено виконувати одночасно декілька задач. Для кожного підрядчика формується пакет поточних задач, причому при додаванні до цього пакету нової задачі враховуються не тільки її характеристики, а й уже прийняті зобов'язання. Тут відбувається об'єднання моделі переговорів на рівні двосторонніх взаємодій з моделлю пошуку виконавців на рівні всієї мережі.

У будь-якій МАС центральну роль відіграють структури управління та прийняття рішень. Управління визначає обмеження на взаємодії між агентами, вид організації та характер еволюції МАС. Класична структура управління передбачає субординацію агентів, тобто спосіб примусити одних агентів виконувати доручення інших. Ієрархія відносин субординації є деревовидною структурою. Однак у МАС можуть вводитися й егалітарні структури, коли будь-який агент може попросити будь-якого іншого агента виконати якусь задачу, та потенційний виконавець завжди може відмовитися.

На думку Вернера, фундаментальними особливостями групи, складеної з віртуальних агентів, що співпрацюють задля досягнення цілі, є соціальна структура і розподіл ролей між агентами. При цьому соціальна структура утворюється в результаті призначення соціальних ролей.

8.5.3. Прийняття рішення активним агентом на основі знань, одержаних узагальненням прецедентів

Агент має знання, тобто сукупність висловів, тверджень про об'єкти і зв'язки зовнішнього середовища, причому виконуються такі аксіоми знань:

A_1 – всі приклади аксіом (тавтологій) математичної логіки:

$A_2 - (KA \ \& \ K(A \supset B)) \supset KB$;

$A_3 - KA \supset A$;

$A_4 - KA \supset KKA$;

$A_5 - \neg KA \supset K \neg KA$;

$K - A/KA$.

Стани об'єкта зовнішнього середовища описуються в інформаційній системі агента. Агент ці стани (або області) не розрізняє, якщо їхні описи однакові. Отже, виникають класи (еквівалентності) станів, які називаються ситуаціями. Ситуації упорядковуються, вважається, що $S \subseteq S'$ тоді і тільки тоді, коли кожна формула, істинна в S , істинна і в S' . Далі вводиться поняття можливого як множини ситуацій, в яких істинною є та чи інша підмножина висловів. Стани можуть належати різним типам. Постулюється наявність операторів або таких класів, у яких клас (C дозволяє перевести ситуацію S_1 типу φ у ситуацію S_2 типу ψ).

Знання і оператори (методи), або канали визначають, які дії вибираються агентом. Порядок використання методів визначається протоколом. Операція агента $O(C_i) \in \Omega_{ACT}(i)$ належить множині допустимих для агента операцій.

Дія агента змінює стан середовища $R_A \subseteq S \times S$. Дії агента можуть також змінювати ментальні стани агента. Якщо дія змінює інформаційний стан агента, її називають операцією тестування. Дія реалізовується за допомогою операції.

Протокол $R \subset C(S) \times C(S)$, де C – тип або клас ситуації.

Протокол обмежений місією, яка відкидає деякі варіанти дії як неприпустимі. Є й інші обмеження, залежні від дії та ситуації.

Впорядкування дій у часі створює план (прогнозування дій). Стратегія – це історія послідовності станів і рішень у минулому, майбутньому $RA \subseteq 2^{S \times S}$.

Динамічна проблема розв'язання полягає в термінах пошуку агентом оптимального плану. План складається з опису цілі (підмножина станів з найвищими значеннями корисності) та послідовності розв'язання.

Існують ймовірності очікуваної корисності, пов'язані з кожним рішенням, і агент вибирає акти дій, які максимізують цю корисність. Він використовує протокол як систему правил для прийняття рішень.

Кожне правило містить описи ситуацій і клас ситуацій, в яких воно застосовне.

Позначимо множину станів системи, в яких справедливе p , через S_p . Розглянемо множину допустимих для агента станів $U \subseteq S$ і запишемо: агент a_i знає $pb \ U K_{a_i}^U p$, якщо

$$\forall S' \in U (S'_i = S_i) \supset (S' \in S_p).$$

Агент знає p , якщо $S_p \subseteq U$.

Для агента виділяються деякі підмножини, звані можливими світами, як підмножини U множини S . Світи з U – це світи, з якими S знаходиться відносно R . Через знання фактів світи з U для агента можуть виявитися такими, що не розрізняються. Можна сказати, що агент a_i знає факт p у світі S , якщо і тільки якщо p істинне в усіх світах, зрозумілих з S відносно R .

Світи з U називаються епістемічними альтернативами з відношенням R – відношенням досяжності. Ментальні стани агента відносно середовища можуть бути такими:

a_i знає, що p ,

a_i знає, що $\neg p$,

a_i не знає p або $\neg p$.

Для отримання знання агент може здійснити якийсь тест або акт.

Агент складає опис ситуації, в якій знаходиться система правила, за принципом максимальної схожості (схожість ситуації та правил).

Агент генерує множину можливих структур раніше і вибирає ту, яка дає максимальну очікувану корисність за обмежених ресурсів. Агент використовує навчання у випадку, коли немає відповідного правила. Він шукає генерацію ситуації, а також генерацію правила, потім здійснює ідентифікацію правил, при цьому застосовується немонотонна логіка.

Завдання і вправи

Завдання 1. Передбачається, що невідоме відображення, яке виробляється нечіткою системою, може бути представлено у вигляді:

$$y = f(x_1, x_2)$$

і задані такі дві навчаючі пари вхід / вихід:

$$\{(1,1;1), (2,2;2)\}$$

(тобто якщо вхідний вектор $(1,1)$, тоді бажаний результат дорівнює 1,

а якщо вхідний вектор (2,2), то бажаний результат – 2).

Для моделювання невідомого відображення f застосуємо чотири нечіткі правила *IF-THEN*.

if x_1 is SMALL and x_2 is SMALL then $o = ax_1 - bx_2$;

if x_1 is SMALL and x_2 is BIG then $o = ax_1 + bx_2$;

if x_1 is BIG and x_2 is SMALL then $o = bx_1 + ax_2$;

if x_1 is BIG and x_2 is BIG then $o = bx_1 - ax_2$,

де функції належності нечітких чисел *SMALL* і *BIG* задаються так:

$$SMALL(v) = \begin{cases} 1 - \frac{v}{2}, & \text{if } 0 \leq v \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$BIG(v) = \begin{cases} 1 - \frac{2-v}{2}, & \text{if } 0 \leq v \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

де a і b – невідомі параметри.

Загальний вихід системи розраховується за допомогою механізму міркувань Sugeno.

Побудувати функції помилок $E_1(a, b)$, $E_2(a, b)$ для першої і другої навчаючої пари.

Завдання 2. Передбачається, що невідоме відображення, яке виробляється нечіткою системою, може бути представлено у вигляді:

$$y^k = f(x^k) = f(x_1^k, \dots, x_n^k)$$

для $k = 1, \dots, K$, тобто є така навчаюча послідовність:

$$\{(x^1, y^1), \dots, (x^k, y^k)\}.$$

Для моделювання невідомого відображення f застосуємо три спрощені нечіткі правила *IF-THEN* у вигляді:

if x is SMALL then $o = z_1$;

if x is MEDIUM then $o = z_2$;

if x is BIG then $o = z_3$,

де лінгвістичні терміни, $A_1 = \text{BIG}$, $A_2 = \text{MEDIUM}$, $A_3 = \text{BIG}$, мають трикутну форму функцій (рис. 4.21):

$$A_1(v) = \begin{cases} 1, & \text{if } v \leq c_1 \\ \frac{c_2 - v}{c_2 - c_1}, & \text{if } c_1 \leq v \leq c_2, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$A_2(v) = \begin{cases} \frac{v - c_1}{c_2 - c_1}, & \text{if } c_1 \leq v \leq c_2 \\ \frac{c_3 - v}{c_3 - c_2}, & \text{if } c_2 \leq v \leq c_3, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$A_3(u) = \begin{cases} 1, & \text{if } u \geq c_3 \\ \frac{u - c_2}{c_3 - c_2}, & \text{if } c_2 \leq u \leq c_3. \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Застосуйте метод найшвидшого спуску для налаштування вихідних параметрів $\{y_1, y_2, y_3\}$.

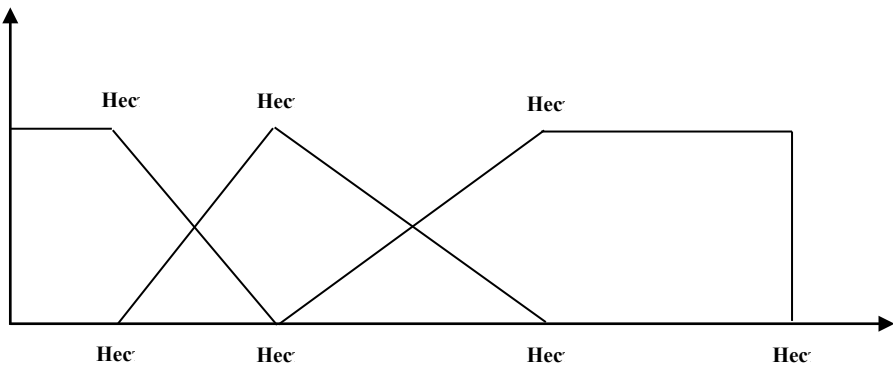


Рис. 4.21. Лінгвістичні терміни A_1 , A_2 і A_3

ГЛАВА 9. ІНСТРУМЕНТАЛЬНІ ЗАСОБИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

9.1. Програмні пакети моделювання та дослідження НС (стислий опис)

Одним з найважливіших аспектів економіко-математичного моделювання нині є комп'ютерні технології. Високі темпи їхнього розвитку в наш час зумовили появу багатьох програмних засобів, які дозволяють створювати комп'ютерні моделі економічних процесів, у тому числі й нелінійних. Проте така різноманітність не тільки не спрощує вибір програмного засобу для розв'язання тієї чи іншої задачі, але певною мірою навіть ускладнює його, оскільки постає проблема вибору правильного програмного забезпечення, яке дозволить максимально швидко побудувати комп'ютерну модель, відповідну цілям дослідження, що проводиться. Помилка в такому виборі може істотно підвищити трудомісткість знаходження рішення і навіть призвести до виникнення помилок, які негативно позначатимуться на результатах моделювання.

У цьому навчально-методичному посібнику розглянуто низку програмних засобів, які можуть використовуватися для дослідження і побудови економіко-математичних моделей.

Необхідно відзначити, що в рамках допомоги розглянуто підходи до моделювання із застосуванням систем комп'ютерної математики і побудовою імітаційних моделей.

Імітаційне моделювання – це один з видів математичного моделювання, яке дозволяє імітувати принципи роботи складних систем. Застосування імітаційного моделювання виправдано в тих випадках, коли модель повинна дати відповідь на якісь практичні питання, а не встановлювати фундаментальні закони і закономірності. Використання пакетів імітаційного моделювання не вимагає знання якихось складних математичних інструментів і дозволяє будувати моделі досить високого рівня складності.

Для більш строгого дослідження моделей використовуються системи комп'ютерної математики, які дозволяють реалізовувати не тільки числові, а й символічні обчислення, а також мають значну кількість вбудованих функцій і застосувань.

9.2. Прикладні приклади комп'ютерного моделювання

9.2.1. Дослідження динамічної системи на основі пакета Excel

Будь-який вид діяльності вимагає систематизації даних, тобто виникає необхідність у комп'ютерній системі для зберігання великого

обсягу фінансової та іншої інформації. Microsoft Excel – програма, призначена для організації даних у таблиці для документування, порівняння і графічного представлення інформації. Наприклад, можна використовувати Excel для: підсумовування, обчислення середнього або максимального числа продажів за день; створення графіка, що показує певний відсоток продажів, порівняння загального обсягу продажів за день з тим же показником за інші дні тижня. Excel звільняє від здійснення цих обчислень вручну.

При запуску Excel з'являється порожній документ. З цієї миті ви можете вводити інформацію, змінювати оформлення даних, обробляти дані або шукати інформацію у файлах довідки Excel. Рядки позначаються числами, а стовпці – літерами. Номер рядка і літера стовпця, що позначає певну комірку, називаються посиланням на комірку. Наприклад, комірка в лівому верхньому куті вікна робочої книги має посилання A1. Робочий аркуш складається з набору рядків і стовпців і представляє сторінку в документі Excel. Робочою книгою, в свою чергу, називаються один або декілька робочих аркушів.

Комірки можуть містити такі типи даних:

1. Символьні (текстові) дані. Можуть включати алфавітні, числові та спеціальні символи. Стандартно символьні дані при введенні вирівнюються за правим краєм комірки.

2. Числові дані. Можуть містити тільки числові дані. Винятком є десяткова крапка або кома і знак числа, що стоїть перед ним. Числові дані стандартно вирівнюються при введенні за лівим краєм комірки.

3. Формули. Формула може включати низку арифметичних, логічних та інших дій, що здійснюються над даними з інших комірок. На екрані після введення формули відображається результат обчислень, а сама формула – в рядку введення над таблицею. Введення формул починається зі знака рівності.

4. Функції. Функції можуть розташовуватися самостійно в комірках, а також можуть входити до складу формул. Розрізняють математичні, статистичні, логічні, фінансові та інші функції.

5. Дати. У цьому типі даних можливі такі функції, як додавання до дати числа (перерахунок дати вперед і назад) або віднімання різниці двох дат (тривалість періоду).

В якості прикладу нелінійної та динамічної системи може бути представлено моделювання засобами Excel системи управління запасами. Приміром, необхідно визначити витрати компанії, яка займається продажем одного виду продукції, за 120 місяців. При виникненні попиту на товар, він негайно задовольняється, якщо рівень запасу, щонайменше, дорівнює попиту. Якщо попит перевищує рівень запасу, то поставка тієї частини товарів, яка перевищує попит над пропозицією,

відкладається і виконується при майбутніх поставках. При новому надходженні замовлення, товар, у першу чергу, використовується для максимально можливого виконання відкладених поставок, а залишок замовлення додається до запасу.

Початковий рівень запасу на складі $I = 60$. Критичний рівень цих запасів, за якого необхідно робити замовлення, – $s = 20$. Якщо поточний рівень запасу менший за критичний, то слід робити замовлення ($S = 60$), в іншому разі – замовлення не потрібне.

Проміжки часу між виникненням попиту на товар є незалежними і представлені випадковими величинами, що мають однаковий розподіл із середнім значенням 0,1 місяця. Обсяги попиту на товар D також є незалежними і однаково розподіленими випадковими величинами:

$$D = \begin{cases} 1, cP = 1/6 \\ 2, cP = 1/3 \\ 3, cP = 1/3 \\ 4, cP = 1/6 \end{cases}.$$

Витрати компанії складаються з трьох статей, а саме:

- витрати на придбання товарів (при замовленні Z одиниць товару компанія несе витрати, що дорівнюють:

$$K + iZ,$$

де K – купівельна вартість ($K = 32$);

i – додаткові витрати на одиницю замовленого товару ($i = 3$);

Z – кількість товару, що закуповується, – 60 одиниць (за умовою));

- витрати на зберігання товарів (складають 1 грн за місяць на одиницю товару);
- витрати, пов'язані з відкладеними поставками товарів (5 грн на одиницю відкладеної поставки за 1 місяць).

При оформленні замовлення час, необхідний для його доставки, також є випадковою величиною, рівномірно розподіленою між 0,5 і 1 місяцем.

Початкові (вихідні) дані зведені в таблицю (рис. 4.22):

U	V	W	X	Y
<i>рівень запасів на початку місяця, I</i>	<i>критичний рівень, s</i>	<i>купівельна вартість, K</i>	<i>додаткові витрати, i</i>	<i>закупаєма кількість товарів</i>
60	20	32	3	60

Рис. 4.22. Вихідні дані

У процесі виконання роботи будуть розраховані та зведені в таблицю такі дані (рис. 4.23):

D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
поточний період, <i>tsr</i>	об'єм попиту, <i>D</i>	рівень запасу після надходження замовлення, <i>S</i>	стан замовлення	час до приходу замовлення				кількість товарів (інтеграл за часом)	витрати фірми (+) помножимо на 1, (-) помножимо на 5

N	O	P	Q	R	S
витрати на зберігання (додатні числа)	витрати, пов'язані з відкладеними поставками (негативні значення)	витрати на придбання	сума витрат	модельований період	витрати фірми

Рис. 4.23. Кінцеві розрахункові дані

1. Визначимо проміжки часу між виникненням попиту на товар, які є незалежними і повинні бути представлені випадковими величинами, що мають однаковий розподіл із середнім значенням 0,1 місяця. Для цього:

у комірку *D2* вписуємо формулу: $=0,1*\text{СЛЧИС}()$, де $\text{СЛЧИС}()$ – функція, що повертає розподілене випадкове число;

у комірку *D3* вписуємо формулу: $=D2 + 0,1*\text{СЛЧИС}()$ (тобто робимо посилання на попередню комірку);

виділивши комірку *D3*, розтягуємо її до комірки *D2500* (взагалі-то необхідно розтягувати до тієї комірки, в якій не з'явитися значення, що дорівнює 120, але оскільки ми використовуємо випадкові величини, то нам необхідний так званий запас комірок) (рис. 4.24).

2. Наступним етапом буде визначення обсягів попиту на продукцію. Скористаємося системою, даною в умові задачі:

$$D = \begin{cases} 1, cP = 1/6 \\ 2, cP = 1/3 \\ 3, cP = 1/3 \\ 4, cP = 1/6 \end{cases},$$

	D	D
1	Нестійкість	
2	=0,1*СЛЧИС()	
3	=D2+0,1*СЛЧИС()	0,0715839
4	=D3+0,1*СЛЧИС()	0,1179208
5	=D4+0,1*СЛЧИС()	0,2140903
6	=D5+0,1*СЛЧИС()	0,215511
7	=D6+0,1*СЛЧИС()	0,2899936
8	=D7+0,1*СЛЧИС()	0,3047574
9	=D8+0,1*СЛЧИС()	0,3207898
10	=D9+0,1*СЛЧИС()	0,3966111
11	=D10+0,1*СЛЧИС()	0,4580208
12	=D11+0,1*СЛЧИС()	0,4842221
13	=D12+0,1*СЛЧИС()	0,5285726
14	=D13+0,1*СЛЧИС()	0,6154865
15	=D14+0,1*СЛЧИС()	

Рис. 4.24. Час виникнення попиту на товар

тобто

- якщо значення $U < 1/6$, то обсяг попиту дорівнює 1-й одиниці;
- якщо значення $U < 1/6 + 1/3$, то обсяг попиту дорівнює 2-м одиницям;
- якщо значення $U < 1/6 + 1/3 + 1/3$, то обсяг попиту дорівнює 3-м одиницям;
- якщо значення $U > 1/6 + 1/3 + 1/3$, то обсяг попиту дорівнює 4-м одиницям.

U – це рівномірно розподілені випадкові величини на інтервалі (0,1).

Для розв'язання задачі:

у комірку E2 вводимо формулу: =ЕСЛИ(C2<1/6;1; ЕСЛИ (C2<1/6+1/3;2; ЕСЛИ (C2<1/6+1/3+1/3;3;4)), де C2 – комірка, в якій знаходяться величини, рівномірно розподілені на інтервалі (0,1), згенеровані методом ЛКГ (лінійним конгруентним генератором); виділивши комірку E2, розтягуємо її до комірки E2500 (рис. 4.25).

Знаходимо величину S (поточний рівень запасу), розрахунок якої залежить від значень, що знаходяться в наступних комірках: «стан замовлення» і «час до надходження замовлення»:

у комірку F2 вводимо формулу: =T\$2-E2, де T2 – рівень запасів на початку місяця, I (за умовою – 60 од.); E2 – обсяг попиту, D.

у комірку F3 вписуємо формулу: =ЕСЛИ(D2>120;»СТОП»; ЕСЛИ(I(D3>=J2;G2=«робимо замовлення»);(T\$2+F2)-E3;F2-E3))

	Е	Е
1	Нестійкість	
2	=ЕСЛИ(С2<1/6;1;ЕСЛИ(С2<1/6+1/3;2;ЕСЛИ(С2<1/6+1/3+1/3;3;4)))	1
3	=ЕСЛИ(С3<1/6;1;ЕСЛИ(С3<1/6+1/3;2;ЕСЛИ(С3<1/6+1/3+1/3;3;4)))	3
4	=ЕСЛИ(С4<1/6;1;ЕСЛИ(С4<1/6+1/3;2;ЕСЛИ(С4<1/6+1/3+1/3;3;4)))	2
5	=ЕСЛИ(С5<1/6;1;ЕСЛИ(С5<1/6+1/3;2;ЕСЛИ(С5<1/6+1/3+1/3;3;4)))	2
6	=ЕСЛИ(С6<1/6;1;ЕСЛИ(С6<1/6+1/3;2;ЕСЛИ(С6<1/6+1/3+1/3;3;4)))	3
7	=ЕСЛИ(С7<1/6;1;ЕСЛИ(С7<1/6+1/3;2;ЕСЛИ(С7<1/6+1/3+1/3;3;4)))	3
8	=ЕСЛИ(С8<1/6;1;ЕСЛИ(С8<1/6+1/3;2;ЕСЛИ(С8<1/6+1/3+1/3;3;4)))	3
9	=ЕСЛИ(С9<1/6;1;ЕСЛИ(С9<1/6+1/3;2;ЕСЛИ(С9<1/6+1/3+1/3;3;4)))	4
10	=ЕСЛИ(С10<1/6;1;ЕСЛИ(С10<1/6+1/3;2;ЕСЛИ(С10<1/6+1/3+1/3;3;4)))	4
11	=ЕСЛИ(С11<1/6;1;ЕСЛИ(С11<1/6+1/3;2;ЕСЛИ(С11<1/6+1/3+1/3;3;4)))	2
12	=ЕСЛИ(С12<1/6;1;ЕСЛИ(С12<1/6+1/3;2;ЕСЛИ(С12<1/6+1/3+1/3;3;4)))	3
13	=ЕСЛИ(С13<1/6;1;ЕСЛИ(С13<1/6+1/3;2;ЕСЛИ(С13<1/6+1/3+1/3;3;4)))	3
14	=ЕСЛИ(С14<1/6;1;ЕСЛИ(С14<1/6+1/3;2;ЕСЛИ(С14<1/6+1/3+1/3;3;4)))	2
15	=ЕСЛИ(С15<1/6;1;ЕСЛИ(С15<1/6+1/3;2;ЕСЛИ(С15<1/6+1/3+1/3;3;4)))	2

Рис. 4.25. Обсяги попиту на продукцію

Тобто: якщо поточний період більше 120 місяців, то модельований період роботи фірми завершено. Якщо ж ні, тоді переглядаємо. Якщо наступний період – більший або дорівнює часу до надходження замовлення і стан замовлення такий: «робимо замовлення», то від суми рівня запасів на початку місяця = 60 і рівня запасу після надходження замовлення віднімаємо знайдений обсяг попиту. Якщо ж ні, тоді від рівня запасу після надходження замовлення просто віднімаємо знайдений обсяг попиту (рис. 4.26).

	F	F
1	Нестійкість	
2	=F2-E2	59
3	=ЕСЛИ(D2>120;"СТОП";ЕСЛИ(И(D3>=J2;G2="делаем заказ");(\$T\$2+F2)-E3;F2-E3))	56
4	=ЕСЛИ(D3>120;"СТОП";ЕСЛИ(И(D4>=J3;G3="делаем заказ");(\$T\$2+F3)-E4;F3-E4))	54
5	=ЕСЛИ(D4>120;"СТОП";ЕСЛИ(И(D5>=J4;G4="делаем заказ");(\$T\$2+F4)-E5;F4-E5))	52
6	=ЕСЛИ(D5>120;"СТОП";ЕСЛИ(И(D6>=J5;G5="делаем заказ");(\$T\$2+F5)-E6;F5-E6))	49
7	=ЕСЛИ(D6>120;"СТОП";ЕСЛИ(И(D7>=J6;G6="делаем заказ");(\$T\$2+F6)-E7;F6-E7))	46
8	=ЕСЛИ(D7>120;"СТОП";ЕСЛИ(И(D8>=J7;G7="делаем заказ");(\$T\$2+F7)-E8;F7-E8))	43
9	=ЕСЛИ(D8>120;"СТОП";ЕСЛИ(И(D9>=J8;G8="делаем заказ");(\$T\$2+F8)-E9;F8-E9))	39
10	=ЕСЛИ(D9>120;"СТОП";ЕСЛИ(И(D10>=J9;G9="делаем заказ");(\$T\$2+F9)-E10;F9-E10))	35
11	=ЕСЛИ(D10>120;"СТОП";ЕСЛИ(И(D11>=J10;G10="делаем заказ");(\$T\$2+F10)-E11;F10-E11))	33
12	=ЕСЛИ(D11>120;"СТОП";ЕСЛИ(И(D12>=J11;G11="делаем заказ");(\$T\$2+F11)-E12;F11-E12))	30
13	=ЕСЛИ(D12>120;"СТОП";ЕСЛИ(И(D13>=J12;G12="делаем заказ");(\$T\$2+F12)-E13;F12-E13))	27
14	=ЕСЛИ(D13>120;"СТОП";ЕСЛИ(И(D14>=J13;G13="делаем заказ");(\$T\$2+F13)-E14;F13-E14))	25
		23
		20

Рис. 4.26. Визначення рівня запасів після надходження замовлення

У використаній формулі: $D2$ – поточний період, t_{cp} (визначили вище). Для визначення часу замовлення скористаємося додатковими комірками H , I , J . $J2$ – час до надходження замовлення, розраховується за допомогою додаткових комірок H і I за формулою: $=ЕСЛИ(И(H2>1;I2=0);J1;H2)$ (рис. 4.27)

	J		J
	Нестійкість	1	
1		2	
2	$=ЕСЛИ(И(H2>1;I2=0);J1;H2)$	3	0
3	$=ЕСЛИ(И(H3>1;I3=0);J2;H3)$	4	0
4	$=ЕСЛИ(И(H4>1;I4=0);J3;H4)$	5	0
5	$=ЕСЛИ(И(H5>1;I5=0);J4;H5)$	6	0
6	$=ЕСЛИ(И(H6>1;I6=0);J5;H6)$	7	0
7	$=ЕСЛИ(И(H7>1;I7=0);J6;H7)$	8	0
8	$=ЕСЛИ(И(H8>1;I8=0);J7;H8)$	9	0
9	$=ЕСЛИ(И(H9>1;I9=0);J8;H9)$	10	0
10	$=ЕСЛИ(И(H10>1;I10=0);J9;H10)$	11	0
11	$=ЕСЛИ(И(H11>1;I11=0);J10;H11)$	12	0
12	$=ЕСЛИ(И(H12>1;I12=0);J11;H12)$	13	0
13	$=ЕСЛИ(И(H13>1;I13=0);J12;H13)$	14	0
14	$=ЕСЛИ(И(H14>1;I14=0);J13;H14)$	15	0
15	$=ЕСЛИ(И(H15>1;I15=0);J14;H15)$	16	0
		17	0
		18	1,289286665
		19	1,289286665
		20	1,289286665
		21	1,289286665

Рис. 4.27. Визначення часу до надходження замовлення

Тут $H2$ – комірка, де визначається момент часу, в який замовлення надійде на фірму. Для цього використовуємо формулу: $=ЕСЛИ(G2=«не робимо замовлення»;0;(D2+СЛЧИС()*0,5+0,5))$; якщо стан замовлення: «не робимо замовлення», то цій комірці присвоюємо значення, яке дорівнює 0; якщо ні, то присвоюємо значення поточного періоду. Тобто при оформленні замовлення час, необхідний для його доставки, є випадковою величиною, рівномірно розподіленою між 0,5 і 1 місяцем (для цього і використовуємо у формулі вираз: $СЛЧИС()*0,5+0,5$) (рис. 4.28).

Якщо при розрахунку «рівня запасу» використовуватимуться значення, розраховані в комірці H , то товари на фірму не надійдуть ніколи (оскільки час до надходження замовлення є випадковою величиною і постійно змінюється (рис. 4.28)).

$I2$ – проміжна комірка, необхідна для визначення початкового періоду, в який потрібно робити замовлення, а також для подальшого підрахунку кількості замовлень протягом 120 місяців.

Причому, поки замовлення не надійде на фірму, навіть якщо поточний стан складу нижчий критичного рівня, нове замовлення робити не можна.

Н		Н	
1	Нестійкість	1	
2	Сстійкість	2	
3	=ЕСЛИ(G2=	3	0
4	=ЕСЛИ(G3=	4	0
5	=ЕСЛИ(G4=	5	0
6	=ЕСЛИ(G5=	6	0
7	=ЕСЛИ(G6=	7	0
8	=ЕСЛИ(G7=	8	0
9	=ЕСЛИ(G8=	9	0
10	=ЕСЛИ(G9=	10	0
11	=ЕСЛИ(G10=	11	0
12	=ЕСЛИ(G11=	12	0
13	=ЕСЛИ(G12=	13	0
14	=ЕСЛИ(G13=	14	0
15	=ЕСЛИ(G14=	15	0
16	=ЕСЛИ(G15=	16	0
		17	0
		18	1,289286665
		19	1,516330071
		20	1,524101302
		21	1,652055548
		22	1,451828011
		23	1,415003036

Рис. 4.28. Визначення часу до надходження замовлення

Використовуємо наступні формули:

=ЕСЛИ(H2>0;1;0)

=ЕСЛИ(И(G3=«робимо замовлення»;H3>0);ЕСЛИ(И(I2=0; H2<=0);1;0);0).

Якщо стан замовлення: «робимо замовлення», під час якого надійде замовлення, більше за 0, то перевіряємо таку властивість: якщо початковий період дорівнює нулю і період надходження замовлення менше за 0, тоді цій комірці присвоюємо значення, яке дорівнює 1, якщо ж ні, то навпаки – 0 (рис. 4.29).

G2 – комірка стану замовлення, визначається за формулою: =ЕСЛИ(F2<\$U\$2;«робимо замовлення»;«не робимо замовлення»), тобто якщо рівень запасу після надходження замовлення менший за критичний рівень, який дорівнює 20, то необхідно робити замовлення, а якщо ні, то, відповідно, не робити (див. рис. 4.30).

T2 – рівень запасів на початку місяця, I, що дорівнює 60 одиницям.

Визначимося, що є три типи витрат фірми:

- витрати на придбання товарів;
- витрати на зберігання товарів (складають 1 грн на одиницю товару, що є у невід'ємних товарах);
- витрати, пов'язані з нестачею товарів (складають 5 грн на одиницю товару за 1 місяць).

1		
2	=ЕСЛИ(Н2>0;1;0)	0
3	=ЕСЛИ(И(G3=Невтілюється; Н3>0); ЕСЛИ(И(І2=0; Н2<=0); 1; 0); 0)	0
4	=ЕСЛИ(И(G4= ; Н4>0); ЕСЛИ(И(І3=0; Н3<=0); 1; 0); 0)	0
5	=ЕСЛИ(И(G5= ; Н5>0); ЕСЛИ(И(І4=0; Н4<=0); 1; 0); 0)	0
6	=ЕСЛИ(И(G6= ; Н6>0); ЕСЛИ(И(І5=0; Н5<=0); 1; 0); 0)	0
7	=ЕСЛИ(И(G7= ; Н7>0); ЕСЛИ(И(І6=0; Н6<=0); 1; 0); 0)	0
8	=ЕСЛИ(И(G8= ; Н8>0); ЕСЛИ(И(І7=0; Н7<=0); 1; 0); 0)	0
9	=ЕСЛИ(И(G9= ; Н9>0); ЕСЛИ(И(І8=0; Н8<=0); 1; 0); 0)	0
10	=ЕСЛИ(И(G10= ; Н10>0); ЕСЛИ(И(І9=0; Н9<=0); 1; 0); 0)	0
11	=ЕСЛИ(И(G11= ; Н11>0); ЕСЛИ(И(І10=0; Н10<=0); 1; 0); 0)	0
12	=ЕСЛИ(И(G12= ; Н12>0); ЕСЛИ(И(І11=0; Н11<=0); 1; 0); 0)	0
13	=ЕСЛИ(И(G13= ; Н13>0); ЕСЛИ(И(І12=0; Н12<=0); 1; 0); 0)	1
14	=ЕСЛИ(И(G14= ; Н14>0); ЕСЛИ(И(І13=0; Н13<=0); 1; 0); 0)	0
15	=ЕСЛИ(И(G15= ; Н15>0); ЕСЛИ(И(І14=0; Н14<=0); 1; 0); 0)	0

Рис. 4.29. Визначення початкового періоду часу, впродовж якого необхідно зробити замовлення

	G	G
1		
2	=ЕСЛИ(F2<\$U\$2; Невтілюється;	
3	=ЕСЛИ(F3<\$U\$2;	
4	=ЕСЛИ(F4<\$U\$2;	
5	=ЕСЛИ(F5<\$U\$2;	
6	=ЕСЛИ(F6<\$U\$2;	
7	=ЕСЛИ(F7<\$U\$2;	
8	=ЕСЛИ(F8<\$U\$2;	
9	=ЕСЛИ(F9<\$U\$2;	
10	=ЕСЛИ(F10<\$U\$2;	
11	=ЕСЛИ(F11<\$U\$2;	
12	=ЕСЛИ(F12<\$U\$2;	
13	=ЕСЛИ(F13<\$U\$2;	
14	=ЕСЛИ(F14<\$U\$2;	
15	=ЕСЛИ(F15<\$U\$2;	

Рис. 4.30. Визначення стану замовлення

Визначимо кількість товарів, що зберігаються на складі в моменти виникнення попиту на них.

Кількість товарів, що зберігаються на складі в поточні моменти часу, обчислюються як середнє за часом.

Для цього:

у комірці L2 введемо формулу: =ЕСЛИ(F2=«СТОП»;0;F2*(D3-D2)), виділивши комірку L2, розтягуємо її до комірки L2500 (рис. 4.31).

	L	
1	Нестійкість	
2	=ЕСЛИ(F2="СТОП";0;F2*(D3-D2))	2,733879154
3	=ЕСЛИ(F3="СТОП";0;F3*(D4-D3))	5,385489882
4	=ЕСЛИ(F4="СТОП";0;F4*(D5-D4))	0,076721403
5	=ЕСЛИ(F5="СТОП";0;F5*(D6-D5))	3,873095287
6	=ЕСЛИ(F6="СТОП";0;F6*(D7-D6))	0,723424304
7	=ЕСЛИ(F7="СТОП";0;F7*(D8-D7))	0,737492686
8	=ЕСЛИ(F8="СТОП";0;F8*(D9-D8))	3,26031279
9	=ЕСЛИ(F9="СТОП";0;F9*(D10-D9))	2,394979908
10	=ЕСЛИ(F10="СТОП";0;F10*(D11-D10))	0,917046393
11	=ЕСЛИ(F11="СТОП";0;F11*(D12-D11))	1,463564889
12	=ЕСЛИ(F12="СТОП";0;F12*(D13-D12))	2,607416516
13	=ЕСЛИ(F13="СТОП";0;F13*(D14-D13))	0,064421763
14	=ЕСЛИ(F14="СТОП";0;F14*(D15-D14))	1,348809734
15	=ЕСЛИ(F15="СТОП";0;F15*(D16-D15))	2,013619755
		0,735362621

Рис. 4.31. Визначення кількості товарів

Використовуючи дані діапазону комірок L2:L2500, визначимо необхідні складові витрат на зберігання товарів і витрат, пов'язаних з нестачею товарів, для чого:

у комірці M2 введемо формулу: =ЕСЛИ(L2>=0;L2*1;L2*5), де всі невід'ємні числа помножили на 1 (на 1 грн), а всі від'ємні – на 5 (5 грн).

Виділивши комірку M2, розтягуємо її до комірки M2500.

Знайдені значення зі стовпця M розіб'ємо на невід'ємні і від'ємні, що надалі надасть можливість визначити витрати на зберігання товарів і витрати, пов'язані з нестачею товарів. Для цього:

у комірці N2 введемо формулу: =ЕСЛИ(M2>=0;(M2;0)

у комірці O2 введемо формулу: =ЕСЛИ(M2<0;((M2*(-2))+M2);0)

Результати представлено на рис. 4.32.

Витрати, пов'язані з придбанням товару, розраховуються за формулою:

$$K + iZ,$$

де K – купівельна вартість ($K = 32$);

i – додаткові витрати на одиницю замовленого товару ($i = 3$);

Z – кількість товару, що закупляється, – 60 одиниць (за умови).

Далі у комірку P3 введемо формулу:

=ЕСЛИ(I3=1;\$W\$3+\$Y\$3*\$X\$3;0)

У нашому випадку витрати будуть дорівнювати 212 гр. од.

Визначимо витрати фірми за трьома статтями по кожному з 120-ти місяців. Результати представлено на рис. 4.33.

Необхідно обчислити витрати за 120 місяців, тобто отримати 120 значень. Можна теперішні моменти часу округляти до цілих значень, щоб зробити більш очевидними витрати за місяць. Для цього у форматі комірок слід установити грошовий формат і два знаки після коми.

Результати представлено на рис. 4.34 (а, б).

M	N	O
Нестійкість		
Стойкість		
=ЕСЛИ(L3>=0,L3*1,L3*5)	=ЕСЛИ(M3>=0,M3,0)	=ЕСЛИ(M3<0,((M3*(-2))+M3),0)
=ЕСЛИ(L4>=0,L4*1,L4*5)	=ЕСЛИ(M4>=0,M4,0)	=ЕСЛИ(M4<0,((M4*(-2))+M4),0)
=ЕСЛИ(L5>=0,L5*1,L5*5)	=ЕСЛИ(M5>=0,M5,0)	=ЕСЛИ(M5<0,((M5*(-2))+M5),0)
=ЕСЛИ(L6>=0,L6*1,L6*5)	=ЕСЛИ(M6>=0,M6,0)	=ЕСЛИ(M6<0,((M6*(-2))+M6),0)
=ЕСЛИ(L7>=0,L7*1,L7*5)	=ЕСЛИ(M7>=0,M7,0)	=ЕСЛИ(M7<0,((M7*(-2))+M7),0)
=ЕСЛИ(L8>=0,L8*1,L8*5)	=ЕСЛИ(M8>=0,M8,0)	=ЕСЛИ(M8<0,((M8*(-2))+M8),0)
=ЕСЛИ(L9>=0,L9*1,L9*5)	=ЕСЛИ(M9>=0,M9,0)	=ЕСЛИ(M9<0,((M9*(-2))+M9),0)
=ЕСЛИ(L10>=0,L10*1,L10*5)	=ЕСЛИ(M10>=0,M10,0)	=ЕСЛИ(M10<0,((M10*(-2))+M10),0)
=ЕСЛИ(L11>=0,L11*1,L11*5)	=ЕСЛИ(M11>=0,M11,0)	=ЕСЛИ(M11<0,((M11*(-2))+M11),0)
=ЕСЛИ(L12>=0,L12*1,L12*5)	=ЕСЛИ(M12>=0,M12,0)	=ЕСЛИ(M12<0,((M12*(-2))+M12),0)
=ЕСЛИ(L13>=0,L13*1,L13*5)	=ЕСЛИ(M13>=0,M13,0)	=ЕСЛИ(M13<0,((M13*(-2))+M13),0)
=ЕСЛИ(L14>=0,L14*1,L14*5)	=ЕСЛИ(M14>=0,M14,0)	=ЕСЛИ(M14<0,((M14*(-2))+M14),0)
=ЕСЛИ(L15>=0,L15*1,L15*5)	=ЕСЛИ(M15>=0,M15,0)	=ЕСЛИ(M15<0,((M15*(-2))+M15),0)
=ЕСЛИ(L16>=0,L16*1,L16*5)	=ЕСЛИ(M16>=0,M16,0)	=ЕСЛИ(M16<0,((M16*(-2))+M16),0)
=ЕСЛИ(L17>=0,L17*1,L17*5)	=ЕСЛИ(M17>=0,M17,0)	=ЕСЛИ(M17<0,((M17*(-2))+M17),0)

M	N	O
Нестійкості		
Стойкості		
5,828668553	5,82866855	0
3,986682568	3,98668257	0
0,593021356	0,59302136	0
3,206382161	3,20638216	0
1,85753583	1,85753583	0
1,134968013	1,13496801	0
2,532058561	2,53205856	0
0,168642618	0,16864262	0
2,785102996	2,785103	0
1,746098425	1,74609842	0
1,526251573	1,52625157	0
0,080332018	0,08033202	0
0,644145618	0,64414562	0
0,044592718	0,04459272	0
1,757108359	1,75710836	0
0,938192767	0,93819277	0
1,014001036	1,01400104	0
0,015920774	0,01592077	0
0,42106278	0,42106278	0
0,146412723	0,14641272	0
0,016987134	0,01698713	0
-0,96712512	0	0,96712512
-1,633514026	0	1,633514026
-0,153068205	0	0,153068205

Рис. 4.32. Знаходження складових витрат

N	O	P	Q
Нестійкість			
Стойкість			
5,82866855	0	0	5,828668553
3,98668257	0	0	9,815351122
0,59302136	0	0	10,40837248
3,20638216	0	0	13,61475464
1,85753583	0	0	15,47229047
1,13496801	0	0	16,60725848
2,53205856	0	0	19,13931704
0,16864262	0	0	19,30795966
2,785103	0	0	22,09306266
1,74609842	0	0	23,83916108
1,52625157	0	0	25,36541266
0,08033202	0	0	25,44574467
0,64414562	0	0	26,08989029
0,04459272	0	0	26,13448301
1,75710836	0	0	27,89159137
0,93819277	0	212	240,8297841
1,01400104	0	0	241,8437852
0,01592077	0	0	241,8597059
0,42106278	0	0	242,2807687
0,14541272	0	0	242,4261814
0,01698713	0	0	242,4431686
0	0,96712512	0	236,8985966
0	1,633514026	0	237,7625366
0	0,153068205	0	238,9554792
0	4,004281743	0	263,2623701

Рис. 4.33. Обчислення затрат фірми, включаючи всі види витрат

Зостосувавши автофільтр, можна вивести 120 значень (рис. 4.36).

	Q	R	S
1	Нестійкість		
2	Стойкість		
3	=N3+O3+P3	=ЦЕЛОЕ(D3)	=ЕСЛИ(R4>R3;Q4;0)
4	=ЕСЛИ(D4=0;0;ЕСЛИ(S3=0;N4+O4+P4;N4+O4+P4+Q3))	=ЦЕЛОЕ(D4)	=ЕСЛИ(R5>R4;Q5;0)
5	=ЕСЛИ(D5=0;0;ЕСЛИ(S4=0;N5+O5+P5;N5+O5+P5+Q4))	=ЦЕЛОЕ(D5)	=ЕСЛИ(R6>R5;Q6;0)
6	=ЕСЛИ(D6=0;0;ЕСЛИ(S5=0;N6+O6+P6;N6+O6+P6+Q5))	=ЦЕЛОЕ(D6)	=ЕСЛИ(R7>R6;Q7;0)
7	=ЕСЛИ(D7=0;0;ЕСЛИ(S6=0;N7+O7+P7;N7+O7+P7+Q6))	=ЦЕЛОЕ(D7)	=ЕСЛИ(R8>R7;Q8;0)
8	=ЕСЛИ(D8=0;0;ЕСЛИ(S7=0;N8+O8+P8;N8+O8+P8+Q7))	=ЦЕЛОЕ(D8)	=ЕСЛИ(R9>R8;Q9;0)
9	=ЕСЛИ(D9=0;0;ЕСЛИ(S8=0;N9+O9+P9;N9+O9+P9+Q8))	=ЦЕЛОЕ(D9)	=ЕСЛИ(R10>R9;Q10;0)
10	=ЕСЛИ(D10=0;0;ЕСЛИ(S9=0;N10+O10+P10;N10+O10+P10+Q9))	=ЦЕЛОЕ(D10)	=ЕСЛИ(R11>R10;Q11;0)
11	=ЕСЛИ(D11=0;0;ЕСЛИ(S10=0;N11+O11+P11;N11+O11+P11+Q10))	=ЦЕЛОЕ(D11)	=ЕСЛИ(R12>R11;Q12;0)
12	=ЕСЛИ(D12=0;0;ЕСЛИ(S11=0;N12+O12+P12;N12+O12+P12+Q11))	=ЦЕЛОЕ(D12)	=ЕСЛИ(R13>R12;Q13;0)
13	=ЕСЛИ(D13=0;0;ЕСЛИ(S12=0;N13+O13+P13;N13+O13+P13+Q12))	=ЦЕЛОЕ(D13)	=ЕСЛИ(R14>R13;Q14;0)

Рис. 4.34(a). Обчислення затрат фірми, включаючи всі види витрат

Q	R	S
Нестійкість		
Стійкість		
5,179325083	0	0,00
7,284918232	0	0,00
12,53055761	0	0,00
16,72512528	0	0,00
18,91086953	0	0,00
21,63075399	0	0,00
23,42264337	0	0,00
24,77745775	0	0,00
25,0315134	0	0,00
26,00528636	0	0,00
26,10209818	0	0,00
27,86439929	0	0,00
30,35642697	0	0,00
31,32318193	0	0,00
32,83601264	0	0,00
245,0288187	0	0,00
245,7952944	0	0,00
246,09922	0	246,10
0,580620291	1	0,00
0,61162176	1	0,00

Рис. 4.34(б). Обчислення затрат фірми, включаючи всі види витрат

Нестійкість	
Стійкість	
<i>Співвідношення</i>	
0	246,10
1	102,25
2	248,02
3	245,89
4	258,18
5	34,99
6	231,41
7	38,26
8	258,65
9	231,28
10	251,96
11	245,03
12	24,70
13	233,88
14	244,70
15	36,66
16	236,67

Рис. 4.35. Витрати фірми по кожному з 120-ти місяців

За отриманими 120-ма значеннями будується графік витрат фірми (рис. 4.36).

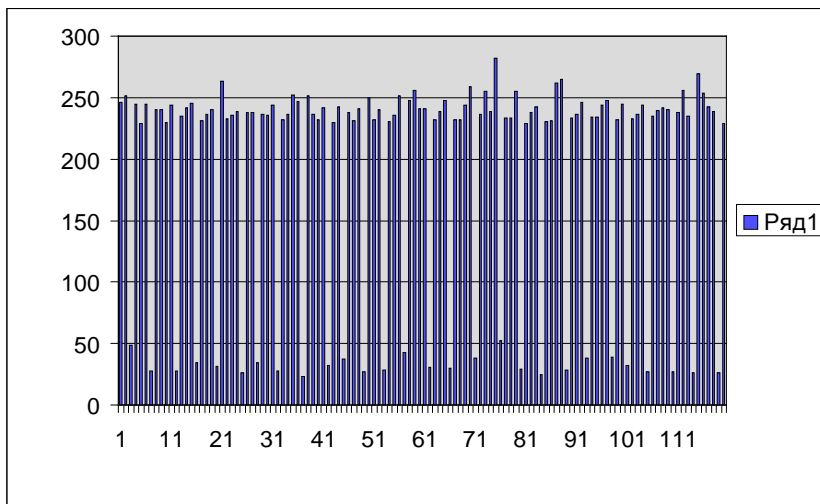


Рис. 4.36. Витрати фірми

9.2.2. Дослідження динамічної системи на основі пакета Mathcad

Mathcad є математичним редактором, що дозволяє здійснювати різноманітні наукові та інженерні розрахунки, починаючи від елементарної арифметики і закінчуючи складними реалізаціями числових методів. З погляду класифікації програмного забезпечення, пакет Mathcad – типовий представник класу PSE-застосувань. Завдяки простоті використання, наочності математичних дій, обширній бібліотеці вбудованих функцій і числових методів, можливості символьних обчислень, а також чудовому апарату представлення результатів (найрізноманітніші графіки, потужні засоби підготовки друкованих документів і Web-сторінок) Mathcad став найпопулярнішим математичним пакетом програм.

Призначення Mathcad

До складу Mathcad входять кілька інтегрованих між собою компонентів:

- потужний текстовий редактор, що дозволяє вводити, редагувати і формувати як текст, так і математичні вирази;
- обчислювальний процесор, що вміє здійснювати розрахунки за введеними формулами, використовуючи вбудовані числові ме-

тоди;

- символний процесор, що надає можливість здійснювати аналітичні обчислення і є, фактично, системою штучного інтелекту;
- величезне сховище довідкової інформації, як математичної, так і інженерної, оформленої у вигляді інтерактивної електронної книги.

Відмінною рисою Mathcad від більшості інших сучасних математичних пакетів програм є його побудова за принципом WYSIWYG («What You See Is What You Get» – «Що ви бачите, те й одержите»). Тому він дуже простий у використанні, зокрема через відсутність необхідності спочатку писати програму, що реалізовує ті чи інші математичні розрахунки, а потім запускати її на виконання. Натомість досить просто вводити математичні вирази за допомогою вбудованого редактора формул, причому у вигляді, максимально наближеному до загальноприйнятого, і тут же отримувати результат.

Після того як Mathcad встановлений на комп'ютері та запущений на виконання, з'являється головне вікно програми, показане на рис. 4.37. Воно має ту ж структуру, що й більшість програм-застосунків Windows. Зверху вниз розташовуються: заголовок вікна, рядок меню, панелі інструментів (стандартна і форматування) і робочий аркуш, або робоча область, документа (worksheet). Новий документ створюється автоматично при запуску Mathcad. У найнижчій частині вікна знаходиться рядок стану. Отже, інтерфейс користувача Mathcad схожий з іншими програмами Windows, і, пам'ятаючи про схожість редактора Mathcad зі звичайними текстовими редакторами, ви інтуїтивно зрозумієте призначення більшості кнопок на панелях інструментів.

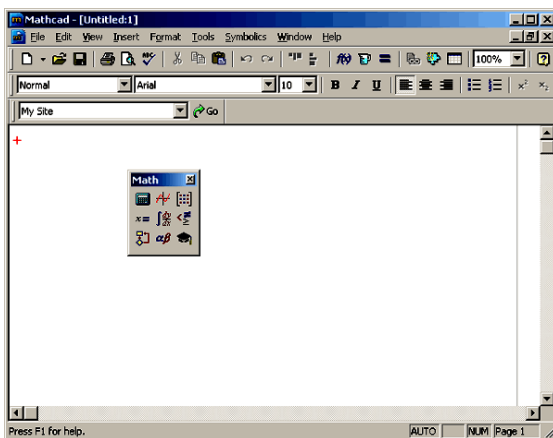


Рис. 4.37. Вікно програми Mathcad з порожнім документом

Крім елементів управління, характерних для типового текстового редактора, Mathcad забезпечений додатковими засобами для введення і редагування математичних символів. Одним з таких засобів є панель інструментів Math (Математика) (рис. 4.37). За допомогою неї, а також низки допоміжних набірних панелей зручно здійснювати введення рівнянь.

Наведемо складові елементи інтерфейсу користувача Mathcad:

- верхнє меню, або рядок меню (menu bar);
- панелі інструментів (toolbars): Standard (Стандартна), Formatting (Форматування), Resources (Ресурси) і Controls (Елементи управління);
- панель інструментів Math (Математика) і доступні через неї додаткові математичні панелі інструментів;
- робоча область (worksheet);
- рядок стану (status line, або status bar);
- спливаючі, або контекстні, меню (pop-up menus або context menus);
- діалогові вікна, або діалоги (dialogs);
- вікна ресурсів Mathcad (Mathcad Resources) з вбудованими прикладами і додатковою інформацією.

Більшість команд можна виконати як за допомогою меню (верхнього або контекстного), так і через панелі інструментів, або клавіатурою.

Панелі інструментів

Панелі інструментів служать для швидкого (одним клацанням миші) виконання найвживаніших команд. Усі дії, які можна виконати за допомогою панелей інструментів, доступні і через верхнє меню. На рис. 4.38 зображено вікно Mathcad з основними панелями інструментів (три з них розташовані безпосередньо під рядком меню), а також додатковими математичними (або набірними) панелями, про які ми будемо говорити нижче. Назвемо основні панелі:

- Standard (Стандартна) – призначена для виконання більшості операцій, таких як дії з файлами, редакторська правка, вставка об'єктів і доступ до довідкових систем;
- Formatting (Форматування) – для форматування (зміни типу і розміру шрифту, вирівнювання і т. ін.) тексту і формул;
- Math (Математика) – для вставки математичних символів і операторів у документи;
- Resources (Ресурси) – для швидкого виклику ресурсів Mathcad (прикладів, підручників, електронних книг і т. ін.);
- Controls (Елементи управління) – для вставки в документи стандартних елементів управління інтерфейсу користувача (прапорців перевірки, полів введення і т. ін.) (цю панель на рис. 4.37 і 4.38 не показано).

Групи кнопок на панелях інструментів розмежовані за значеннями вертикальними лініями – роздільниками. При наведенні покажчика миші на будь-яку з кнопок поряд з останньою з'являється спливаюча підказка – короткий текст, що пояснює її призначення. Більш розгорнуте пояснення дії, яка може бути виконана, представлена в рядку стану.

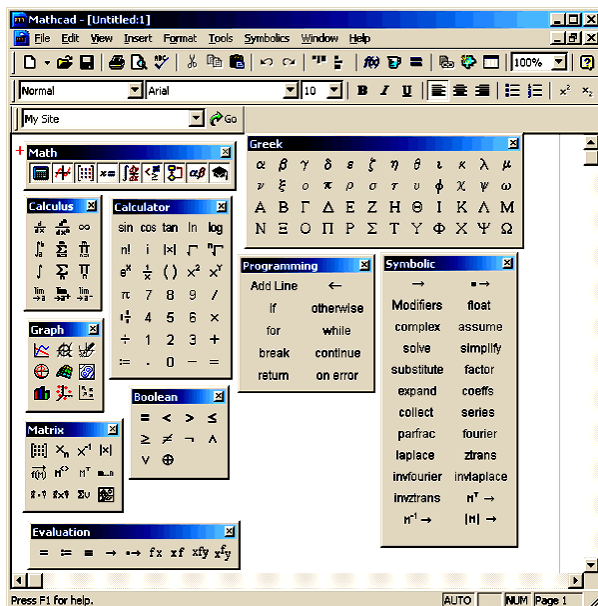


Рис. 4.38. Основні та математичні (набірні) панелі інструментів

Панель Math (Математика) призначена для виклику на екран ще дев'яти панелей (рис. 4.38), за допомогою яких, власне, і відбувається вставка математичних операцій у документи. У попередніх версіях Mathcad ці математичні панелі інструментів називалися палітрами (palettes) або набірними панелями. Щоб викликати якусь із них, потрібно натискати відповідну кнопку на панелі Math.

Призначення математичних панелей:

- Calculator (Калькулятор) – призначена для вставки основних математичних операцій, отримала свою назву через схожість набору кнопок з кнопками типового калькулятора;
- Graph (Графік) – для вставки графіків;
- Matrix (Матриця) – для вставки матриць і матричних операторів;
- Evaluation (Вирази) – для вставки операторів управління обчисленнями;

- Calculus (Обчислення) – для вставки операторів інтеграції, диференціювання, підсумовування;
- Boolean (Булеві оператори) – для вставки логічних (булевих) операторів;
- Programming (Програмування) – для програмування засобами Mathcad;
- Greek (Грецькі символи) – для вставки грецьких символів;
- Symbolic (Символіка) – для вставки символічних операторів.

Довідкова інформація

Разом з Mathcad поставляється кілька джерел довідкової інформації, доступ до яких здійснюється через меню Help (Довідка).

Можна також використовувати ресурси Mathcad – додаткові матеріали, представлені у специфічному форматі електронних книг Mathcad з розв'язками багатьох математичних прикладів.

Окрім названих довідників, меню Help (Довідка) містить і пункти, доступні через ресурси мережі Інтернет.

Основи обчислень у Mathcad

Оператори числового і символічного виведення

Для того щоб виконати прості розрахунки за формулами, зробіть наступне:

1. Визначте місце в документі, де має з'явитися вираз, клацнувши мишею у відповідній точці документа.
2. Введіть ліву частину виразу.
3. Введіть знак числової рівності = (клавішею <=>) або символічної рівності -> (поєднанням клавіш <Ctrl>+<. >). У першому випадку буде розраховано числове значення виразу, а в другому (якщо це можливо) – аналітичне.

Наприклад, для обчислення арккосинуса якогось числа, скажімо, 0, достатньо ввести з клавіатури вираз $\text{acos}(0)=$ або $\text{acos}(0) \rightarrow$. Після того як буде натиснуто клавішу зі знаком рівності (або введено знак символічних обчислень \rightarrow), праворуч від виразу відразу ж з'явиться результат (лістинги 4.1 і 4.2 відповідно).

Лістинг 4.1. Числовий розрахунок простого виразу:

$$\text{acos}(0) = 1.571$$

Лістинг 4.2. Аналітичний розрахунок простого виразу:

$$\text{acos}(0) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi$$

У лістинги винесено зміст робочої області документа Mathcad разом з отриманими результатами обчислень.

Математичні вирази і вбудовані функції

Описаним вище способом можна здійснювати більш громіздкі обчислення, користуючись при цьому всім арсеналом функцій, які закладені розробниками в систему Mathcad і тому називаються вбудованими функціями (на відміну від призначених для користувача функцій, конструйованих безпосередньо при розробці Mathcad-програми). Найлегше вводити імена вбудованих функцій з клавіатури, як у прикладі з обчисленням арккосинуса, але, щоб уникнути можливих помилок в їх написанні, краще вибрати інший шлях (тим більше, що багато функцій є досить складними та містять кілька аргументів) (рис. 4.39).

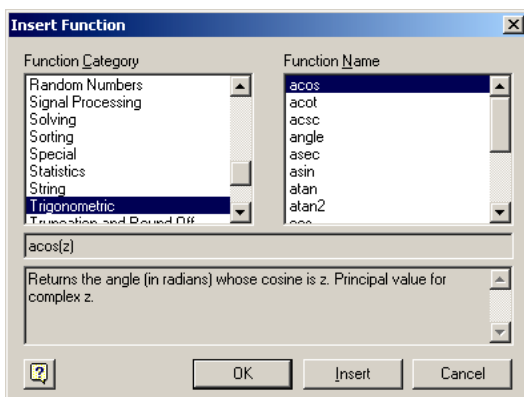


Рис. 4.39. Вставка вбудованої функції (див. лістинги 4.1 і 4.2)

Щоб вставити вбудовану функцію у вираз, зробіть кілька операцій:

1. Визначте місце у виразі, куди слід увести функцію.
2. Натисніть кнопку з написом $f(x)$ на стандартній панелі інструментів.
3. У списку Function Category (Категорія функції) діалогового вікна Insert Function (Вставити функцію) (рис. 4.40), що з'явилося, виберіть категорію, до якої належить функція; у нашому випадку це категорія Trigonometric (Тригонометричні).
4. У списку Function Name (Ім'я функції) виберіть ім'я вбудованої функції, під яким вона фігурує в Mathcad; у нашому прикладі – арккосинуса (acos). Якщо вибір утруднений, орієнтуйтеся на підказку, що з'являється при виборі функції в нижньому текстовому полі діалогового вікна Insert Function.
5. Натисніть кнопку ОК – функція з'явиться в документі.
6. Введіть ті аргументи введеної функції, яких не вистачає (в нашому випадку це число 0), у місцезаповнювачі, що позначається чор-

ним прямокутником) (нижній вираз на рис. 4.40).

Результатом буде введення виразу з лістингу 4.1, для отримання значення якого лишилося тільки ввести знак (числового або символного) виведення (обидва приклади наведено на рис. 4.40).

Не кожен символ можна ввести з клавіатури. Наприклад, як вставити в документ знак інтеграла або диференціювання? Для цього в Mathcad є спеціальні панелі інструментів, дуже схожі на засоби формульного редактора Microsoft Word. Ці панелі містять інструменти для вставки в документи суто математичних об'єктів (операторів, графіків, елементів програм і т. ін.).

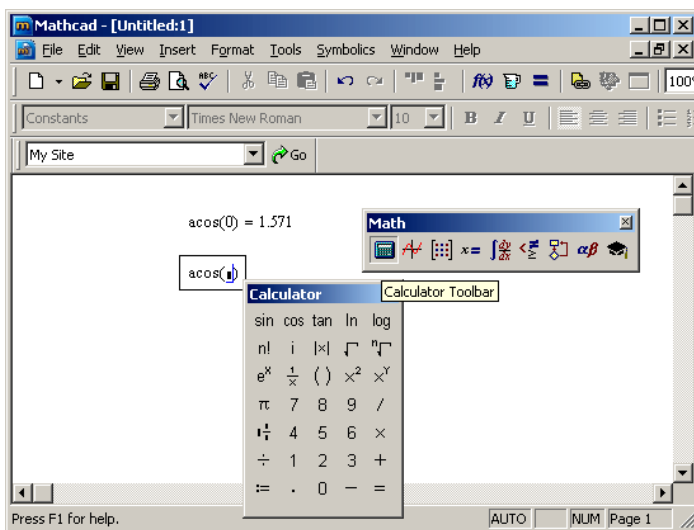


Рис. 4.40. Панель інструментів Math призначена для виклику на екран інших набірних панелей

Змінні та оператор присвоєння

Описані вище дії демонструють застосування Mathcad в якості звичайного калькулятора з розширеним набором функцій. Для кібернетика ж є цікавою, як мінімум, можливість задавання (введення) змінних і операцій з функціями користувача. Щоб присвоїти якійсь змінній (наприклад, змінній x) певне значення, необхідно ввести вираз типу $x:=1$. Цей приклад наведено в першому рядку лістингу 4.3, а в його другому рядку здійснюється обчислення значення змінної x за допомогою оператора чисельного висновку (знака рівності).

Лістинг 4.3. Присвоєння значення змінної та його використання в розрахунках:

$x := 1$

$x = 1$

$(x + 5)^2 = 36$

Як видно, присвоєння позначається не знаком рівності, а спеціальним символом – щоб підкреслити його відмінність від операції числового виведення. Оператор присвоєння вводиться натисканням клавіші-двокрапки <:=> або за допомогою панелі Calculator (Калькулятор). Символ рівності «=» свідчить про обчислення значення зліва направо, а символ «:=» – про присвоєння значення справа наліво.

Крім оператора звичайного присвоєння, в Mathcad є ще й оператор глобального присвоєння (=). Якщо вставити його для введення значення змінної в будь-якій частині документа (наприклад, у самому низу), то ця змінна автоматично буде визначена в будь-якій частині документа.

На відміну від числових, для символьних обчислень введення значень усіх змінних є обов'язковим (лістинг 4.4). Якщо деяким змінним присвоєні значення (як змінній a в лістингу 4.4), то для отримання результату використовується це числове значення. Якщо ж змінній не було присвоєно ніякого значення, (як змінній k), вона сприймається аналітично, просто як якесь ім'я.

Лістинг 4.4. Змінні в аналітичних розрахунках:

$a := 3$

$$\frac{d}{dx} \sin\left(\frac{k \cdot x}{a^2}\right) \rightarrow \frac{1}{9} \cdot \cos\left(\frac{1}{9} \cdot k \cdot x\right) \cdot k$$

Символьні обчислення, що дозволяють розв'язати багато задач аналітично, є однією з найбільш вражаючих можливостей Mathcad. Фактично Mathcad «знає» математику, принаймні, на рівні непоганого вченого. Вміле використання інтелекту символьного процесора Mathcad звільнить вас від величезної кількості рутинних обчислень, наприклад, інтегралів і похідних. Зверніть увагу на традиційну форму написання виразів (лістинг 4.4); єдина особливість полягає в необхідності використання знака символьних обчислень \rightarrow замість знака рівності. Його, до речі, можна ввести в редакторі Mathcad з будь-якої з панелей Evaluation (Вирази) або Symbolic (Символіка), а символи інтеграції та диференціювання – з панелі Calculus (Обчислення).

Функції користувача

Як і присвоєння числових значень змінним, можна визначити

функції користувача одного або декількох аргументів (лістинги 4.5 і 4.6). У лістингу 4.5 визначається функція $f(x)$, а в лістингу 4.6 – функція трьох змінних $g(a, y, \phi)$.

Лістинг 4.5. Визначення функції користувача і розрахунок її значень у точці

$$f(x) := x^2 - 3 \cdot x - 2$$

$$f(0) = -2$$

$$f(10) = 68$$

Лістинг 4.6. Функція користувача трьох аргументів та її обчислення в точці

$$g(a, y, \phi) := a \cdot \sin(y + \phi)$$

$$g(1, 0, \pi) = 0$$

Графік функції $f(x)$ показано на рис. 4.41. Щоб побудувати його, слід натиснути на панелі Graph (Графік) кнопку з потрібним типом графіка (на неї на рисунку наведено покажчик миші) і в заготівці графіка, що з'явилася, визначити значення, які будуть відкладені на осях. У нашому випадку потрібно ввести x у місцепозначувач біля осі X і $f(x)$ – біля осі Y .

Порівняйте вміст лістингу 4.5 і рис. 4.41.

Лістинги є фрагментами робочих областей документа, які працюють без будь-якого додаткового коду (якщо це не обумовлено спеціально). Можна ввести вміст будь-якого лістингу в новий (порожній) документ, і він працюватиме так само. Щоб не перевантажувати лістинги, графіки буде надалі виведено в окремі рисунки.

Типи чисел

Наведемо основні типи змінних, які використовуються в Mathcad.

Дійсні числа

Будь-який вираз, що починається з цифри, Mathcad інтерпретує як число. Тому для введення числа просто почніть його набирати на клавіатурі (лістинг 4.7).

$$a := 1000$$

$$b := 1.3474$$

$$c := 3124.1$$

$$d := 45.21 \cdot 10^{-5}$$

Лістинг 4.7. Введення дійсних чисел:

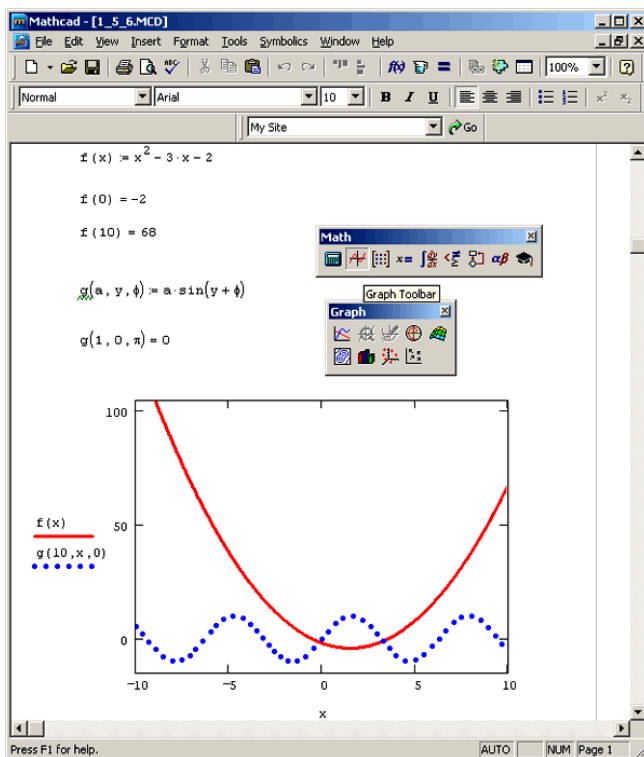


Рис. 4.41. Побудова графіка функції (продовження лістингу 4.5)

Якщо ви продовжите лістинг 4.7 послідовним виведенням усіх змінних, то будете здивовані, побачивши, що деякі числа виглядають інакше (наприклад, число $d = 0$). Це пов'язано з відповідним налаштуванням формату результату чисельного виведення, яке можна змінити, застосувавши команду Format / Result (Формат / Результат).

Можна організувати введення числа в інших системах числення: двійковій (binary), вісімковій (octal) або шістнадцятковій (hexadecimal) (лістинг 4.8).

Лістинг 4.8. Введення чисел в інших системах числення:

$a := 100010b$	$a = 34$
$b := 13o$	$b = 11$
$c := 0f3h$	$c = 243$

Комплексні числа

Більшість операцій у середовищі Mathcad стандартно здійснюється над комплексними числами. Комплексне число є сумою дійсного та уявного чисел, що отримується шляхом множення будь-якого дійсного числа на уявну одиницю (imaginary unit) i . За визначенням вважається, що $i^2 = -1$. Щоб увести уявне число, наприклад $3i$, здійсніть такі дії:

1. Введіть дійсний співмножник $3i$.
2. Введіть символ « i » або « j » безпосередньо після нього.

Для введення уявної одиниці треба натиснути клавіші $\langle 1 \rangle$, $\langle i \rangle$. Якщо просто ввести символ « i », то Mathcad інтерпретує його як змінну i . Крім того, уявна одиниця має вигляд $1i$ тільки тоді, коли відповідна формула виділена. Інакше уявна одиниця відображається просто як i (рис. 4.42).

$$\begin{aligned} a &:= i + 10 \\ x &:= 1i \\ x &:= i \end{aligned}$$

Рис. 4.42. Введення уявної одиниці

Комплексне число можна ввести у вигляді звичайної суми дійсної та уявної частин або у вигляді будь-якого виразу, що містить уявне число. Приклади введення і виведення комплексних чисел ілюструються лістингом 4.9. Для роботи з комплексними числами є декілька простих функцій і операторів, дія яких показана в лістингу 4.10.

Лістинг 4.9. Введення і виведення комплексних чисел:

$$\begin{aligned} a &:= 2i + 0.5 & a &= 0.5 + 2i \\ b &:= 1.77 \cdot e^{2i} & b &= -0.737 + 1.609i \\ c &:= 25j + 12 & c &= 12 + 25i \end{aligned}$$

Лістинг 4.10. Приклади простих обчислень з комплексними числами (продовження лістингу 4.9):

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(a) &= 2 & \operatorname{Re}(a) &= 0.5 \\ |a| &= 2.062 & \arg(a) &= 1.326 \\ |b| &= 1.77 & \arg(b) &= 2 \end{aligned}$$

Вбудовані константи

Деякі імена в Mathcad зарезервовані під системні змінні, які називаються вбудованими константами (built-in constants). Вбудовані константи поділяються на два типи: математичні (math constants), які зберігають значення деяких загальноживаних спеціальних математичних символів, і системні (system variables), що визначають роботу більшості числових алгоритмів, реалізованих у Mathcad.

Математичні константи по-різному інтерпретуються при числових і символьних обчисленнях. Обчислювальний процесор просто сприймає їх як якісь числа (лістинг 4.11), а символьний розпізнає кожне з них, виходячи з математичного контексту, і здатний видавати математичні константи як результат.

Математичні константи:

∞ – символ нескінченності (вводиться клавішами <Ctrl>+<Shift>+<z>);

e – основа натурального логарифма (клавіша <e>);

π – число «пі» (вводиться клавішами <Ctrl>+<Shift>+<p>);

i, j – уявна одиниця (вводиться клавішами <1>, <i> або <1>, <j>);

% – символ відсотка, <%>, еквівалентний 0,01.

Лістинг 4.11. Значення математичних констант:

$$\infty = 1 \times 10^{307}$$

$$e = 2.718$$

$$\pi = 3.142$$

$$i = i$$

$$j = i$$

$$\% = 0.01 \quad 10 \cdot 25 \% = 2.5$$

Системні змінні визначають роботу числових методів, закладених у вбудовані функції. Їхні передвстановлені значення наведені в лістингу 4.12 (у принципі, їх можна змінювати в будь-якій частині документа).

Системні змінні:

TOL – точність числових методів;

CTOL – точність виконання виразів, що використовується в деяких числових методах;

ORIGIN – номер початкового індексу в масивах і рядкових змінних;

PRNPRECISION – встановлення формату даних при виведенні у файл;

PRNCOLWIDTH – встановлення формату стовпця при виведенні у файл;

CWD – рядкове представлення шляху до поточної робочої папки.

Листинг 4.12. Передвстановлені значення системних змінних:

$$\text{TOL} = 1 \times 10^{-3}$$

$$\text{ORIGIN} = 0$$

$$\text{CTOL} = 1 \times 10^{-3}$$

Рядкові змінні

Значенням змінної або функції може бути не тільки число, а й рядок, що складається з будь-якої послідовності символів, поміщеної в лапки (лістинг 4.13). Для роботи з рядками в Mathcad є кілька вбудованих функцій.

Аналогічно лістингам 4.5 і 4.6 можна визначати призначені для користувача функції рядкового типу.

Системна константа ORIGIN може встановлювати не тільки номер початкового індексу масивів, а й початок відліку для відповідних вбудованих функцій рядкового (текстового) аргументу. Якщо ви хочете увімкнути цю опцію, встановіть прапорець перевірки Use ORIGIN for string indexing (Використовувати ORIGIN для індексації рядкових змінних) на вкладці Calculations (Обчислення) діалогового вікна Worksheet options (Опції документа).

Лістинг 4.13. Введення і виведення рядків:

```
s := "Hello,"      s = "Hello,"
```

```
concat(s, " world! ") = "Hello, world!"
```

НеЧисло

У версії Mathcad 12 введено новий тип даних, що має ім'я NaN – NotANumber (НеЧисло). Він призначений, головним чином, для ідентифікації елементів масивів, які містять пропущені (з тих чи інших причин) дані. Зокрема, при імпорті матриці даних із зовнішнього файлу елементам, відповідним пропускам (порожнім місцям у файлі), буде автоматично присвоєно значення NaN. Якщо якісь елементи вектора або матриці, які мають тип NaN, відкладатимуться на графіку, то вони просто ігноруватимуться при побудові кривої. Цим, по-перше, підвищується надійність імпорту даних з файлів, по-друге, поліпшується якість побудови графіків рядів даних за наявності пропусків і, по-третє, користувачеві надаються додаткові засоби з управління обчисленнями, оскільки будь-якій змінній можна присвоїти значення НеЧисло, наприклад: x:=NaN.

Необхідно пам'ятати, що математичний вираз, який містить число типу NaN, теж має тип NaN. Ідентифікувати значення змінної або виразу як НеЧисло можна за допомогою нової службової функції isNaN.

isNaN(x) – повертає 1, якщо x=NaN – повертає нуль; x – аргумент.

Ранжирувані змінні та матриці

Масивами (arrays) називають впорядковані послідовності чисел, або елементів масиву. Доступ до будь-якого елемента масиву можливий за його індексом, тобто номером у послідовності чисел (у лістингу 4.14 a – це масив, a_i – його елемент). Використання масивів надзвичайно ефективно в математичних розрахунках.

Лістинг 4.14. Одновимірний масив (вектор):

$$a := \begin{pmatrix} 14 \\ 1.4 \\ 4.7 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = 14$$

$$a_1 = 1.4$$

$$a_2 = 4.7$$

У Mathcad умовно виділяють два типи масивів:

- вектори (одноіндексні масиви, лістинг 4.14), матриці (двоіндексні, лістинг 4.15) і тензори (багатоіндексні);
- ранжирувані змінні (range variables) – вектори, елементи яких певним чином залежать від їхнього індексу.

Лістинг 4.15. Двовимірний масив (матриця):

$$A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A_{0,0} = 0.1$$

$$A_{2,0} = 7$$

Доступ до всього масиву здійснюється звичайним іменуванням векторної змінної. Над елементами масиву можна здійснювати дії як над звичайними числами, необхідно лише правильно задати відповідний індекс або поєднання індексів масиву. Наприклад, щоб отримати доступ до нульового елемента вектора a з лістингу 4.14, зробіть наступне:

1. Введіть ім'я змінної масиву (a).
2. Натисніть кнопку Subscript (Нижній індекс) зі значком $x_{..}$, на панелі Matrix (Матриця) або введіть [.

3. У місцезаповнювач, який з'явиться внизу, праворуч від імені масиву, введіть бажаний індекс (0).

Якщо після цього ввести знак числового виведення, то праворуч від нього з'явиться значення нульового елемента вектора, як показано в другому рядку лістингу 4.14.

Щоб отримати доступ до елемента багатоіндексного масиву (наприклад, елемента $a_{1,0}$ матриці a з лістингу 4.15), здійсніть такі дії:

1. Введіть ім'я змінної масиву (a).

2. Перейдіть до введення нижнього індексу, ввівши [.

3. Введіть у місцезаповнювач індексу перший індекс (2), кому (,), а в місцезаповнювач, який з'явиться після коми, – другий індекс (0).

У результаті ви отримаєте доступ до елемента, як показано в останньому рядку лістингу 4.15.

Крім доступу до окремих елементів масиву, є можливість здійснювати дії над його підмасивами (наприклад, векторами-стовпцями, які створюють матрицю). Це робиться за допомогою оператора зі значком $\times \rhd$ на панелі Matrix (Матриця) (лістинг 4.16). Символ «T» у другому рядку лістингу 4.16 позначає операцію транспонування матриці.

Лістинг 4.16. Доступ до підмасиву (продовження лістингу 4.15):

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^{(2)T} = (7 \quad 8 \quad -9)$$

Введення і редагування формул

Формульний редактор Mathcad дозволяє швидко та ефективно вводити і змінювати математичні вирази. Проте деякі аспекти його застосування не є інтуїтивними, що пов'язане з необхідністю уникнення помилок при розрахунках за цими формулами. Тому знайдіть час на ознайомлення з особливостями формульного редактора, і згодом, у реальній роботі, ви заощадите його значно більше.

Елементи інтерфейсу редактора Mathcad:

- покажчик миші (mouse pointer) – відіграє звичайну для засобів Windows роль, слідуючи за рухами миші;
- курсор – обов'язково знаходиться всередині документа в одному з трьох виглядів:
 - курсор введення (crosshair) – хрестик червоного кольору, який позначає порожнє місце в документі, куди можна вводити текст або формулу;
 - лінії введення (editing lines) – горизонтальна (underline) і вер-

- тикальна (insertion line) лінії синього кольору, які виділяють у тексті або формулі певну частину;
 - лінія введення тексту (text insertion point) – червона вертикальна лінія, аналог ліній введення для текстових областей;
 - місцезаповнювачі (placeholders) – з'являються всередині незавершених формул у місцях, які мають бути заповнені символом або оператором;
 - місцезаповнювач символу – чорний прямокутник;
 - місцезаповнювач оператора – чорна прямокутна рамка.
- Курсори і місцезаповнювачі, застосовні для редагування формул, представлено на рис. 4.43.



Рис. 4.43. Інтерфейс редагування

Графіки

Одним з найбільш вражаючих переваг Mathcad, поза сумнівом, є розвинені можливості побудови графіків.

У Mathcad вбудовано кілька різних типів графіків, які можна розбити на дві великі групи.

1. Двовимірні графіки:
 - X-Y (декартовий) графік (X-Y Plot);
 - полярний графік (Polar Plot).
2. Тривимірні графіки:
 - графік тривимірної поверхні (Surface Plot);
 - графік ліній рівня (Contour Plot);
 - тривимірна гістограма (3D Bar Plot);
 - тривимірна множина точок (3D Scatter Plot);
 - векторне поле (Vector Field Plot).

Розподіл графіків на типи дещо умовний, оскільки, управляючи установками численних параметрів, можна створювати комбінації типів графіків, а також нові типи (наприклад, двовимірна гістограма розподілу є різновидом простого X-Y графіка).

Всі графіки створюються абсолютно однаково, за допомогою панелі інструментів Graph (Графік), відмінності обумовлені даними, що відображаються. Щоб створити графік, наприклад двовимірний декартовий, виконайте такі дії:

1. Помістіть курсор введення в те місце документа, куди слід вставити графік.
2. Якщо на екрані немає панелі Graph (Графік), викличте її натисанням кнопки із зображенням графіків на панелі Math (Математика).
3. Натисніть на панелі Graph (Графік) кнопку X-Y Plot для створення декартового графіка (рис. 4.44) або іншу кнопку для іншого бажаного типу графіка.
4. У результаті в позначеному місці документа з'явиться порожня область графіка з одним або декількома місцезаповнювачами (рис. 4.44, ліворуч). Введіть у місцезаповнювач імена змінних або функцій, які повинні бути зображені на графіку. У випадку декартового графіка це два місцезаповнювачі даних, що відкладаються на осях X, Y.

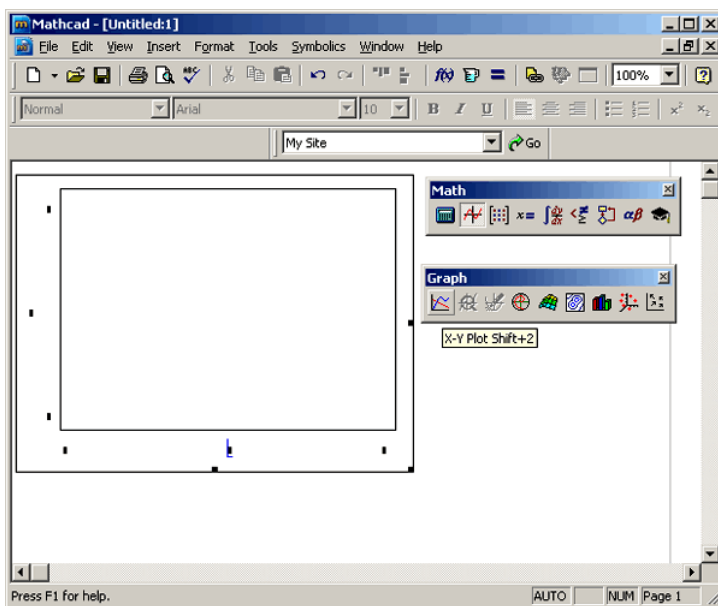


Рис. 4.44. Створення декартового графіка за допомогою панелі Graph

Якщо імена даних введено правильно, потрібний графік з'явиться на екрані. Створений графік можна змінити, в тому числі змінюючи самі дані, форматуючи його зовнішній вигляд або додаючи нові елементи оформлення.

Розглянемо приклад дослідження нелінійної хаотичної системи

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = y + z & \frac{\partial}{\partial t} x(t) := y(t) \cdot z(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -x + 0.5 & \frac{\partial}{\partial t} y(t) := x(t) + 0.5 \cdot y(t) \\ \frac{\partial z}{\partial t} = x^2 - z & \frac{\partial}{\partial t} z(t) := (x(t))^2 - z(t) \end{cases}$$

Розв'яжемо систему нелінійних диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта, застосувавши вбудовану функцію `Rkadapt`.

$$\begin{aligned} Q_0 &:= 0 \\ Q_1 &:= 0 \\ Q_2 &:= 0 \\ D(t, Q) &:= \begin{bmatrix} Q_1 + Q_2 \\ -Q_0 + 0.5 \cdot Q_1 \\ (Q_0)^2 + Q_2 \end{bmatrix} \\ t_0 &:= 0 \\ t_1 &:= 1 \\ n &:= 100 \\ a &:= \begin{pmatrix} 0.0001 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \\ s &:= rkfixed(a, t_0, t_1, n, D) \\ t &:= s \langle 0 \rangle \\ x &:= s \langle 1 \rangle \\ y &:= s \langle 2 \rangle \\ z &:= s \langle 3 \rangle \end{aligned}$$

У результаті отримаємо таблиці даних параметрів системи. Фрагменти таблиць параметрів системи X , Y , Z (рис. 4.45):

x =		0	y =		0	z =		0
	0	1·10 ⁻⁴		0	10		0	2
	1	0.12		1	10.05		1	2.02
	2	0.241		2	10.098		2	2.041
	3	0.363		3	10.146		3	2.062
	4	0.486		4	10.192		4	2.085
	5	0.609		5	10.238		5	2.109
	6	0.733		6	10.282		6	2.134
	7	0.857		7	10.326		7	2.162
	8	0.982		8	10.369		8	2.193
	9	1.108		9	10.41		9	2.226
	10	1.235		10	10.451		10	2.262
	11	1.363		11	10.49		11	2.301
	12	1.491		12	10.528		12	2.345
	13	1.62		13	10.565		13	2.393
	14	1.75		14	10.601		14	2.446
	15	1.881		15	10.636		15	2.503

Рис. 4.45. Фрагменти таблиць

Наступний етап дослідження – визначення типу поведінки системи на основі аналізу графічної залежності параметрів системи, який включає шість операцій.

1. Побудова графіка залежності параметрів системи X, Y, Z від часу t на заданому інтервалі (рис. 4.46):

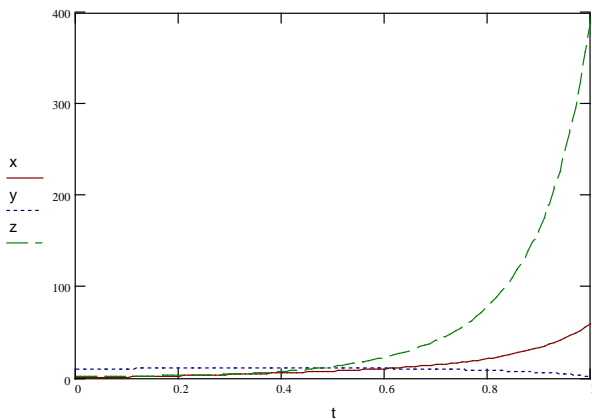


Рис. 4.46. Графік залежності параметрів системи X, Y, Z від часу

2. Побудова графіка взаємозалежності параметрів системи x, z (рис. 4.47):

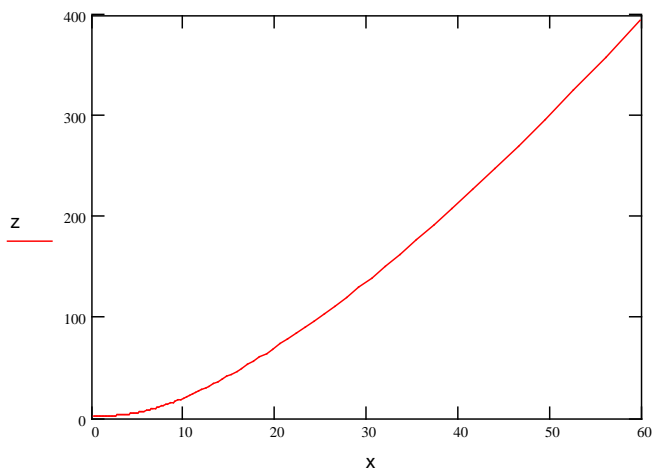


Рис. 4.47. Графік взаємозалежності параметрів системи x, z

3. Побудова графіка взаємозалежності параметрів системи y, x (рис. 4.48):

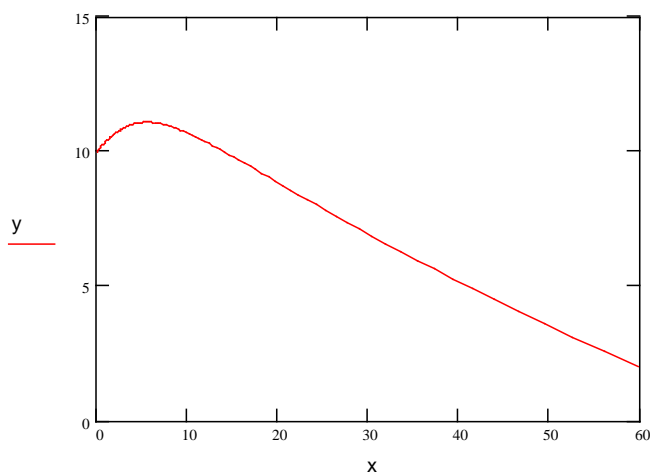


Рис. 4.48. Графік взаємозалежності параметрів системи y, x

4. Побудова графіка взаємозалежності параметрів системи y, z (рис. 4.49):

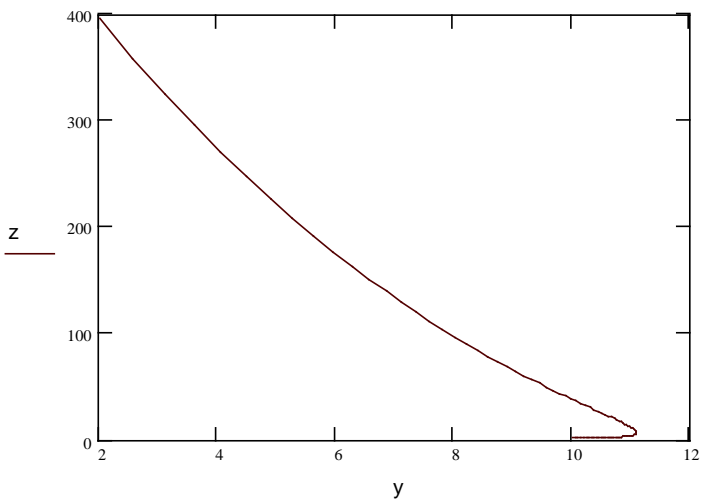


Рис. 4.49. Графік взаємозалежності параметрів системи y, z

5. Створення фазового портрета системи в точковому зображенні (рис. 4.50):

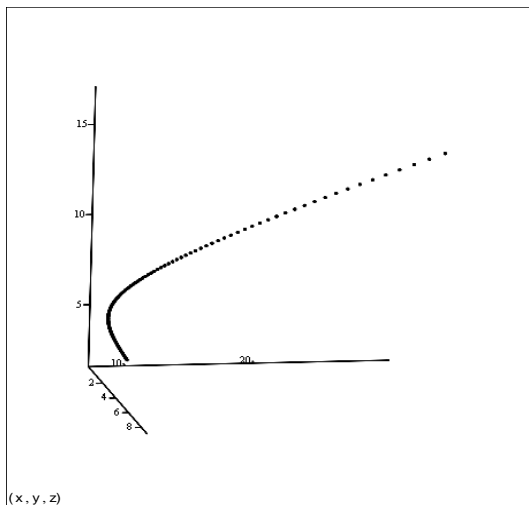


Рис. 4.50. Фазовий портрет системи в точковому зображенні

6. Створення фазового портрета системи у вигляді поверхні (рис. 4.51):

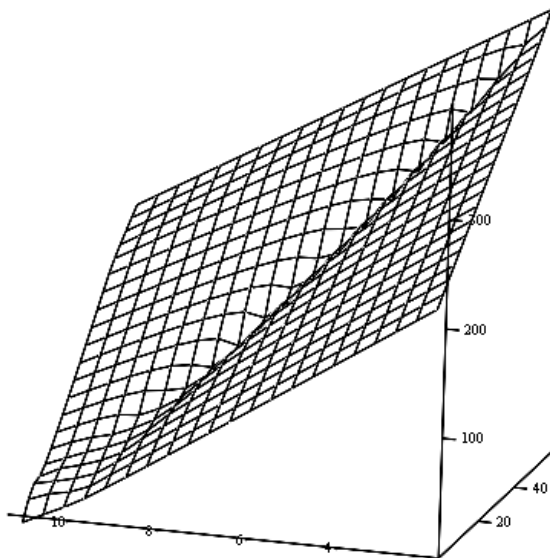


Рис. 4.51. Фазовий портрет системи у вигляді поверхні

Приклад класичної динамічної системи

Багато нелінійних рівнянь демонструють абсолютно дивні властивості, причому розв'язок більшості з них можна отримати лише чисельно. Це такі динамічні системи, як моделі динаміки популяцій (Вольтерри), генератора автоколивань (Ван дер Поля), турбулентної конвекції (Лоренца) і хімічної реакції з дифузією (Пригожина). Як уже було сказано, для вивчення динамічних систем розроблено спеціальну теорію, центральним ядром якої є аналіз фазових портретів, тобто розв'язків, отриманих за вибору усіх можливих початкових умов.

Розглянемо докладніше модель динаміки біологічних популяцій. Модель взаємодії «хижак – жертва» незалежно запропонували в 1925–1927 рр. Лотка і Вольтерра. Два диференційні рівняння (лістинг 4.17) моделюють часову динаміку чисельності двох біологічних популяцій жертви y_0 і хижака y_1 . Передбачається, що жертви розмножуються з постійною швидкістю c , а їхня чисельність спадає внаслідок поїдання хижаками. А хижаки розмножуються з швидкістю, пропорційною кількості їжі (з коефіцієнтом γ), і вмирають природним чином (смертність визначається константою D). У лістингу розраховуються три розв'язки D , G , P для різних початкових умов.

Лістинг 4.17. Модель «хижак – жертва»

$$r := 0.1 \quad C := 0.1 \quad D := 1$$

$$F(t, y) := \begin{pmatrix} C \cdot y_0 - r \cdot y_0 \cdot y_1 \\ -D \cdot y_1 + r \cdot y_0 \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

$$t_0 := 0 \quad t_1 := 100 \quad M := 500$$

$$D := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}, t_0, t_1, M, F \right]$$

$$G := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}, t_0, t_1, M, F \right]$$

$$P := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 10 \\ 1.5 \end{pmatrix}, t_0, t_1, M, F \right]$$

Модель чудова тим, що в такій системі спостерігаються циклічні збільшення і зменшення чисельності і хижаків (рис. 4.52), і жертв, яке часто відбувається в природі. Фазовий портрет системи є концентричними замкнутими кривими, що оточують одну стаціонарну точку, яка називається центром. Вочевидь, модельні коливання чисельності обох популяцій істотно залежать від початкових умов – після кожного періоду коливань система повертається в ту ж точку. Динамічні системи з такою поведінкою називають негрубими.

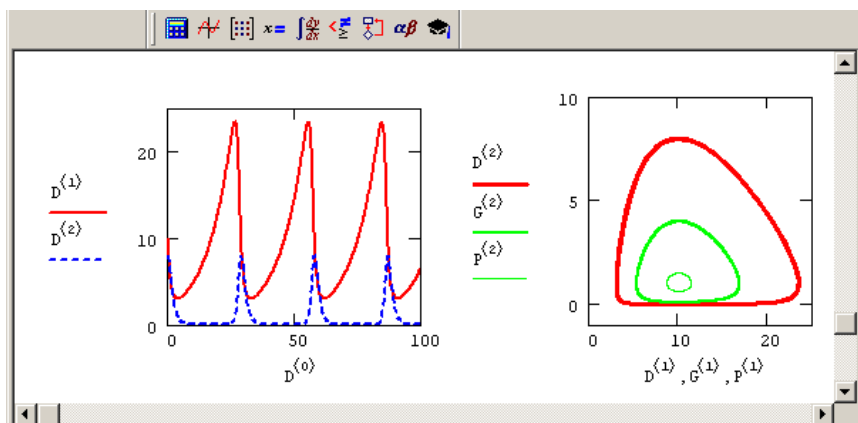


Рис. 4.52. Графік рішення (ліворуч) і фазовий портрет (праворуч) системи «хижак – жертва»

Розглянуту модель динаміки двох популяцій можна легко модифікувати, змінивши тип взаємодії «хижак – жертва» на тип конкуренції. Для цього необхідно врахувати, що зростання чисельності кожної популяції гальмує, по-перше, міжвидова і, по-друге, внутрішньовидова конкуренція.

У результаті система (в другому рядку лістингу) запишеться у такому вигляді:

$$F(t, y) = \begin{bmatrix} C * y_0 - r * y_0 y_1 - r_{0,0} * (y_0)^2 \\ -D * y_1 - r * y_0 y_1 - r_{1,1} * (y_1)^2 \end{bmatrix},$$

де матриця r задає коефіцієнти спадання чисельності внаслідок конкурентної боротьби (діагональні елементи відповідають внутрішньовидовій, а недіагональні – міжвидовій конкуренції).

Графік розв'язання (для різних початкових умов) і фазовий портрет для описаної системи ЗДР показано на рис. 4.53. Очевидно, що конкурентна боротьба призводить до встановлення певного стаціонарного стану, що відображає рівновагу видів. Особлива точка, до якої таким чином наближається розв'язок системи ЗДР, називається вузлом.

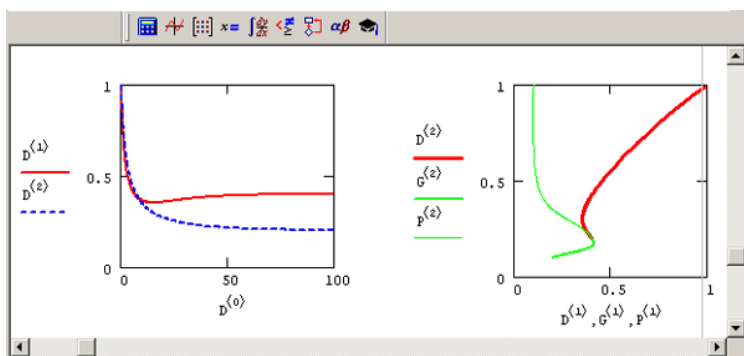


Рис. 4.53. Графік розв'язання (ліворуч) і фазовий портрет (праворуч) моделі конкуренції популяцій

9.2.3. Дослідження динамічної системи на основі пакета Matlab

Історію виникнення пакета Matlab пов'язують з ім'ям професора Кліва Моулера. Приблизно 30 років тому він брав участь у розробці пакетів і програм на мові Fortran для розв'язання задач лінійної алгебри (Linpack) і в дослідженнях проблеми власних значень матриць (Eispack). У 1980 р. на міжнародній конференції AFIPS учений прочи-

тав доповідь «Design an interactive matrix calculator», в якій уперше прозвучала назва «Matlab».

Друге народження пакета MatLab пов'язують з Джоном Літлом – президентом фірми «MathWorks», який на початку 80-х рр. переніс програму MatLab на більш сучасні обчислювальні платформи VAX, Macintosh і IBM PC.

Виробники позицінують Matlab як високопродуктивну мову для технічних розрахунків. Цей пакет може використовуватися для:

- математичних обчислень;
- створення алгоритмів;
- моделювання;
- аналізу, дослідження та візуалізації даних;
- наукової та інженерної графіки;
- розробки систем, включаючи створення графічного інтерфейсу.

У Matlab важлива роль відводиться спеціалізованим наборам інструментів Toolboxes, які дозволяють вивчати і застосовувати спеціалізовані методи: обробку сигналів, системи управління, ідентифікацію систем, побудову і аналіз нейронних систем, пошук рішень на основі нечіткої логіки і т. д. Однією з найважливіших супутніх програм є Simulink, який дозволяє моделювати нелінійні динамічні системи. Він має бібліотеку стандартних графічних блоків із вбудованими математичними функціями, причому створення моделі відбувається за допомогою миші, тобто блоки з'єднуються інформаційними зв'язками, що дозволяє наочно представити структуру моделі. Саме тому Simulink часто називають засобом візуального моделювання.

Система Matlab складається з п'яти основних частин:

1. Мова Matlab – це мова масивів і матриць високого рівня, яка дозволяє управляти потоками, структурами даних, функціями, введенням–виведенням, а також має всі особливості мови об'єктно-орієнтованого програмування.

2. Середовище Matlab – це набір інструментів і пристосувань, за допомогою яких відбувається управління змінними, даними і М-файлами.

3. Керована графіка – графічна система, яка дозволяє візуалізувати дво- і тривимірні дані, обробляти зображення, анімації та графіки, а також створювати графічний інтерфейс, призначений для користувача.

4. Бібліотека математичних функцій містить багато функцій: від найпростіших до дуже складних.

5. Програмний інтерфейс – це бібліотека, яка дозволяє писати програми на Сі, які взаємодіють з Matlab.

Стандартно після запуску пакета Matlab на екрані з'являється комбіноване вікно, що включає чотири найважливіші панелі – Command

Window, Command History, Workspace і Current Directory (рис. 4.54). Дві останні панелі закривають одна одну, і для висунення потрібної на перший план треба клацнути по відповідній вкладці. Границі трьох вікон системи змінюють свої розміри і переміщуються разом з головним вікном; щоб вони займали автономні позиції, треба натиснути кнопку Undock.

Основною панеллю є Command Window. У ній набираються команди користувача, які підлягають негайному виконанню. Тут же виводяться результати тих команд, які виконуються.

Вікно Workspace відображає поточний набір змінних, уведених користувачем у командне вікно. Тут можна побачити їхні імена, розмірність і тип представлених даних. Таку ж інформацію можна отримати в командному вікні після виконання команди whos.

Вікно Command History зберігає всі команди, що набираються користувачем, проте, на відміну від Command Window, сюди не надходять повідомлення системи і результати обчислень.

Головне меню складається з пунктів: File, Edit, Desktop, Help, Window, View і т. д.

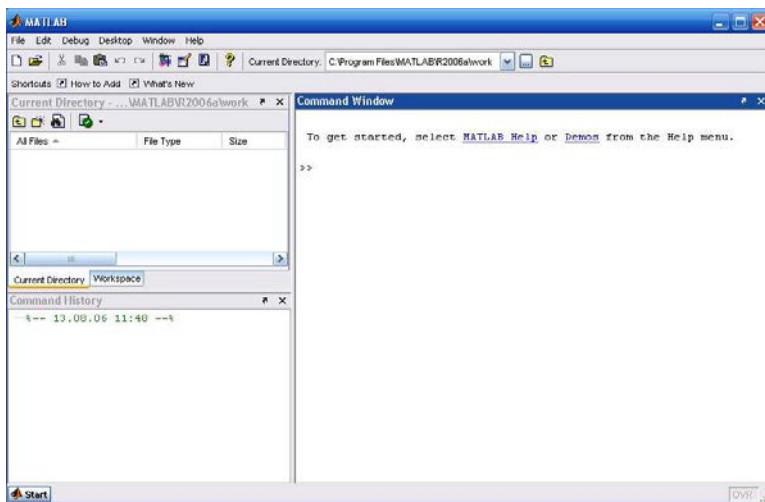


Рис. 4.54. Вікно системи Matlab

Команди меню File:

- New – перехід у режим введення нової програми;
- Open – отримання з файлу раніше збереженої програми;
- Save – збереження програми;
- Close Command Window – закрити командне вікно;

- Import Data – імпортувати раніше збережені дані;
- Save Workspace As – зберегти значення всіх змінних робочого простору;
- Set Path – задати список каталогів, що переглядаються системою, або змінити порядок їх перегляду;
- Preferences – настройка параметрів системи;
- Page Setup – настройка параметрів сторінки;
- Print – друк;
- Print Selection – друк вибраної області;
- Exit MatLab – вихід з програми.

Команди меню Edit:

- Undo і Redo – повторити і відмінити введення;
- Cut і Copy – вирізати і копіювати;
- Paste і Paste Special – проста і спеціальна вставка;
- Select All – виділити все;
- Delete – видалити (знищити);
- Find і Find Files – знайти текстовий фрагмент або файл;
- Clear Command Window, Clear Command History і Clear Workspace – очищення відповідних вікон.

Решта пунктів головного меню залежить від версії програми і від того, яке з вікон на даний момент активне. У меню Help можна відкрити довідку або демонстраційні файли. У меню Window можна вибрати порядок вікон або закрити всі документи. У меню View (або в нових версіях Desktop) можна змінювати вигляд робочого столу: визначити кількість одночасно видимих панелей середовища (Desktop Layout); прибрати панелі інструментів або заголовки і т. д.

На панелі інструментів (рис. 4.55), крім стандартних кнопок: New M-file, Open File, Cut, Copy, Paste, Undo, Redo, знаходяться кнопки Simulink (відкриває додаток Simulink), Guide (відкриває редактора інтерфейсів) і Profiler (створення призначених для користувача графічних інтерфейсів для М-файлів), а також кнопка Help і кнопка визначення поточної директорії.

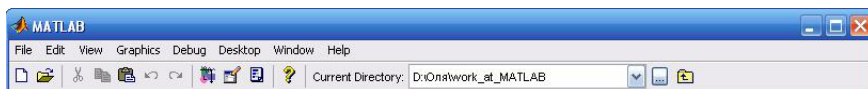


Рис. 4.55. Панель інструментів

У лівому верхньому куті командного вікна знаходяться два знаки >>, що символізують початок рядка. У цьому рядку можна набирати формули або команди, які задовольняють синтаксису мови Matlab і завершуються натисканням клавіші Enter. Якщо рядок не прибирається, то для переходу на новий рядок треба набрати ..., а потім натис-

нути Shift+Enter, при цьому команда виконуватися не буде.

Якщо всі операнди формули відомі, то Matlab обчислює значення виразу, поміщаючи його в системну змінну ans:

```
>> 2*2
ans =
4
```

Якщо у виразі вказано операнд, значення якого невідоме, Matlab видає повідомлення про помилку:

```
>> (x-1)*(x+1)
??? Undefined function or variable 'x'
```

Крапка з комою, які завершають набір командного рядка, пригнічують автоматичний режим виведення результату обчислень. Це дозволяє здійснювати багатокрокові обчислення, зберігаючи проміжні результати у відповідних змінних:

```
>>s = sin(0.5);
>>c = cos(0.5);
>>x = s*s+c*c;
>>x
x =
```

Значення всіх проміжних змінних Matlab запам'ятовує в робочому просторі. На вибір імен накладаються такі обмеження:

- можна використовувати латинські літери, цифри і символ підкреслення;
- великі та малі літери в іменах розрізняються;
- ім'я повинне починатися з літери;
- довжина може бути будь-якою, але перший 31 символ має забезпечувати унікальність імені.

Matlab розшифровується як «матрична лабораторія», оскільки основним видом даних у цьому пакеті є матриці. Навіть скалярні величини розглядаються як матриці розмірності 1x1. Тому ми можемо звернутися лише до одного елемента масиву з двома і навіть з одним індексом, задаючи його в круглих дужках:

```
>> x=5
x =
5
>> x(1,1)
ans =
5
>> x(1)
ans =
5
```

Окрім звичайних індексів, прийнятих у математиці, Matlab вико-

ристовує зведені індекси, що визначають позицію відповідного елемента масиву в оперативній пам'яті ($k=(j-1)*m+i$, k – зведений індекс; i, j – індекс рядка і стовпця; m, n – число рядків і стовпців у матриці).

Спроба звернутися до неіснуючого елемента масиву призведе до помилки:

```
>> x(2)
??? Index exceeds matrix dimensions.
```

Вектори і матриці в Matlab можуть бути не тільки числовими, а й символьними. Проте при формуванні рядкових матриць слід задавати значення однакової довжини для всіх елементів масиву, доповнюючи при цьому більш короткі рядки необхідною кількістю пропусків у кінці.

Константа – це апіорі визначене певне числове або символьне значення, представлене унікальним ім'ям. Числа (наприклад, 1, -2 і 1.23) є безіменними числовими константами.

Інші види констант у Matlab прийнято називати системними змінними, оскільки, з одного боку, вони задаються системою при її завантаженні, а з іншого – можуть перевизначатися. Основні системні змінні, вживані в системі Matlab, наведено нижче:

- . i або j – уявна одиниця (корінь квадратний з -1);
- . pi – число π – 3,1415926...;
- . eps – похибка операцій над числами з плаваючою точкою (2^{-52});
- . realmin – найменше число з плаваючою точкою (2^{-1022});
- . realmax – найбільше число з плаваючою точкою (2^{1023});
- . inf – значення машинної нескінченності;
- . ans – змінна, яка зберігає результат останньої операції і зазвичай викликає його відображення на екрані дисплея;
- . NaN – вказівка на нечисловий характер даних (Not-a-Number).

```
>> eps
ans =
2.2204e-016
>> realmin
ans =
2.2251e-308
>> realmax
ans =
1.7977e+308
>> pi
ans =
3.1416
```

Як уже наголошувалося, системні змінні можуть перевизначатися. Можна задати системній змінній eps інше значення, наприклад

eps=0.0001. Проте важливо те, що значення цих змінних стандартно задаються відразу після завантаження системи. Тому невизначеними, на відміну від звичайних змінних, системні змінні не можуть бути ніколи.

Matlab відрізняється від більшості алгоритмічних мов тим, що при переповненні розрядної сітки не видає повідомлення про помилку, а при діленні на нуль попереджає про це і пропонує в якості результату внутрішнє представлення найбільшого або найменшого числа, допустимого у форматі double:

```
>> x=1/0
Warning: Divide by zero.
x =
Inf
>> y=-1/0
Warning: Divide by zero.
y =
-Inf
```

Коли виконання степеневої функції призводить до переповнення машинної пам'яті, то в якості результату повертається «машинна нескінченність», але повідомлення про переповнення вже не видається:

```
>> w=exp(720)
w =
Inf
```

У тих випадках, коли математичний результат не визначений, у відповідну змінну заноситься значення NaN:

```
>> z=0/0
Warning: Divide by zero.
z =
NaN
```

Символьна константа – це рядок символів, поміщений у апострофи, наприклад:

```
'Matlab – система комп'ютерної математики.'
'Hello!'
'10+2'
```

Якщо в апострофи поміщено математичний вираз, то він не обчислюється і розглядається просто як рядок символів. Тому '10+2' не повертатиме число 12. Проте за допомогою спеціальних функцій перетворювання символьні вирази можуть бути видозмінені в обчислювані.

Сеанс роботи з Matlab називають сесією (session). Сесія, по суті, є поточним документом, що відображає роботу користувача з системою Matlab. У ній є рядки введення, виведення і повідомлень про помилки.

Основні арифметичні та логічні операції, виконувані в системі Matlab, наведено в табл. 4.1

Таблиця 4.1

Основні арифметичні та логічні операції

Символ	Дія, що виконується
Операції над числовими величинами	
+	покомпонентне додавання числових масивів однакової розмірності; додавання скалярної величини до кожного елемента масиву;
-	покомпонентне віднімання числових масивів однакової розмірності; віднімання скалярної величини від кожного елемента масиву;
*	множення матриць відповідно до правил лінійної алгебри; множення всіх компонент масиву на скаляр;
.*	покомпонентне множення елементів масиву однакової розмірності;
/	ділення скаляра на скаляр; покомпонентне ділення всіх елементів масиву на скаляр; $A/B = A * B^{-1} = A * \text{inv}(B)$ (A і B – квадратні матриці одного порядку)
./	покомпонентне ділення елементів масиву однакової розмірності;
\	ліве матричне ділення $A \setminus B = A^{-1} * B$ (A – квадратна матриця)
.\	$A \setminus B$ – покомпонентне ділення елементів B на A (ліве поелементне ділення)
^	піднесення скаляра до будь-якого ступеня; обчислення цілого ступеня квадратної матриці;
'	обчислення спряженої матриці;
.'	транспонування матриці;
Логічні операції	
&	логічне множення скалярів; логічне покомпонентне множення масивів однакової розмірності; логічне множення масиву на скаляр
	логічне додавання скалярів; логічне покомпонентне додавання масивів однакової розмірності; логічне додавання масиву і скаляра;
~	логічне заперечення скаляра або всіх елементів масиву;
==	перевірка на рівність;
~=	перевірка на нерівність;
>	перевірка на «більше»
>=	перевірка на «більше або дорівнює»
<	перевірка на «менше»
<=	перевірка на «менше або дорівнює»

Елементарні математичні функції, реалізовані в Matlab, наведено в табл. 4.2.

Елементарні математичні функції

Категорія функцій	Найменування функцій
Тригонометричні	cos, cot, csc, sec, sin, tan
Зворотні тригонометричні	acos, acot, acsc, asec, asin, atan, atan2
Гіперболічні	cosh, coth, csch, sech, sinh, tanh
Зворотні гіперболічні	acosh, acoth, acsch, asech, asinh, atanh
Експонента, логарифми, корінь	exp, log, log2, log10, sqrt
Округлення	ceil, fix, floor, round
Найбільший загальний дільник	gcd
Найменше загальне кратне	lcm
Модуль числа	abs
Знак числа	sign
Остача від ділення з урахуванням знака діленого	mod
Остача від ділення	rem

Імена і значення змінних робочого простору можна запам'ятати у файлі або з допомогою команди головного меню File→ Save Workspace As, або набрати аналогічну команду в поточному рядку:

```
>>save myfile
```

Matlab додасть до імені файлу розширення .mat і запам'ятає всі змінні та їхні значення у файлі myfile.mat.

Також у файл можна зберегти не всі змінні робочого простору, а тільки одну чи декілька, – за допомогою тієї ж команди save, але після імені файлу вказуються імена змінних:

```
>>save myfile x y
```

чи

```
>>save myfile x
```

На початку наступного сеансу достатньо виконати команду load:

```
>>load myfile
```

Якщо команда load застосовуватиметься в середині сесії, то поточні значення змінних зміняться на завантажувані.

За час роботи в робочому просторі може утворитися багато зайвих змінних, тому час від часу робочий простір треба чистити. Команда clear без параметрів знищує всі змінні робочого простору, але якщо вказано список змінних, то вона знищить тільки задані змінні:

```
>> x=3;
```

```
>> y=4;
```

```
>> z=x+y;
```

```
>> whos
```

```
Name      Size      Bytes Class
```

```

x    1x1    8 double array
y    1x1    8 double array
z    1x1    8 double array
Grand total is 3 elements using 24 bytes
>> clear x y
>> whos
Name   Size  Bytes Class
z      1x1    8 double array
Grand total is 1 element using 8 bytes

```

Команда `whos` дозволяє отримати докладну інформацію про змінні робочого столу. Можна також застосовувати команду `who`, яка виводить тільки список імен змінних. Для перегляду значення будь-якої змінної достатньо просто набрати її ім'я і натиснути клавішу Enter.

Сесії не записуються на диск стандартною командою `save`. Проте якщо така необхідність є, можна скористатися спеціальною командою для ведення так званого щоденника сесії:

`diary filename` – здійснює запис на диск усіх команд у рядках введення та отриманих результатів у вигляді текстового файлу з вказаним ім'ям;

`diary` – припиняє запис у файл;

`diary on` – знов починає запис у файл.

Таким чином, чергуючи команди `diary` та `diary on`, можна зберігати потрібні фрагменти сесії в їхньому формальному вигляді. Команду `diary` можна задати і у вигляді функції `diary('file')`, де рядок 'file' задає ім'я файлу. Техніку застосування команди `diary` пояснює такий приклад:

```

>> diary myfile.m
>> 1+2
ans =
3
>> diary off
>> sin(1)
ans =
0.8415
>> diary on
>> 17/48
ans =
0.3542
>> diary off

```

Неважко помітити, що в цьому прикладі перша операція – $1+2=3$ – буде записана у файл `myfile.m`, друга – $\sin(1)=0.8415$ – не буде записана, третя операція – $17/48=0.3542$ – знову буде записана. Отже, буде

створено файл сценарію (Script-файл) такого вигляду:

```
1+2
ans =
3
diary off
17/48
ans =
0.3542
diary off
```

Він наведений у тому ж вигляді, як був записаний, тобто з пропусками між рядками. Проте при спробі запустити такий файл у командному рядку вказуванням його імені видається повідомлення про помилку:

```
>> myfile
??? Error: File: myfile.m Line: 3 Column: 6
Expression or statement is incomplete or incorrect.
```

Тому для перегляду тексту щоденника слід скористатися командою type:

```
>> type myfile
1+2
ans =
3
diary off
17/48
ans =
0.3542
diary off
```

Закінчити роботу з програмою можна за допомогою команди >>exit

Розв'язання диференційних рівнянь у Matlab

Побудова макроекономічних динамічних моделей має на увазі роботу з системами диференційних і різницевих рівнянь, тому буде до речним розглянути функції, вживані в Matlab для розв'язування систем диференційних рівнянь.

Для розв'язування звичайних диференційних рівнянь (ODE) можуть бути застосовані числові методи, які в Matlab реалізовані в спеціальних функціях – вирішувачах: ode45, ode23, ode113 і т. д.

Загальний порядок програмування:

1) створюється М-функція з описом правих частин диференційних рівнянь;

2) створюється М-сценарій з вибраним вирішувачем.

Наведемо стислий опис функцій-вирішувачів:

– ode45 – однокрокові явні методи Рунге-Кутта 4-го і 5-го поряд-

ку. Це класичний метод, що рекомендується для початкової спроби розв'язання. У багатьох випадках він дає добрі результати;

- ode23 – однокрокові явні методи Рунге-Кутта 2-го і 4-го порядку. За помірної жорсткості системи ЗДР і низьких вимог до точності цей метод може бути виграшним щодо швидкості розв'язання;
- ode113 – багатокроковий метод Адамса-Бошфорта-Моултона змінного порядку. Це адаптивний метод, який може забезпечити високу точність рішення;
- ode15s – багатокроковий метод змінного порядку (від 1-го до 5-го, стандартно – 5-го), що використовує формули числового диференціювання. Це адаптивний метод, його варто застосовувати, якщо вирішувач ode45 не забезпечує розв'язку;
- ode23s – однокроковий метод, що використовує модифіковану формулу Розенброка 2-го порядку. Може забезпечити високу швидкість обчислень за низької точності;
- ode23t – метод трапецій з інтерполяцією. Цей дає гарні результати при розв'язання задач, що описують осцилятори з майже гармонійним вихідним сигналом;
- ode23tb – неявний метод Рунге-Кутта на початку розв'язування і метод, що використовує формули зворотного диференціювання 2-го порядку в подальшому. За низької точності цей метод може виявитися більш ефективним, ніж ode15s.

Усі вирішувачі можуть розв'язувати системи рівнянь явного вигляду

$$y' = F(t, t),$$

а вирішувачі ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb – рівняння неявного вигляду

$$My' = F(t, t).$$

У поданому нижче описі ім'я функції дано узагальнено у вигляді ode***, де *** – будь-який з наведених вище алфавітно-цифрових суфіксів. Найпростіше звернення до будь-якої функції ode*** має такий вигляд:

$$[tout, yout] = \text{ode***}(\text{fun}, \text{tspan}, y0).$$

Тут:

- fun – покажчик функції обчислення правих частин диференційного рівняння;
- tspan – вектор, що містить контрольні значення незалежної змінної (можна вказати тільки початкове і кінцеве значення, а можна і проміжні);

- y_0 – початкове значення залежної змінної (скаляр або вектор-стовпець);
- $tout$ – вектор-стовпець контрольних значень незалежної змінної;
- $yout$ – розв’язок, представлений масивом, у якому кожен рядок відповідає одному елементу в стовпці $tout$.

Для відображення результатів можна побудувати графік, скориставшись функцією `plot` у вигляді:

```
>>plot(tout,yout).
```

Повна форма звернення до функцій `ode***` має такий вигляд:

```
[tout,yout,varargout]=ode***(fun,tspan,y0,options,varargin).
```

Тут:

- `options` – аргумент, що дозволяє задавати управляючі параметри;
- `varargin` – додаткові аргументи для обчислення `fun`;
- `varargout` – додаткові результати, що виникають за деяких варіантів завдання `options`.

Аргумент `options` дозволяє відобразити різні управляючі параметри. Розглянемо тут лише деякі. Всі вони задаються шляхом звернення до функції `odeset`, аргументом якої є послідовність пар вигляду `<'параметр', значення>`.

Параметр `RelTol` задає допустиму відносну похибку.

Параметр `AbsTol` задає допустиму відносну похибку обчислень.

Параметр `InitialStep` задає початковий крок, який стандартно вибирається автоматично.

Параметр `OutputFcn` описує функцію виведення; він має значення лише в тому випадку, якщо функція використовується без явного вказування функції виведення. Стандартно `OutputFcn` викликає функцію `odeplot`, яка будує графік залежності від часу. Установка значення `odephas2` дозволяє побудувати двовимірну фазову площину, що буде зроблено в окремому графічному вікні.

Побудова моделі Солоу в пакеті Matlab

Багато математичних моделей економічного зростання є безпосереднім узагальненням широковідомої неокласичної моделі Солоу-Свена, створеної в середині XX ст. У цій моделі в загальному випадку використовується неокласична двофакторна виробнича функція

$$Y = F(K, L),$$

де Y – агрегований випуск;

K – фізичний капітал;

L – трудові ресурси.

У практичних задачах широко застосовується виробнича функція Кобба-Дугласа:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} (K, L), \quad (4.1)$$

$$0 < \alpha < 1.$$

Тут параметр A_t описує рівень технологій. Нижче при побудові прикладів використовується виробнича функція вигляду (4.1).

Основне рівняння моделі Солоу-Свена, що описує динаміку зростання фізичного капіталу, може бути записано так:

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t. \quad (4.2)$$

У рівнянні (4.2) використано наступні позначення: δ – рівень амортизації капіталу, s – норма накопичення. Далі передбачається, що трудові ресурси складають постійну частку населення, темп зростання якого постійний. Це припущення приводить до залежності вигляду

$$L_t = L_0 e^{mt}, \quad (4.3)$$

де m – темп зростання населення. Крім того, нижче вважається, що $A_t = \text{const}$ (отже віддача від масштабу є постійною). Для перетворення моделі вводиться поняття фондоозброєності k ($k=K/L$) і питомого випуску ($y=Y/L$). Тоді

$$y_t = f(k_t), \quad (4.4)$$

де $f(k) = F(k, 1) = F(\frac{K}{L}, 1)$ – неокласична однофакторна виробнича функція.

В результаті перетворення рівняння (4.2) з урахуванням (4.3)–(4.4) одержуємо диференційне рівняння:

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - (\delta + m)k \equiv sf(k) - nk, \quad (4.5)$$

$$n \equiv \delta + m.$$

Стани рівноваги рівняння (4.5) та їхня залежність від параметрів моделі легко визначаються на основі нескладного графічного аналізу (рис. 4.56).

Диференційне рівняння має два розв'язки, причому 0 – нестійкий стан рівноваги, а k^* – стійкий. Умова існування стійкого розв'язку виглядає так:

$$sf'(0) > \delta + m. \quad (4.6)$$

Звичайно, модель Солоу є дуже спрощеною, але вона служить основою для побудови складніших моделей економічного зростання.

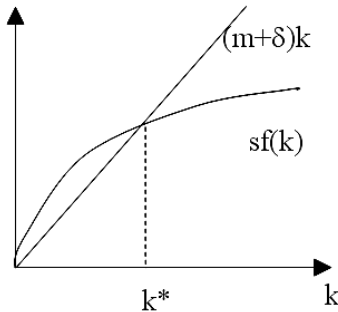


Рис. 4.56. Графічний аналіз моделі Солоу

Далі продемонструємо на прикладі моделі Солоу можливості пакета Matlab для моделювання економічної динаміки. Слідуючи наведеним вище етапам, спочатку створюємо М-функцію з описом правих частин диференційного рівняння. Для цього в головному меню вибираємо File>New>M-file, і у вікні редактора М-файлів пишемо такий текст:

```
function dkdt = solou (t,k)
global s alfa A n
dkdt=s*A*(k^alfa)-n*k
```

Для використання функції її необхідно зберегти. Команда global робить змінні, розташовані за нею, глобальними (тобто їхні значення можна змінити як усередині функції, так і в командному вікні).

Скористаємося вирішувачем ode45. У командному вікні слід записати команди, які розв'яжуть диференційне рівняння із заданими початковими параметрами і побудують графік отриманої траєкторії (рис. 4.57), а саме:

```
>> global s alfa A n
>> A=0.9;
>> alfa=0.5;
>> s=0.8;
>> n=0.05;
>> [t,k]=ode45('solou',[0 500],[1]);
>> plot(t,k).
```

З рисунка видно, що k стабілізується на рівні 207 одиниць. Переконаємося в тому, що це значення (k^*) є стійким. Для цього розрахуємо траєкторію для різних початкових умов:

```
>> hold on
>> for i=0:100:500
[t,k]=ode45('solou',[0 500],[i]);
plot(t,k)
end.
```

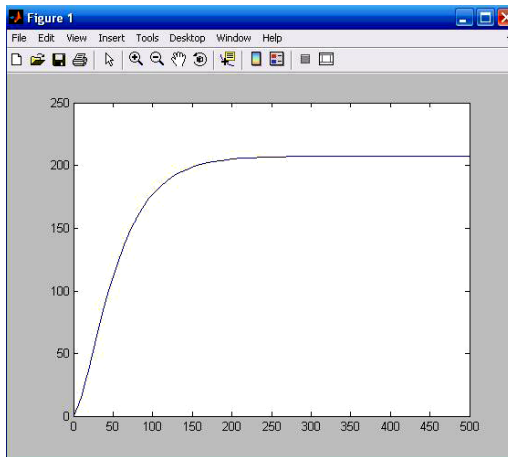


Рис. 4.57. Залежність фондоозброєності від часу

Графік на рис. 4.58 ілюструє стійкість стану рівноваги k^* .

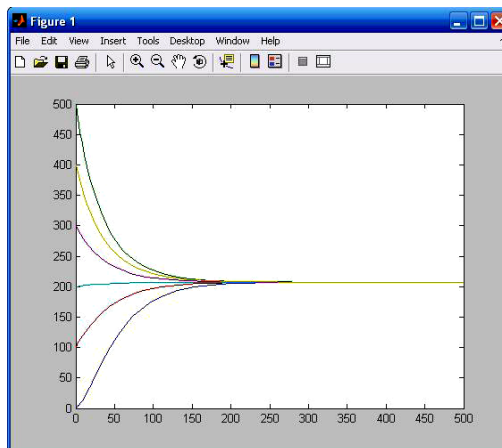


Рис. 4.58. Стійкість стану рівноваги k^*

Застосування пакетів імітаційного моделювання для побудови моделі Солоу

Розглянемо процес імітації в програмному пакеті Simulink на прикладі моделі Солоу. Програма Simulink є додатком до пакета Matlab; вона реалізовує принципи візуального програмування, тобто користувач створює на екрані модель за допомогою вбудованих стандартних

блоків. При цьому користувачеві не потрібно досконально вивчати мову програмування і числові методи, – цілком досить загальних знань про програму і знань у своїй галузі дослідження. Працюючи з Simulink, він може як користуватися вбудованою бібліотекою блоків, так і створювати свої власні не тільки блоки, а й цілі бібліотеки блоків.

Для запуску програми необхідно спочатку запустити Matlab. Після цього можна або набрати команду Simulink у вікні команд, або натиснути кнопку на панелі інструментів. Щоб запустити вже готову модель, можна скористатися командою Open з меню File і відкрити файл моделі (mdl).

Після запуску пакета з'явиться вікно оглядача розділів бібліотеки Simulink (рис. 4.59).

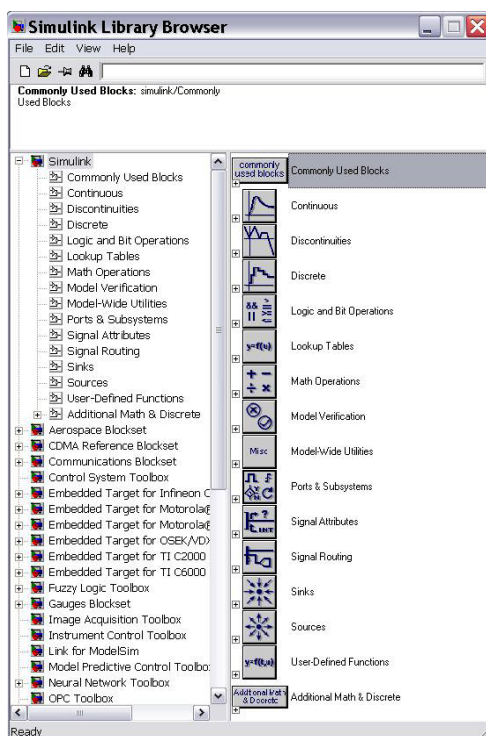


Рис. 4.59. Вікно оглядача розділів бібліотеки

Щоб побудувати модель, потрібно спочатку створити новий файл моделі (рис. 4.60) за допомогою команди File> New> Model або відповідної кнопки на панелі інструментів.

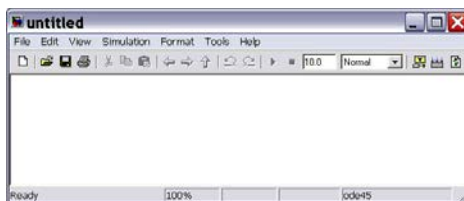


Рис. 4.60. Вікно моделі

Далі слід розташувати блоки у вікні моделі, тобто курсором перетягнути потрібні блоки з бібліотеки у вікно. Щоб видалити блок, його необхідно вибрати і натиснути клавішу Delete. Далі, якщо це треба, слід змінити параметри блоку, клацнувши двічі мишкою на зображенні блоку.

Після установки на схемі всіх блоків їх потрібно з'єднати. Для цього натискають мишкою на вихід з блоку (при цьому курсор матиме вигляд великого хреста з тонких ліній), і ведуть стрілку, не відпускаючи миші, до потрібного входу в блок (курсор набуде вигляду хреста зі здвоєних ліній). У випадку правильного з'єднання зображення стрілки на вході в блок змінить колір. Для створення точки галуження в сполучній лінії потрібно підвести курсор до передбачуваного вузла і, натиснувши праву клавішу миші, протягнути лінію. Для видалення лінії її треба вибрати (так само, як це робиться для блоку), а потім натиснути клавішу Delete на клавіатурі. Після складання схеми необхідно зберегти її у вигляді файлу на диску.

Побудуємо модель Солоу, використовуючи вбудовані блоки Simulink. Для цього скористаємося наведеними нижче блоками.

1. Бібліотека Sources – джерела сигналів і дій:

а) Constant – константа.

Призначення: задає постійний за рівнем сигнал.

Параметри:

- Constant value – постійна величина;
- Interpret vector parameters as 1-D – інтерпретувати вектор параметрів як одновимірний (при встановленому прапорці) (цей параметр зустрічається у більшості блоків бібліотеки Simulink).

Значення константи може бути дійсним або комплексним числом, яке обчислюється виразом, вектором або матрицею.

б) Step – крок, приріст, ступінь.

Призначення: формує східчастий сигнал.

Параметри:

- Step time – час настання перепаду сигналу (с);
- Initial value – початкове значення сигналу;
- Final value – кінцеве значення сигналу.

Перепад може бути як у бік наростання (кінцеве значення більше за початкове), так і в бік спадання (кінцеве значення менше за початкове). Значення початкового і кінцевого рівнів можуть бути не тільки невід’ємними, а й від’ємними (наприклад, зміна сигналу з рівня -5 до рівня -3).

2. Бібліотека Sinks – реєструючі пристрої, приймачі сигналів:

а) Score – осцилограф, індикатор, графічний пристрій.

Призначення: будує графіки досліджуваних сигналів у функції часу. Дозволяє стежити за змінами сигналів у процесі моделювання.

Щоб відкрити вікно прогляду сигналів, необхідно виконати подвійне клацання лівою клавішею миші на зображенні блоку. Це можна зробити на будь-якому етапі розрахунку (на його початку, під час розв’язання чи після нього). У тому випадку, якщо на вхід блоку надходить векторний сигнал, то крива для кожного елемента вектора будується окремим кольором.

б) Display – числовий дисплей.

Призначення: відображає значення сигналу у вигляді числа.

Параметри:

- Format – формат відображення даних;
- Decimation – кратність відображення вхідного сигналу (при Decimation = 1 відображається кожне значення вхідного сигналу, при Decimation = 2 – кожне друге значення, при Decimation = 3 – кожне третє значення і т. д.);
- Sample time – крок модельного часу (визначає дискретність відображення даних);
- Floating display (прапорець) – переведення блоку у «вільний» режим (у цьому режимі вхідний порт блоку відсутній, а вибір сигналу для відображення виконується клацанням лівої клавіші миші на відповідній лінії зв’язку).

3. Бібліотека Continuous – лінійні блоки:

а) Integrator – інтегратор.

Призначення: виконує інтегрування вхідного сигналу.

Параметри:

- External reset – зовнішнє скидання. (Це тип зовнішнього управляючого сигналу, який забезпечує скидання інтегратора до початкового стану. Він вибирається зі списку:

none	ні (скидання не виконується)
rising	наростаючий сигнал (передній фронт сигналу)
falling	спадаючий сигнал (задній фронт сигналу)
either	наростаючий або спадаючий сигнал
level	ненульовий сигнал (скидання виконується, якщо сигнал на управляючому вході перестає дорівнювати нулю)

У тому випадку, якщо вибрано якийсь (але не none) тип управляючого сигналу, то на зображенні блоку з'являється додатковий управляючий вхід. Поряд з цим входом буде показано умовне позначення управляючого сигналу.);

- Initial condition source – джерело початкового значення вихідного сигналу. (Вибирається зі списку: internal – внутрішній; external – зовнішній. У цьому випадку на зображенні блоку з'являється додатковий вхід, позначений x_0 , на який необхідно подати сигнал, який задасть початкове значення вихідного сигналу інтегратора.);
 - Initial condition – установлення початкового значення вихідного сигналу інтегратора (параметр доступний, якщо вибрано внутрішнє джерело цього початкового значення);
 - Limit output (прапорець) – застосування обмеження вихідного сигналу;
 - Upper saturation limit – верхній рівень обмеження вихідного сигналу (може бути заданий як числом, так і символьною послідовністю inf);
 - Lower saturation limit – нижній рівень обмеження вихідного сигналу (може бути заданий як числом, так і символьною послідовністю inf);
 - Show saturation port – управляє відображенням порту, який виводить сигнал, що свідчить про вихід інтегратора на обмеження. (Вихідний сигнал цього порту може набувати таких значень: 0 (нуль) – якщо інтегратор не знаходиться на обмеженні; +1 – якщо вихідний сигнал інтегратора досягнув верхньої обмежувальної границі; -1 – якщо вихідний сигнал інтегратора досяг нижньої обмежувальної границі);
 - Show state port (прапорець) – відобразити / сховати порт стану блоку (цей порт використовується в тому випадку, якщо вихідний сигнал інтегратора необхідно подати як сигнал зворотного зв'язку цього ж інтегратора);
 - Absolute tolerance – абсолютна похибка.
4. Бібліотека Math Operations – блоки математичних операцій:
- а) Gain – пропорційна ланка.

Призначення: здійснює множення вхідного сигналу на постійний коефіцієнт.

Параметри:

- Gain – коефіцієнт посилення;
- Multiplication – спосіб виконання операції; може набувати значення, вибраного зі списку:

Element-wise $K*u$	Поелементний
Matrix $K*u$	Матричний. Коефіцієнт посилення є лівостороннім операндом
Matrix $u*K$	Матричний. Коефіцієнт посилення є правостороннім операндом

- Saturate on integer overflow (прапорець) – пригнічувати переповнення цілого (при встановленому прапорці обмеження сигналів цілого типу виконується коректно).

b) Math Function – математична функція.

Призначення: виконує обчислення математичної функції.

Параметри:

- Function – вид обчислюваної функції, який вибирається зі списку:

exp	Експоненційна функція
log	Функція натурального логарифма
10^u	Обчислення ступеня 10
log10	Функції логарифма
magnitude^2	Обчислення квадрата модуля вхідного сигналу
square	Обчислення квадрата вхідного сигналу
sqrt	Квадратний корінь
pow	Піднесення до ступеня
conj	Обчислення комплексно спряженого числа
reciprocal	Обчислення частки від ділення вхідного сигналу на 1
hypot	Обчислення кореня квадратного з суми квадратів вхідних сигналів (гіпотенузи прямокутного трикутника за значеннями катетів)
rem	Функція, що обчислює остачу від ділення першого вхідного сигналу на другий
mod	Функція, що обчислює остачу від ділення з урахуванням знака
transpose	Транспонування матриці
hermitian	Обчислення ермітової матриці

- Output signal type – тип вихідного сигналу, який вибирається зі списку:

Auto	Автоматичне визначення типу
Real	Дійсний сигнал
Complex	Комплексний сигнал

c) Product – добуток.

Призначення: здійснює обчислення добутку поточних значень сигналів.

Параметри:

- Number inputs – кількість входів (може задаватися як число або як список знаків; у списку знаків можна використовувати знаки * (помножити) і / (поділити));
- Multiplication – спосіб виконання операції (може набувати значень: Element-wise – поелементний або Matrix – матричний);
- Saturate on integer overflow (прапорець) – пригнічувати переповнення цілого (при встановленому прапорці обмеження сигналів цілого типу виконується коректно).

Якщо параметр Number inputs заданий списком, що включає крім знаків множення також знаки ділення, то мітки входів будуть позначені символами відповідних операцій. Блок може використовуватися для операцій множення і ділення скалярних векторних або матричних сигналів. Типи вхідних сигналів блоку повинні співпадати. Якщо як кількість входів вказати цифру 1 (один вхід), то блок можна застосовувати для обчислення добутку елементів вектора. При здійсненні матричних операцій слід дотримуватися правил їх виконання. Наприклад, при множенні двох матриць необхідно, щоб кількість рядків першої матриці дорівнювала кількості стовпців другої матриці.

d) Sum – суматор.

Призначення: виконує обчислення суми поточних значень сигналів.

Параметри:

- Icon shape – форма блоку (може бути round – кругла або rectangular – прямокутна);
- List sign – список знаків (у списку можна використовувати такі знаки: + (плюс), - (мінус) і | (роздільник знаків);
- Saturate on integer overflow (прапорець) – пригнічувати переповнення цілого (при встановленому прапорці обмеження сигналів цілого типу виконується коректно).

Кількість входів і операція (додавання або віднімання) визначається списком знаків параметра List sign; при цьому мітки входів позначаються відповідними знаками. У параметрі List sign можна також вказати число входів блоку. В цьому випадку всі входи будуть підсумовуючими. Якщо кількість входів блоку перевищує 3, то зручніше застосовувати блок Sum прямокутної форми. Блок може використовуватися для підсумовування скалярних, векторних або матричних сигналів. Типи сумовних сигналів повинні співпадати. Не можна, наприклад, подати на один і той же той підсумовуючий блок сигнали цілого і дійсного типів. Якщо кількість входів блоку більша за один, то блок виконує поелементні операції над векторними і матричними сигналами. При цьому кількість елементів у матриці або векторі має бути однаковою. Якщо в якості списку знаків вказати цифру 1 (один вхід), то блок можна використовувати для визначення суми елементів вектора.

е) Add – додавання.

Призначення: дозволяє додавати сигнали різних типів.

Параметри: співпадають з параметрами блоку Sum, але цей блок має й додаткові параметри:

- Require all inputs to have same data type (прапорець) – вхідні сигнали мають бути однакового типу;
- Output data type mode – тип даних на виході з блоку.

Структурну схему моделі Солоу, побудовану в Simulink, представлено на рис. 4.61.

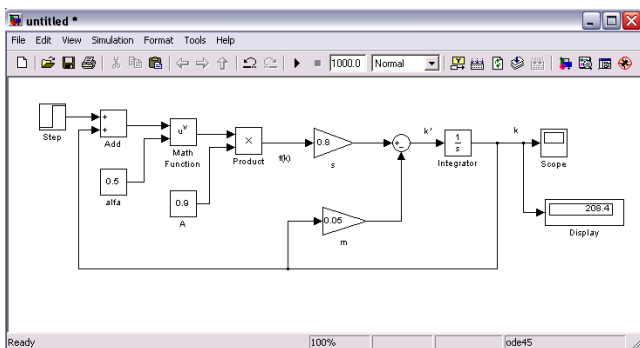


Рис. 4.61. Модель Солоу

Перед виконанням розрахунків необхідно заздалегідь задати їхні параметри. Задавання параметрів розрахунку виконується в панелі управління меню Simulation>Parameters (рис. 4.62).

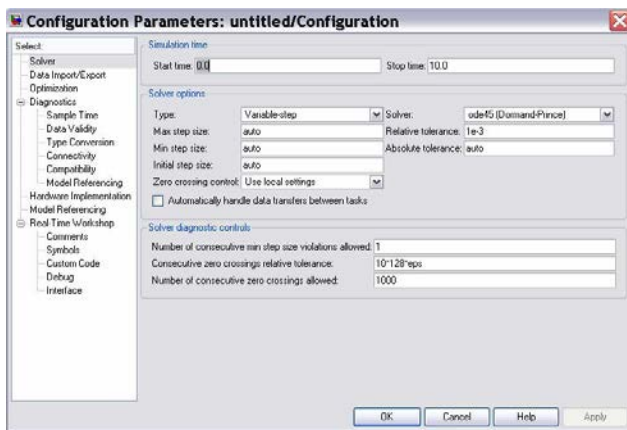


Рис. 4.62. Вікно «Параметри»

Запуск розрахунку виконується за допомогою вибору пункту меню Simulation>Start або інструментом «стрілка» на панелі інструментів. Процес розрахунку можна завершити достроково, вибравши пункт меню Simulation/Stop або інструмент «квадратик». Розрахунок також можна призупинити (Simulation>Pause), а потім продовжити (Simulation>Continue). Після запуску моделі на дисплеї з'явиться значення k^* .

У результаті роботи моделі отримано графік фондоозброєності (рис. 4.63):



Рис. 4.63. Графік фондоозброєності

9.2.4. Дослідження динамічної системи на основі пакета DIN

Існують два методи формального опису алгоритмів динамічних моделей: перший – широковідомий аналітичний метод у вигляді формул, другий – у вигляді структурних схем, які застосовуються досить рідко, наприклад, у теорії автоматичного регулювання (ТАР).

Опис моделей аналітичними формулами дозволяє компактно представити комплекс алгоритмів, що використовуються. Проте цей спосіб має два істотні недоліки. По-перше, відображення багатьох нелінійних залежностей, що помітно збільшує аналітичне відображення, і воно перестає бути компактным. По-друге, за наявності великої кількості нестационарних зворотних зв'язків неможливо відстежити всі виникаючі та зникаючі в процесі життя об'єкта ланцюги взаємних впливів.

Отже, нелінійність динамічних моделей і нестационарність структур (що відповідає нестационарності реального об'єкта) ускладнюють і сприйняття моделей при їхньому записі в аналітичному вигляді. Представлення динамічних моделей структурними схемами виключає ці недоліки, оскільки моделі тренажерів досить складні і характеризуються великою кількістю зворотних зв'язків. До того ж, за допомогою структурних схем легше розібратися в суті моделей, що використовуються.

Структурні схеми складаються з елементарних операторів, кожен з яких містить одну або декілька операцій перетворювання, що відображають формалізований початковий стан у вигляді якоїсь функції: підсумовування, інтеграція, ділення і т. д. Оператори можуть мати кілька входів (вхідних координат), а вихід – завжди один.

Оператори, що застосовуються в схематичному моделюванні:

1. Оператор-суматор – призначений для підсумовування кількох вхідних сигналів з певними коефіцієнтами (структурну схему наведено на рис. 4.64):

$$B = \pm K_1 A_1 \pm K_2 A_2 \pm \dots \pm PC,$$

де B – результат;

A_1, A_2, \dots, A_n – вхідні сигнали;

K_1, K_2, \dots, K_n – коефіцієнти, на які множаться вхідні сигнали;

PC – постійний сигнал.

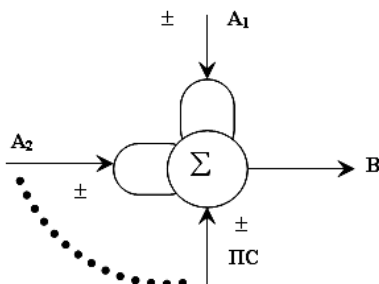


Рис. 4.64. Оператор-суматор

2. Коефіцієнт, що змінює суму вхідних сигналів (структурну схему наведено на рис. 4.65):

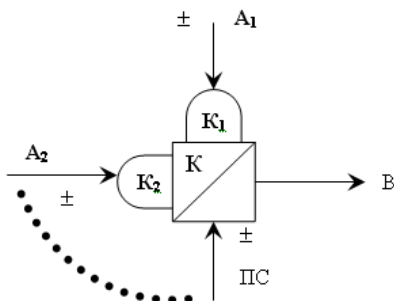


Рис. 4.65. Оператор-коефіцієнт

$$B = (\pm K_1 A_1 \pm K_2 A_2 \pm \dots \pm PC)K,$$

де K – загальний для всієї суми коефіцієнт передачі сигналів.

Коефіцієнт K може бути постійним на всьому інтервалі часу моделювання, екзогенно змінюватися, дискретно або плавно, сигналами з моделі, або за допомогою заданого графіка змінювання.

3. Оператор множення кількох вхідних сигналів (структурну схему наведено на рис. 4.66):

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot (\pm K_1 C_1 \pm K_2 C_2 \pm \dots \pm PC),$$

де A_1, A_2, \dots, A_n – перемножувані сигнали;

C_1, C_2, \dots, C_n – сумовні сигнали з коефіцієнтами K_1, K_2, \dots, K_n , сума яких множиться на добуток сигналів A_1, A_2, \dots, A_n .

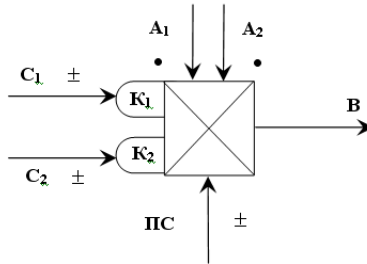


Рис. 4.66. Оператор множення

4. Оператор ділення сигналів (структурну схему наведено на рис. 4.67):

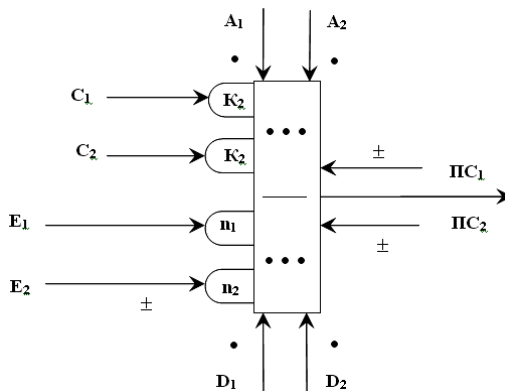


Рис. 4.67. Оператор ділення

$$B = [A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot (K_1 C_1 \pm K_2 C_2 \pm \dots \pm PC_1)] / \\ / [D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_n \cdot (n_1 E_1 \pm n_2 E_2 \pm \dots \pm PC_2)] .$$

5. Оператор-інтегратор – призначений для виконання операції накопичення вхідних потоків у кількість накопиченого (структурна схема – на рис. 4.68). Потоки, що збільшують кількість накопиченого, мають знак «+» (плюс), а потоки, що зменшують цю кількість, – знак «-» (мінус).

$$B = \int_0^T (K_1 A_1 + K_2 A_2 + \dots - n_1 E_1 - n_2 E_2 - \dots \pm PC) dt \pm ПУ ,$$

де A_1, A_2, \dots, A_n – вхідні потоки;

E_1, E_2, \dots, E_n – вихідні потоки;

$(0, T)$ – інтервал часу інтеграції;

PC – постійний сигнал;

$ПУ$ – початкові умови інтеграції;

B – результат інтеграції, тобто величина накопичення вхідних потоків за інтервал часу $(0, T)$ (іноді його можна назвати потенціалом).

Операція інтеграції в структурних схемах записується у вигляді її зображення за допомогою оператора Лапласа як $1/P$ (де P – операція диференціювання, зворотна інтегруванню).

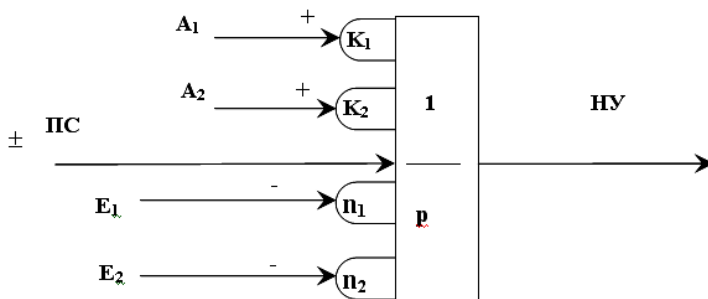


Рис. 4.68. Оператор-інтегратор

6. Операція інтегрування з обмеженням, аналогічна попередній (5), але тут вводиться обмеження потенціалу згори або знизу (і згори, і знизу). Їхні схеми показано на рис. 4.69).

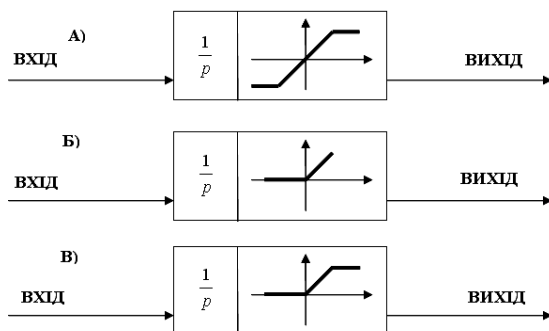


Рис. 4.69. Оператор-інтегратор з обмеженням

Так, на рис. 4.69(А) наведено приклад обмежень накопичень з від'ємними і невід'ємними границями. На рис. 4.69(Б) – приклад обмеження накопичення «за нулем» без обмеження верхньої границі (на складі готової продукції не може бути відємного накопичення). На рис. 4.69(В) – приклад обмеження накопичення між нулем і якоюсь невід'ємною величиною (коефіцієнт змінності на виробництві не може бути менше нуля і більше 3).

7. Оператор «аперіодична ланка» є оператором-інтегратором з від'ємним зворотним зв'язком, що дорівнює одиниці. Аперіодична ланка характеризується тим, що вихідний сигнал з'являється поступово після вхідного сигналу. Так, якщо на вхід аперіодичної ланки подати східчастий сигнал А, то на виході формуватиметься сигнал у вигляді експоненти з постійною часу T . Чим більше T , тим повільніше формується вихідний сигнал В.

Структурну схему оператора наведено на рис. 4.70(А), а вихідну характеристику за східчастого впливу – на рис. 4.70(Б).

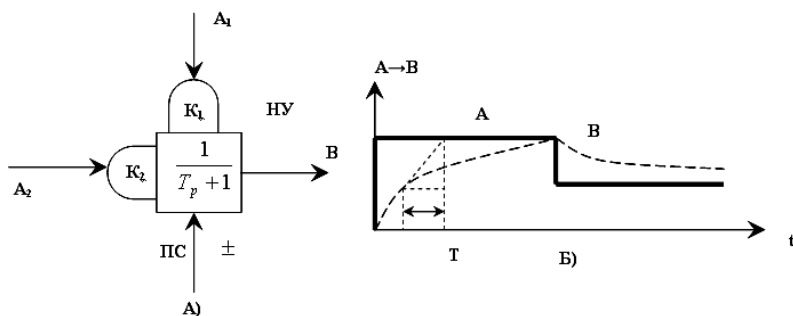


Рис. 4.70. Оператор «аперіодична ланка»

8. Оператор «реальна похідна» – призначений для обчислення швидкості зміни вхідного сигналу (а також знака цієї зміни).

Структурну схему цього оператора представлено на рис. 4.71(А), а вихідну характеристику (за вхідних, східчастих впливів) – на рис. 4.71 (Б).

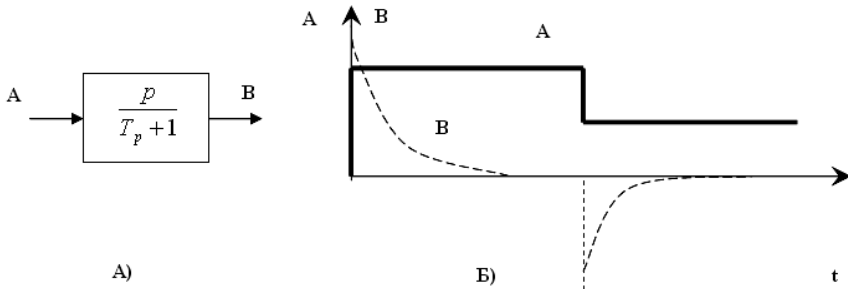


Рис. 4.71. Оператор «реальна похідна»

9. Оператор запізнювання – формує зміщення за часом вхідного сигналу на величину ΔT , повністю зберігаючи його форму і значення (структурну схему наведено на рис. 4.72):

$$A(t - \Delta T) = B(t), \text{ де } t - \text{поточний час.}$$

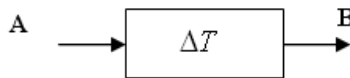


Рис. 4.72. Оператор запізнювання

10. Операція вибору мінімального (максимального) значення з декількох вхідних сигналів – виконується операторами min або max (структурну схему представлено на рис. 4.73).

Вихідні сигнали відповідають найменшому (найбільшому) вхідному сигналу в поточний момент часу.

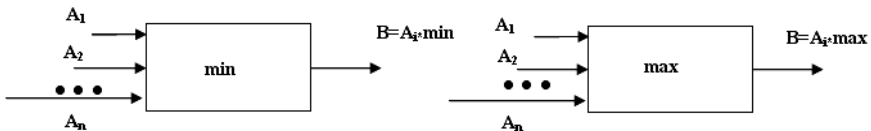


Рис. 4.73. Оператори мінімуму і максимуму

11. Оператор-ключ – призначений для підключення (відключення) поданого на вхід сигналу до (від) інших операторів (структурна схе-

ма – на рис. 4.74). Якщо сума сигналів ($A_1, A_2 \dots, ПС$) на управляючому вході (суматорі) більше нуля, то ключ замикається.

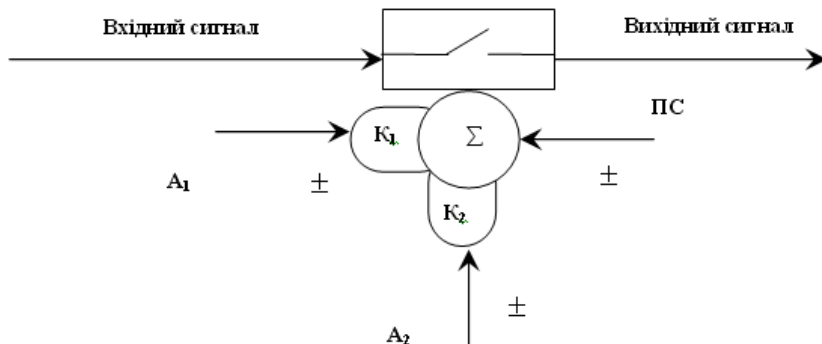


Рис. 4.74. Оператор-ключ

12. Група операторів «вмикання якогось одного сигналу з декількох» (структурна схема – на рис. 4.75). Спрацювання одного оператора-ключа (1, 2, ..., n) вимикає інші. Подача потрібного сигналу вмикання виконується вручну в процесі моделювання.

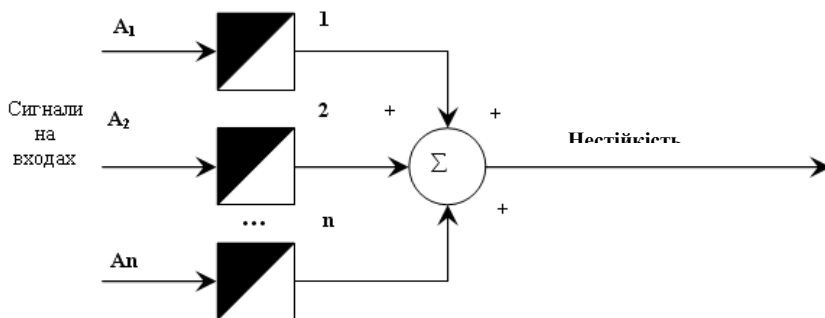


Рис. 4.75. Оператор «вмикання одного сигналу з декількох»

13. Оператор-обмежувач – призначений для різних обмежень сигналів (структурні схеми наведено на рис. 4.76).

14. Оператор «піднесення до ступеня», який призначений для піднесення сигналу A до змінного ступеня n і записується як A^n (структурну схему подано на рис. 4.77(А)), і оператор «піднесення до цілочислового постійного ступеня», що застосовується для піднесення сигналу a до ступеня n , записується як a^n (структурна схема – на рис. 4.77(Б)).

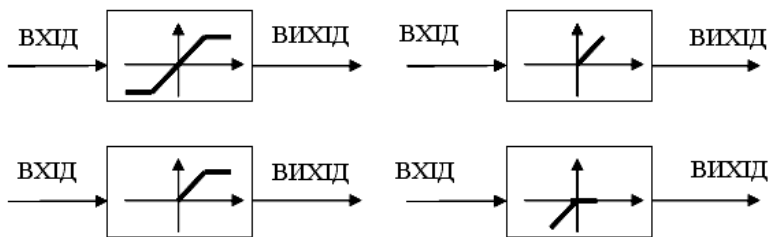


Рис. 4.76. Оператор-обмежувач

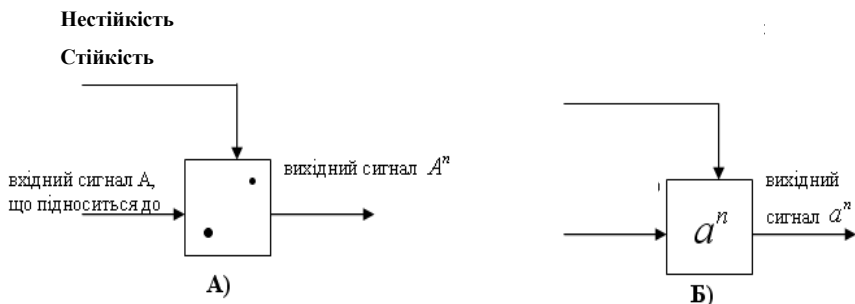


Рис. 4.77. Оператор «піднесення до ступеня»

Приклад, що ілюструє застосування деяких видів операторів для синтезу структурних схем динамічних моделей, наведено на рис. 4.78. Тут представлено структурну схему одного з варіантів моделювання підвищення попиту населення на споживчі товари за виникнення товарного дефіциту (перевищення попиту над пропозицією) в умовах стаціонарної, неринкової ціни.

Як видно зі структурної схеми, попит (вихід оператора 4), по-перше, безпосередньо залежить від відношення індексу якості пропонованого товару (оператор 3) до його ціни і, по-друге, від фінансових можливостей (ФМ) покупців (оператор 10).

Вплив еластичності на зміну попиту встановлюється коефіцієнтом K (у знаменнику оператора 3) і постійним сигналом (ПС). Оскільки реальний попит не може перевищувати потребу, оператор 5 здійснює вибір мінімального значення потреби або попиту. В результаті моделюється потік придбаних покупцем товарів, який інтегрується (нагромаджується) оператором 6. Вихід оператора відповідає кількості товарів, що знаходяться у покупця, M_n . Цей товар поступово старіє (зношується) – зі швидкістю, що задається постійним коефіцієнтом опера-

тора 7, який у сфері виробництва часто називається коефіцієнтом амортизації. Як наслідок, кількість товару M_n , з одного боку, зростає (потік купленого товару), з іншого – зменшується (потік зношення з виходу оператора 7).

Такий підхід реалізовано Російською економічною академією ім. Г. В. Плеханова на чолі з професором О. Кугаєнком (докладну інформацію можна отримати за адресою розробників www.dynprognoz.ru/dyn.htm).

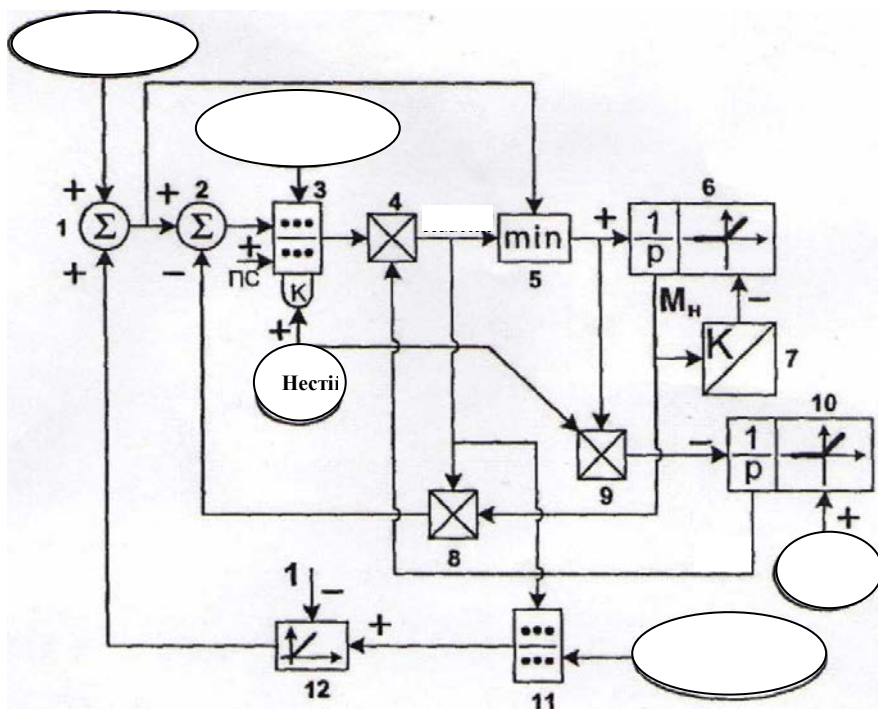


Рис. 4.78. Структурна схема моделі попиту за наявності дефіциту

Очевидно, чим більше M_n , тим менший попит. Ця відома залежність моделюється за допомогою від'ємного зворотного зв'язку операторами 2 і 8. Фінансові можливості (ФМ) населення ростуть (оператор-інтегратор 10) при збільшенні доходів населення і зменшуються зі зростанням попиту і ціни товару, що був придбаний (оператор 9). Фінансові можливості мають завжди невід'ємну величину, тому при моделюванні застосовується оператор-інтегратор з обмеженням за нульовим значенням.

Ця модель ілюструє лише схему виникнення підвищеного попиту в умовах дефіциту. За перевищення попиту (оператор 4) над пропозицією сигнал на виході оператора 11 більше одиниці, а на виході оператора 12 – більше нуля, за зворотного співвідношення попиту-пропозиції сигнал на виході оператора 11 менше одиниці, а на виході оператора 12 – нуль. У цьому випадку невід’ємний зворотний зв’язок в ланцюзі операторів 11–12–1–2–3–4–8–11 «спить». Якщо невід’ємний зворотний зв’язок «прокидається», сигнал з виходу оператора 11 стає більшим одиниці, тобто відбувається лавиноподібне зростання попиту – доти, доки не будуть вичерпані всі фінансові можливості (оператор 10).


Так моделюється добре відомий процес наростання попиту за наявності дефіциту товарів.

9.2.5. Аналіз роботи нелінійних систем за допомогою пакета Deductor

Платформа Deductor є основою для створення прикладних аналітичних розв’язків. Реалізовані в ній технології дозволяють пройти всі етапи побудови аналітичної системи – від створення сховища даних до автоматичного підбору моделей і візуалізації отриманих результатів.

Для прикладу розглянемо розв’язання задачі «Чи надавати кредит клієнтові» в аналітичному пакеті Deductor (BaseGroup).

В якості навчаючого набору даних виступає база даних, що містить інформацію про клієнтів, зокрема: Сума кредиту, Термін кредиту, Мета кредитування, Вік, Стать, Освіта, Приватна власність, Квартира, Площа квартири. На основі цих даних необхідно побудувати модель, яка зможе дати відповідь, чи входить клієнт, який хоче одержати кредит, до групи ризику неповернення кредиту, тобто користувач повинен отримати відповідь на запитання «Чи надавати кредит?». Задача належить до групи задач класифікації, тобто навчання з учителем.

Дані для аналізу знаходяться у файлі credit.txt. Імпортуємо їх із файлу за допомогою майстра імпорту. Запускаємо майстер обробки  і вибираємо метод обробки даних – нейронна мережа. Вказуємо призначення вихідних стовпців даних. Вихідний стовпець у нашій задачі – «Надати кредит», усі інші – вхідні. Цей крок проілюстровано на рис. 4.79.

На наступному кроці майстер пропонує розбити вихідну множину даних на навчаючу і тестову. Спосіб розбиття вихідної множини даних стандартно заданий як «Случайно» (випадково). Цей крок представлено на рис. 4.80.

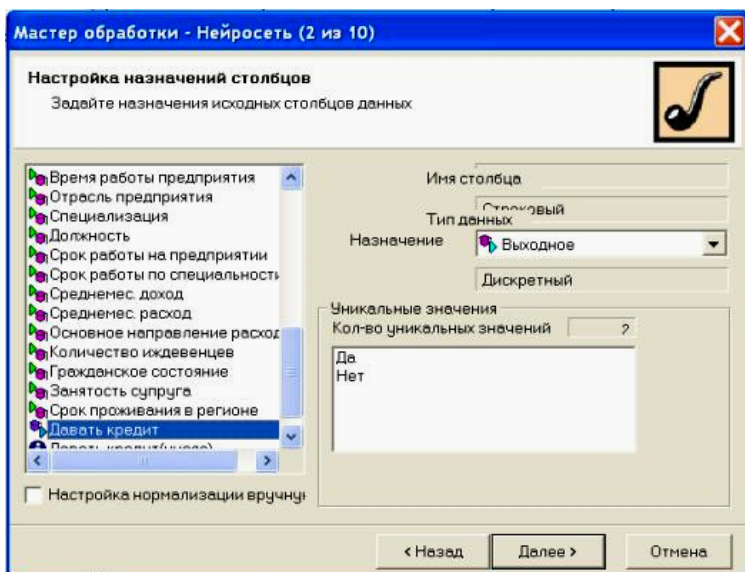


Рис. 4.79. Крок «Налаштування призначень стовпців»



Рис. 4.80. Крок «Розбиття вихідного набору даних на підмножини»

Далі необхідно визначити структуру нейронної мережі, тобто вказати кількість нейронів у вхідному шарі – 33 (кількість вхідних змінних), у прихованому шарі – 1 та у вихідному – 1 (кількість вихідних змінних). Активаційна функція – «Сигмоида» (сигмоїда), і її крутизна дорівнює одиниці. Цей крок проілюстровано на рис. 4.81.

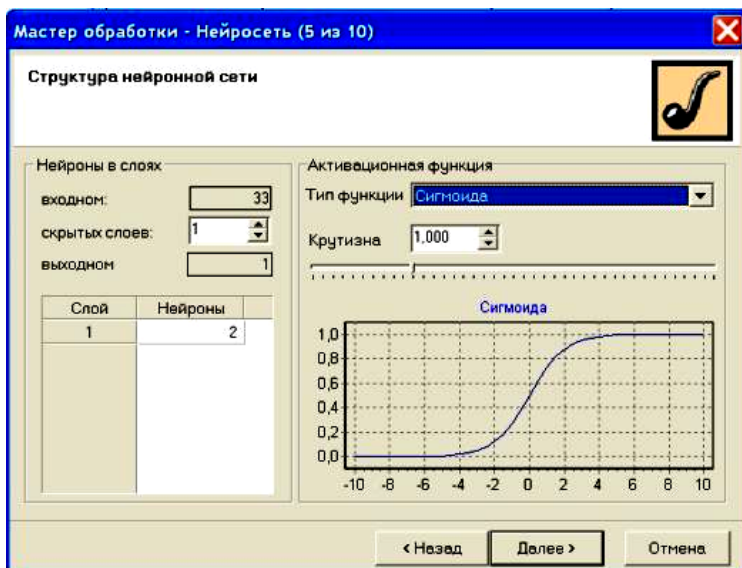


Рис. 4.81. Крок «Структура нейронної мережі»

Потім вибираємо алгоритм і параметри навчання нейронної мережі. Цей крок має назву «Налаштування процесу навчання нейронної мережі» і показаний на рис. 4.82.

На наступному кроці налаштовуємо умови зупинки навчання. Вважатимемо приклад розпізнаним, якщо помилка становить менше 0,005, і вкажемо як умову зупинки навчання досягнення епохи 10000.

Далі запускаємо процес навчання і стежимо за зміною величини помилки та відсотком розпізнаних прикладів у навчаючій і тестовій множинах. У нашому випадку ми бачимо, що на епосі № 4536 у навчаючій множині розпізнано 83,10 % прикладів, а в тестовій – 85,71 % прикладів. Фрагмент цього процесу проілюстровано на рис. 4.83.

Після закінчення процесу навчання для інтерпретації отриманих результатів ми можемо вибрати візуалізатори зі списку запропонованих. Виберемо такі: таблиця спряженості, граф нейромережі, аналіз «що, якщо» («что, если»), і за допомогою них проаналізуємо нові дані.

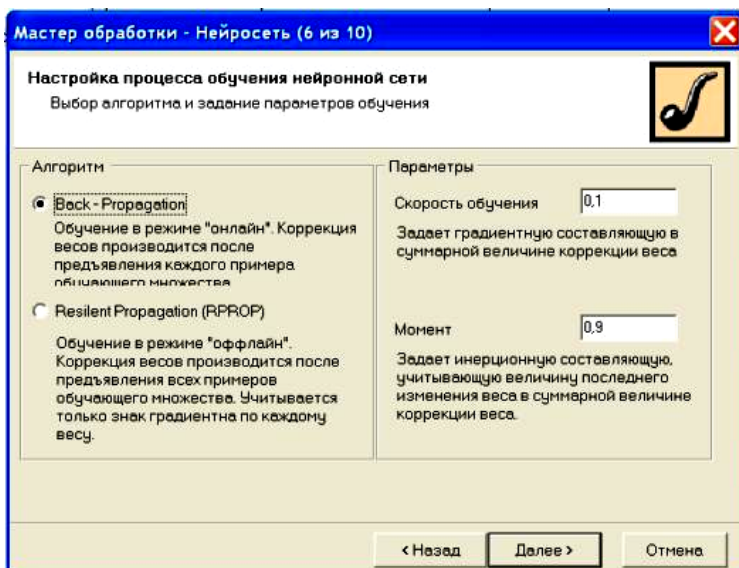


Рис. 4.82. Крок «Налаштування процесу навчання нейронної мережі»

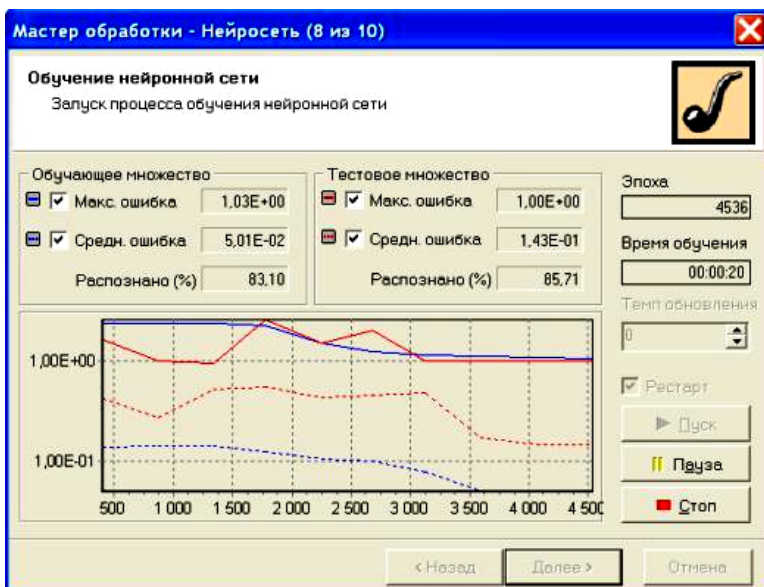


Рис. 4.83. Крок «Навчання нейронної мережі»

На рис. 4.84 показано таблицю спряженості. На її діагоналі розташовані приклади, які були правильно розпізнані, тобто 55 клієнтів, яким можна надавати кредит, і 89 – яким надавати кредит не варто. У решті осередків знаходяться клієнти, віднесені до іншого класу (1 і 4). Можна вважати, що правильно класифіковано практично всі приклади – 96,64 %.

Кросс таблиця Кросс діаграма Граф нейро-сети Что-если Таблица сопряженности				
Давать кредит				
	Классифицировано			
Фактически	Да	Нет	Итого	
Да	55	4	59	
Нет	1	89	90	
Итого	56	93	149	

Рис. 4.84. Таблица спряженості

Візуалізатор «що, якщо» дозволяє провести експеримент. Дані про потенційного отримувача кредиту слід ввести у відповідні поля, і побудована модель розрахує значення поля «Предоставлять кредит» (надавати кредит) – «Да» (так) чи «Нет» (ні), тобто розв'яже поставлену задачу.

«Neural Network Toolbox», який є складовою стандартної поставки пакета Matlab, теж відкриває перед користувачами широкі можливості для роботи з нейронними мережами всіх типів.

Перевага цього пакета полягає в тому, що при його застосуванні користувач не обмежений моделями нейронних мереж та їхніми параметрами, жорстко закладеними в нейросимуляторі, а має змогу самостійно конструювати ту мережу, яку вважає оптимальною для розв'язання поставленої задачі.

Розглянемо приклад конструювання нейронної мережі в пакеті Matlab.

Нехай є 15 незалежних змінних – показників діяльності фірми і одна залежна змінна – обсяг продажів. Маємо базу даних за минулий рік. Необхідно побудувати потижневий прогноз обсягів продажів на місяць. Для розв'язання задачі пропонується використати тришарову мережу зворотного поширення.

Сформуємо таку мережу, яка включає 15 нейронів у вхідному шарі (за кількістю вхідних змінних), 8 нейронів – у другому шарі та 1 нейрон – у вихідному (за кількістю вихідних змінних).

Для кожного шару виберемо передавальну функцію: для першого і другого – *logsig*, для третього – *purelin*.

У середовищі Matlab синтаксис такої нейронної мережі виглядає так:

$$\text{Net} = \text{netff}(\text{PR}, [\text{S1}, \text{S2} :, \text{Sn}], \{\text{TF1}, \text{TF2} :, \text{TFn}\}, \text{btf}, \text{blf}, \text{pf})$$

де PR – масив мінімальних і максимальних значень для R векторів входу;

Si – кількість нейронів в i -му шарі;

TFi – функція активації шару i ;

btf – навчаюча функція, що реалізовує метод зворотного поширення;

blf – функція налаштування, що реалізовує метод зворотного поширення;

pf – критерій якості навчання.

Активаційною функцією може виступати будь-яка диференційовна функція, наприклад, `tansig`, `logsig`, `purelin`.

$$\text{Net} = \text{netff}(\text{minmax}(\text{P}), [\text{n}, \text{m}, \text{l}], \{\text{logsig}, \text{logsig}, \text{purelin}\}, \text{trainpr})$$

де P – множина вхідних векторів;

n – кількість входів НС;

m – кількість нейронів у прихованому шарі;

l – кількість виходів НС.

Необхідно також встановити метод розрахунку значення помилки. Наприклад, якщо вибрано метод найменших квадратів, то ця функція виглядатиме так: `Net.performFcn='SSE'`.

Для встановлення максимальної кількості епох такою, що дорівнює 10000, скористаємося функцією: `net.trainParam.epochs=10000`.

Запустити процес навчання можна таким чином:

$$[\text{net}, \text{tr}] = \text{train}(\text{net}, \text{P}, \text{T}).$$

Після закінчення навчання мережі її можна зберегти у файлі, наприклад, з ім'ям `nn1.mat`. Для цього необхідно виконати команду: `save nn1 net;`

Отже, в пакеті Matlab можна конструювати мережі будь-якої складності, при цьому немає потреби «прив'язуватися» до обмежень, які накладаються нейросимуляторами. Проте для роботи з нейронними мережами в пакеті Matlab необхідно вивчити як саме середовище, так і більшість функцій Neural Network Toolbox.

9.3. Інструментальний засіб економічної динаміки AnyLogic

AnyLogic™ – інструмент імітаційного моделювання нового покоління, який заснований на результатах, отриманих у теорії моделювання і в інформаційних технологіях за останнє десятиріччя.

Мова моделювання AnyLogic™ довела свою ефективність у моделюванні великих систем підвищеного рівня складності. Основними

будівельними блоками моделі AnyLogic™ є *активні об'єкти*, які дозволяють моделювати будь-які об'єкти реального світу.

Активний об'єкт є екземпляром класу активного об'єкта. Щоб створити модель AnyLogic™, слід створити класи активних об'єктів (або використати об'єкти бібліотек AnyLogic™) і задати їхні взаємозв'язки. AnyLogic™ інтерпретує створені графічно класи активних об'єктів у класи Java™, – тому можна користуватися всіма перевагами об'єктно-орієнтованого моделювання: спадкоємністю, поліморфізмом і т. д.

Спадкоємність дозволяє значно спростити процес розробки моделей. Наприклад: створивши базовий клас, що моделює автомобіль, можна змодельовати різні класи автомобілів (спортивні, вантажівки і т. ін.) за допомогою підкласів цього класу. Основні характеристики будуть успадковані від базового класу, а особливі для кожного класу автомобілів характеристики – задані у підкласах.

Активні об'єкти можуть містити вкладені об'єкти, причому рівень вкладеності необмежений. Це дозволяє здійснювати декомпозицію моделі на будь-яку кількість рівнів деталізації. За допомогою інкапсуляції об'єктів також можна приховати деталі розробки модельованого об'єкта.

Активні об'єкти мають чітко визначені інтерфейси взаємодії: вони взаємодіють зі своїм оточенням тільки за допомогою своїх інтерфейсних елементів. Цей поділ внутрішньої будови активного об'єкта і будь-якої інформації про його оточення полегшує створення систем зі складною структурою, а також робить активні об'єкти такими, що можуть використовуватися повторно. Створивши клас активного об'єкта, можна створити будь-яку кількість об'єктів – екземплярів цього класу.

9.3.1. Елементи моделі

1. *Проект*. Кожна модель AnyLogic™ створюється в рамках свого проекту. Проект є найвищим елементом дерева елементів моделі.

2. *Пакет*. У проекті може бути один або декілька пакетів. Пакети застосовуються для структуризації проекту, вони дозволяють виділити його незалежні частини, які відповідають за реалізацію різних підсистем. Пакети містять класи активних об'єктів, повідомлень, а також зовнішні файли.

3. *Бібліотека*. У проекті можуть використовуватися класи інших проектів – бібліотек. Бібліотеки є наборами класів, які описують якусь конкретну прикладну область або ж розроблені для певної задачі моделювання. Можна створити свої бібліотеки класів або використати вже існуючі бібліотеки, що поставляються разом з AnyLogic™.

Використання бібліотек має низку переваг, а саме:

- Ви можете використовувати одні і ті ж класи в різних моделях;
- бібліотеки дозволяють працювати над проектами AnyLogic™ у команді: частина моделі, розроблена одним членом команди, може бути додана в бібліотеку, з якою працюватиме решта членів команди;
- розробивши необхідну бібліотеку, Ви можете перетворити AnyLogic™ на високорівневий інструмент моделювання для певної області з інтуїтивним інтерфейсом.

4. *Експеримент*. AnyLogic™ підтримує кілька типів експериментів, призначених для розв'язання різних задач моделювання. Експеримент зберігає набір настройок, за допомогою яких можна конфігурувати роботу моделі.

5. *Активний об'єкт*. Як було сказано вище, активні об'єкти є основними будівельними блоками моделі AnyLogic™ і можуть моделювати будь-які об'єкти реального світу: машини, людей, верстати, будівлі, апаратне забезпечення і т. д.

Клас активних об'єктів має такі властивості:

- ім'я класу – ім'я класу активного об'єкта;
- базовий клас – [опційно] ім'я базового класу для цього класу активного об'єкта. Це може бути клас `ActiveObject` або його підклас. Якщо базовий клас не заданий, то мається на увазі клас `ActiveObject`;
- правила спадкоємності активних об'єктів
- параметри – [опційно] набір параметрів класу активного об'єкта;
- тимчасово виключити – якщо опція вибрана, то клас буде виключено з моделі;
- відображати ім'я – якщо опція вибрана, то ім'я класу відображатиметься на структурній діаграмі;
- відображати рамку об'єкта – якщо опція вибрана, то на структурній діаграмі відображатиметься прямокутник, що позначає межу цього об'єкта;
- експортується з бібліотеки – якщо прапорець скинено, то в тому випадку, якщо проект використовуватиметься як бібліотека, цей клас не буде доступним з інших проектів (це може бути потрібно для того, щоб приховати від користувача деякі деталі розробки бібліотеки).

6. *Структурна діаграма*. Кожен клас активного об'єкта має свою структурну діаграму, за допомогою якої можна:

- задати інтерфейс класу активного об'єкта;
- додати в об'єкт вкладені об'єкти і задати їхні взаємозв'язки;
- додати в клас елементи, які задають поведінку об'єкта (такі як таймери і стейтchartи).

На структурній діаграмі задається структура активного об'єкта. Це робиться за допомогою елементів, показаних на рис. 4.85.

Нестійкість

Стійкість

Стійкість

Рис. А.3.
ітерується

Рис. А.2.
зростання
відображе

Рис. А.1.
зростання

б) Створіть

а) Створіть

1. Нарисуйте

Рис. 4.85. Структурна діаграма

7. *Вкладені об'єкти.* Активні об'єкти можуть містити вкладені об'єкти – екземпляри класів інших активних об'єктів, причому рівень вкладеності може бути будь-яким. Створюючи вкладені об'єкти, Ви формуєте ієрархію моделі.

Вкладені об'єкти відображаються на діаграмі у вигляді прямокутників оранжевого кольору (рис. 4.86). Якщо AnyLogic™ не зможе знайти клас, екземпляром якого є вкладений об'єкт, то він буде відображений у вигляді червоної рамки.

а) Назвіть

г) Вкажіть, чи

в) Виберіть

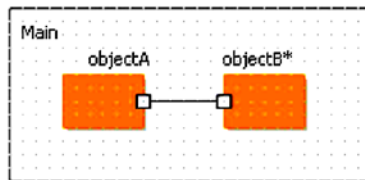


Рис. 4.86. Вкладені об'єкти

а) Назвіть

Вкладений об'єкт має такі властивості:

– ім'я – ім'я вкладеного об'єкта;

б) Вибрати – [тільки для читання] клас вкладеного об'єкта;

– параметри – [опційно] набір фактичних параметрів вкладеного

об'єкта. Для кожного параметра задаються ім'я і значення;

- тимчасово виключити – якщо опція вибрана, то вкладений об'єкт буде виключено з моделі;
- відображати ім'я – якщо опція вибрана, то ім'я вкладеного об'єкта відображатиметься на структурній діаграмі;
- створювати автоматично – якщо опція вибрана, то AnyLogic™ автоматично створить вкладений об'єкт (в іншому разі Ви мусять створити цей об'єкт самі).

8. *Кореневий об'єкт*. Модель AnyLogic™ є ієрархічним деревом активних об'єктів, вкладених один в одного (рис. 4.87). Об'єкт, що є коренем цього дерева, називається кореневим об'єктом моделі. Кореневий об'єкт представляє найвищий рівень абстракції моделі. Вибираючи кореневий об'єкт моделі, слід визначити, з якого об'єкта почати побудову моделі.

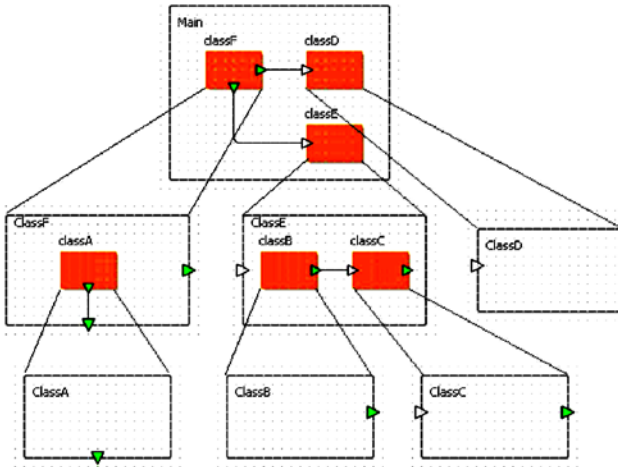


Рис. 4.87. Дерево активних об'єктів

AnyLogic™ підтримує такі механізми безперервної та дискретної взаємодії активних об'єктів:

- зв'язування змінних;
- передача повідомлень;
- встановлення взаємодії об'єктів.

Щоб установити взаємодію між об'єктами, слід з'єднати їхні відповідні інтерфейсні елементи за допомогою з'єднувачів. З'єднані порти зможуть обмінюватися повідомленнями, а з'єднані змінні матимуть однакові значення (значення вихідної змінної передаватиметься вхідній змінній).

Інтерфейсні елементи відображаються на структурній діаграмі у вигляді маленьких фігур, розташованих на межі вкладеного об'єкта (рис. 4.88). Порти відображаються у вигляді квадратів, а змінні – у вигляді трикутників (трикутник, направлений всередину об'єкта, позначає вхідну змінну, а трикутник, направлений з об'єкта, – вихідну). Ви не можете додавати, видаляти або переміщати інтерфейсні елементи, оскільки вони повинні відповідати інтерфейсові класу вкладеного об'єкта.

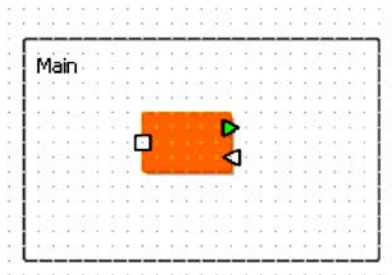


Рис. 4.88. Інтерфейсні елементи вкладеного об'єкта

Написання коду для класу активного об'єкта. Можна написати для класу активного об'єкта Java™ код, який виконуватиметься в різні моменти життєвого циклу об'єкта.

Код класу активного об'єкта задається у вікні коду цього класу (рис. 4.89).

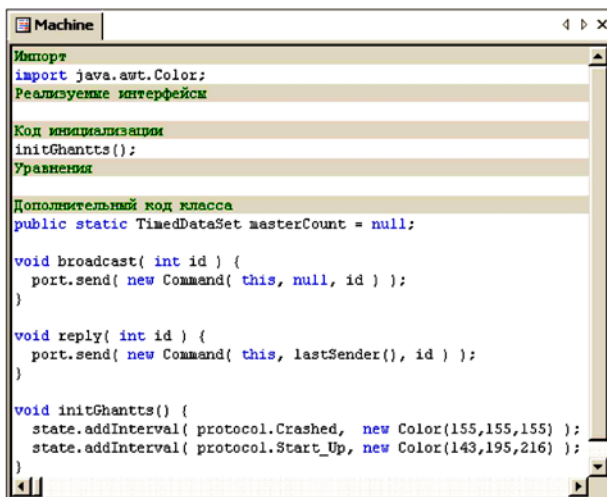


Рис. 4.89. Вікно коду класів активного об'єкта

Вікно коду класу активного об'єкта має такі розділи:

- імпорт;
- реалізовані інтерфейси;
- код ініціалізації;
- рівняння;
- додатковий код класу.

Методи можуть викликатися, наприклад, при спрацюванні таймера або переході стейтчарта.

9.3.2. Спадкоємність активних об'єктів

Оскільки класи активних об'єктів є звичайними Java™ класами, вони можуть успадковуватися один від одного. Будь-який клас активного об'єкта безпосередньо або транзитивно успадковується від класу `ActiveObject`. Клас `ActiveObject` задає загальні для всіх активних об'єктів властивості. Поля і методи класу `ActiveObject` описані в *Довіднику класів AnyLogic™*.

Проте є одне обмеження. Серед класів активного об'єкта і його підкласів має бути тільки один клас активного об'єкта, що згенерований середовищем `AnyLogic™`, усі інші повинні бути оголошені вручну, в зовнішніх файлах (рис. 4.90).

Нестійкість

Стійкість

Стійкість

Рис. А.3.
ітерується

Рис. А.2.
зростання
відображе

Рис. А.1.
зростання

б) Створіть

а)

1. Нарисуйте

Рис. 4.90. Спадкоємність класів активних об'єктів

`AnyLogic™` підтримує *реплікацію об'єктів* – дуже простий і зручний спосіб створення періодично структурованих систем об'єктів до-

в) Вкажіть,

б) Вкажіть

вільного розміру і топології, таких як вектор, мережа, тор, гіперкуб, кільце і т. д. AnyLogic™ звільняє від необхідності створення таких структур об'єктів уручну, шляхом створення і графічного з'єднання великої кількості об'єктів (останній підхід є втомливим і дозволяє створювати тільки системи з постійною кількістю об'єктів). Натомість можна просто створити реплікований об'єкт, який являтиме собою відразу декілька активних об'єктів одного класу.

За допомогою реплікації об'єктів можна:

- створювати системи, що масштабуються, задаючи кількість елементів реплікованого об'єкта за допомогою параметра;
- створювати складні структури об'єктів з нетривіальними топологіями, встановлюючи будь-які типи з'єднань між елементами реплікованого об'єкта як графічно, так і програмно;
- моделювати системи зі структурою, що динамічно змінюється, додаючи і видаляючи елементи реплікованого об'єкта під час роботи моделі.

9.3.3. Анімація реплікованого об'єкта

Анімація AnyLogic™ створюється з анімацій активних об'єктів, які розташовуються згідно з ієрархією об'єктів у моделі. Можна відображати на анімації об'єкта-власника анімацію реплікованого об'єкта, що показує:

- анімації всіх своїх елементів, або
- анімацію тільки якихось певних своїх елементів.

Щоб створити анімацію реплікованого об'єкта, потрібно створити анімацію для класу цього об'єкта і помістити її на анімацію об'єкта, що містить цей об'єкт (об'єкта-власника). Вкладена анімація є прямокутником, що відображає вміст анімації або всіх, або якихось певних елементів реплікованого об'єкта.

Якщо до моменту створення реплікованого об'єкта анімація для класу цього об'єкта вже буде створена, то фігура вкладки анімації автоматично з'явиться на анімаційній діаграмі класу, що містить вкладений об'єкт.

Якщо до моменту створення реплікованого об'єкта анімація для класу цього об'єкта ще не буде створена, то й фігура вкладки анімації створена не буде. Якщо пізніше Ви створите анімацію для класу цього реплікованого об'єкта, то Вам доведеться самостійно додавати фігуру вкладки анімації на анімацію об'єкта-власника.

Вам може також доведеться додавати анімацію вкладки об'єкта вручну в тому випадку, якщо Ви хочете відображати на анімації тільки якісь певні елементи цього реплікованого.

Є два способи додавання анімацій реплікованого об'єкта на анімацію класу, що містить цей об'єкт:

- якщо ви хочете відображати анімації всіх елементів реплікованого об'єкта, то ви маєте задати в якості імені об'єкта вкладеної анімації ім'я реплікованого об'єкта, наприклад `cars`, `server`. Позиції різних вкладених анімацій зазвичай задаються параметрами анімації класу реплікованого об'єкта;
- якщо ви хочете відображати анімації тільки якихось певних елементів реплікованого об'єкта, то ви можете нарисувати стільки фігур вкладених анімацій, скільки вам потрібно, і задати ім'я певного елемента цього об'єкта як ім'я об'єкта, анімація якого буде показана на анімації, у формі `<ім'я вкладеного об'єкта>-<номер елемента реплікованого об'єкта>`, наприклад `cars-5`, `server-0` і т. д. Місцеположення такої анімації на анімації об'єкта-власника зазвичай задається безпосередньо у властивостях фігури вкладеної анімації.

Активний об'єкт може мати *параметри*. Параметри зазвичай використовуються для задавання характеристик об'єкта. Можна задати різні значення параметрів для різних об'єктів одного і того ж класу, що потрібно в тих випадках, коли об'єкти мають однакову поведінку, але у них відрізняються деякі характеристики.

Значення параметрів можна змінювати під час роботи моделі. За необхідності Ви можете задати дії, які повинні виконуватися при зміні значення параметра, написавши обробник цієї події.

Параметр може бути пов'язаний з параметром вкладеного об'єкта. У цьому випадку значення параметра передаватиметься пов'язаному з ним параметру вкладеного об'єкта.

Параметр зазвичай застосовується для задавання статичних характеристик об'єкта, і його значення, як правило, залишається незмінним під час прогону моделі. Якщо Вам потрібно створити в моделі елементи даних, що змінює своє значення у процесі моделювання, то краще використовувати змінну.

9.3.4. Типи параметрів

Як і багато інших інструменти імітаційного моделювання, AnyLogic™ підтримує параметри простих типів: дійсні параметри (real), цілочислові (integer) і логічні (boolean). Але тільки AnyLogic™ надає унікальну можливість створювати параметри будь-яких Java™ класів. Можна, наприклад, створити параметр класу String, який зберігатиме рядкові константи, або параметр класу Vector, що зберігатиме динамічний масив об'єктів. Також можна створити параметр типу Object (базовий Java™ клас) і присвоїти йому значення об'єкта будь-

якого Java™ класу. Пізніше Вам буде необхідно перевірити фактичний тип значення цього параметра і привести параметр до цього типу. Опис класів Java™ можна знайти в документації з Java™ SDK, доступній за адресою <http://java.sun.com/docs>.

Ви також можете створювати параметри класів, які створені Вами у коді класу активного об'єкта.

Оскільки всі елементи моделі AnyLogic™ задані екземплярами класів Java™, можна використовувати елементи моделі як параметри. Таблиця 4.3 наводить список елементів моделі AnyLogic™, які можна використовувати як параметри, разом з іменами класів, екземплярами яких ці об'єкти є:

Таблиця 4.3

Елементи моделі

Об'єкт	Клас	Опис
Таблична функція	LookupTable	«Табличні функції»
Матриця	Matrix	«Матриці». На відміну від автоматично ініціалізованих матричних змінних, параметри типу матриця слід ініціалізувати самостійно
Список	Enumeration	«Списки»
Масив	HyperArray	«Гіпермасиви»

Динамічні параметри

Особливим видом параметра AnyLogic™ є динамічний параметр. Кожного разу, коли потрібно звертатися до динамічного параметра, щоб дізнатися його значення, це значення обчислюється знову, тобто динамічний параметр поводить себе як функція. Щоб визначити значення динамічного параметра myParameter, слід написати не myParameter, а myParameter(), оскільки в коді моделі, що генерується, динамічні параметри задаються за допомогою функцій.

В якості значення динамічного параметра можна задати будь-який вираз, результат якого матиме той же тип, що й тип параметра. Наприклад, значенням динамічного параметра типу boolean може бути: `msg.weight + 5 > 75`, де `msg` – змінна активного об'єкта або змінна коду цього об'єкта.

За допомогою динамічних параметрів можна параметризувати об'єкти одного і того ж класу різними рядками коду. Ця властивість дозволяє створювати гнучкі й готові до повторного використання класи активних об'єктів.

Активний об'єкт може містити *змінні*. Змінні зазвичай використо-

вуються для моделювання змінних характеристик об'єкта або для збереження результатів роботи моделі.

Змінна може бути пов'язана зі змінною іншого активного об'єкта. У цьому випадку значення змінної, яка відіграватиме роль залежної змінної, завжди набуватиме значення пов'язаної з нею змінної. А отже, є змога реалізовувати механізм безперервної і / або дискретної взаємодії об'єктів.

Можна описати, як змінюються значення змінних з часом, за допомогою формул і рівнянь. Таким чином можна задати безперервну поведінку об'єкта.

Значення змінних можна змінювати під час роботи моделі.

Створення змінної

Змінні можуть бути або внутрішніми, або інтерфейсними. Внутрішня змінна доступна тільки з активного об'єкта. Інтерфейсна змінна може бути пов'язана зі змінною іншого активного об'єкта; вона використовується у тому випадку, коли слід реалізувати механізм безперервної взаємодії об'єктів.

Змінна має такі властивості:

- ім'я;
- тип (скаляр, матриця, масив);
- напрям (немає напрямку, вхідна змінна, вихідна змінна);
- рівняння;
- зберігати історію;
- тимчасово виключити (якщо відповідний прапорець встановлено, змінна може бути виключена з розгляду);
- відображати ім'я.

Рівняння

AnyLogic™ дозволяє описувати безперервне змінювання значень змінних у часі за допомогою формул, диференційних і алгебраїчних рівнянь. Можна зв'язати рівняння (цим терміном ми позначатимемо і рівняння, і формули) з:

- активним об'єктом;
- станом стейтчарта.

У будь-який момент часу в моделі існує глобальний набір рівнянь. Він включає всі поточні активні рівняння всіх об'єктів і всіх активних станів стейтчартів. Рівняння, пов'язані з активним об'єктом, активні протягом усього часу існування об'єкта. Рівняння, пов'язані зі станом стейтчарта, активні тільки тоді, коли стейтчарт знаходиться в активному стані. До глобального набору рівнянь додаються не тільки рівняння поточних простих станів стейтчартів, а й рівняння всіх станів, що містять ці прості стани.

AnyLogic™ дозволяє задавати рівняння як для скалярних змінних, так і для матриць та гіпермасивів.

Рівняння AnyLogic™ може бути трьох типів:

- диференційне рівняння;
- алгебраїчне рівняння;
- формула.

Диференційні рівняння

Диференційні рівняння задаються в такій формі: $d(x)/dt = F(x, y, t...)$, де x – вихідна або внутрішня змінна типу double або матричного типу, а $F(x, y, t...)$ – арифметичний вираз, в якому можуть бути присутні змінні активного об'єкта і спеціальний символ t , що позначає модельний час. Вираз $F(x, y, t...)$ може містити будь-які арифметичні операції. Можна також викликати у виразі будь-які функції та методи, як зумовлені ($\sin()$, $\cos()$, $\sqrt{}$ і т. д.), так і створені Вами.

Вираз $F(x, y, t...)$ не має містити умовних операторів, таких як $b > 0 ? c : d$.

Можна задати будь-яку кількість диференційних рівнянь. При цьому кожна змінна може бути в лівій частині тільки одного рівняння. У лівій частині диференційного рівняння не може бути вхідної змінної.

Приклад

У прикладі, наведеному на рис. 4.91, поведінка змінної x задається диференційним рівнянням $d(x)/dt = t$.

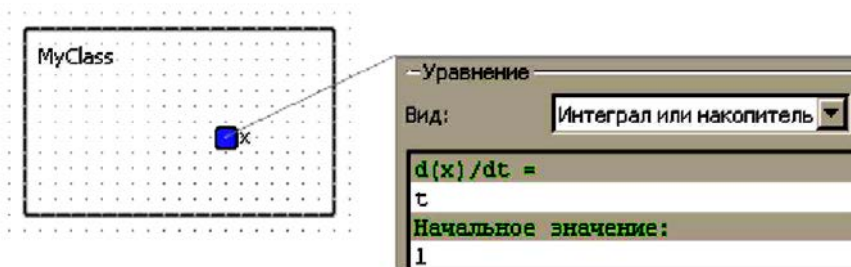


Рис. 4.91. Диференційні рівняння

Якщо розв'язати це рівняння аналітично, то одержимо: $x(t) = tA^2/2 + C$, що з урахуванням початкового значення $x(0) = 1$ дасть результат $x(t) = tA^2/2 + 1$. На рис. 4.92 показано результат розв'язання рівняння – параболу, обчислену і зображену середовищем AnyLogic™.

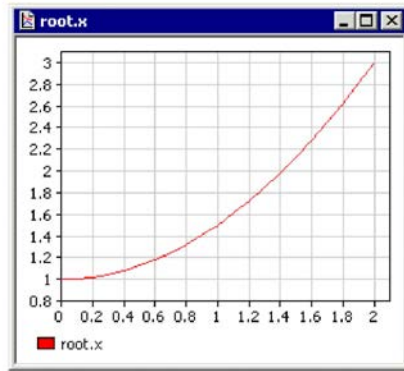


Рис. 4.92. Результат розв'язання рівняння

Приклад

Система диференційних рівнянь, наведена на рис. 4.93, задає математичний маятник: x – це координата маятника, а y – його швидкість. Розв'язок, знайдений AnyLogic™, показано на рис. 4.93.

Нестійкість

Стійкість

Стійкість

Рис. А.3.

ітерується

Рис. А.2.

зростання

відображе

Рис. А.1.

зростання

б) Створіть

а) Створіть

Рис. 4.93. Диференційні рівняння

Алгебраїчні рівняння

Алгебраїчні рівняння задаються в такій формі: $x = F(x, y, t...)$, де x – вихідна або внутрішня змінна типу double або матричного типу. Для кожної системи алгебраїчних рівнянь слід задати невідомі змінні за допомогою оператора

`find(x, y, ...)`

в) Вкажіть,

б) Вкажіть

а) Назвіть

На рис. 4.94 показано приклад системи з двох алгебраїчних рівнянь з двома невідомими.

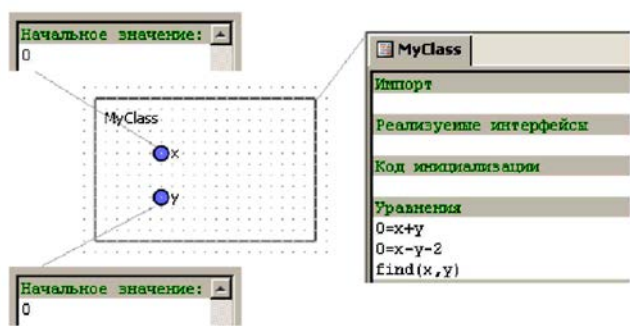


Рис. 4.94. Алгебраїчні рівняння

Очевидно, що розв’язком тут буде: $x = 1, y = -1$.

Формули задаються у формі $x = F(y, t...)$, де x – вихідна або внутрішня змінна типу double або матричного типу. Єдиним додатковим обмеженням є те, що вираз $F(y, t...)$ не може містити змінної x , тому що тоді формула перетворилася б на алгебраїчне рівняння, яке має задаватися в іншій формі.

Функції

У рівняннях можуть викликатися будь-які функції, створені в AnyLogic™ (наперед визначені, табличні, математичні, алгоритмічні).

1. Наперед визначені функції. AnyLogic™ підтримує набір *наперед визначених функцій* – часто використовуваних у математиці. Можна застосувати будь-яку комбінацію наперед визначених функцій у правій частині рівняння, а також у якості початкових значень змінних. У табл. 4.4 наводиться список наперед визначених функцій AnyLogic™.

Таблиця 4.4

Наперед визначені функції

Напередвизначені функції	Опис
Sin, cos, tan	Тригонометричні функції
Asin, acos, atan, atan2	Зворотні тригонометричні функції
pow	Піднесення до квадрата
sqrt	Добування кореня
exp	Експонента
log	Натуральний логарифм
abs	Абсолютне значення (модуль)

Напередвизначені функції	Опис
min	Найменше значення з двох аргументів
max	Найбільше значення з двох аргументів
round, rint, floor, ceil	Перетворення дійсних чисел у цілі
random	Генерація випадкових чисел, рівномірно розподілених у діапазоні [0,1)
delay	Зміщення у часі
xidz, zidz	Функції ділення

Також можна використовувати у виразах наступні наперед визначені константи (табл. 4.5):

Таблиця 4.5

Наперед визначені константи

Константа	Опис
Math.E	Число e – основа натурального логарифма і експоненти
Math.PI	Число π – коефіцієнт відношення довжини кола до її діаметра

Всі константи і функції, за винятком `delay`, `xidz` і `zidz`, визначені в класі `java.lang.Math`. Тому можна використовувати для виклику функції і більш звичний синтаксис `Math.<Міvm> функції>()`. Докладну інформацію про ці функції можна знайти в документації `Java™`, доступній за адресою: <http://java.sun.com/docs>.

Ви можете додати виклик наперед визначеної функції в рівняння за допомогою майстра функцій `AnyLogic™`.

Модельний час. У рівняннях можна посилатися на поточний модельний час. Значення поточного модельного часу можна обчислити за допомогою наперед визначеного символу t або за допомогою функції `getTime()`.

Зміщення у часі. Зміщення у часі виконує функція `delay`.

Розглянемо простий приклад. Нехай x є експоненційно згасаючим процесом, а змінна y є функцією x , зміщеною на дві одиниці модельного часу. Задамо для цих змінних такі формули:

$$x = \exp(-t),$$

$$y = \text{delay}(x, 2.0).$$

Графік змінної y повторюватиме графік змінної x із затримкою на дві одиниці модельного часу (рис. 4.95).

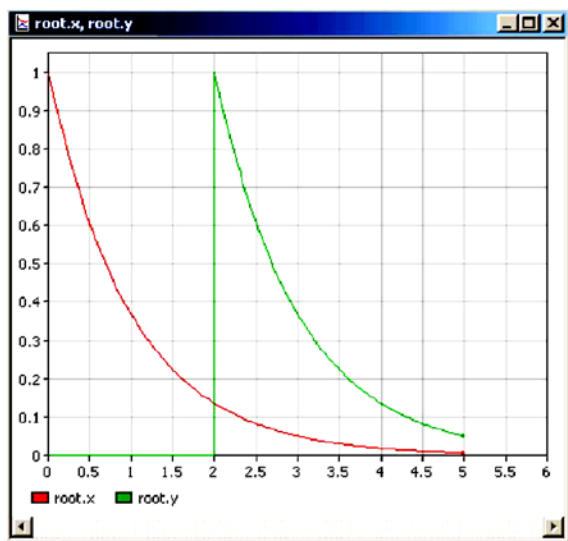


Рис. 4.95. Приклад зміщення у часі

Синтаксис виклику цієї функції такий:

`delay(<змінна>, <зміщення у часі>, <початкове значення>)`

Першим аргументом функції має бути задана змінна, значення якої зміщуватиметься у часі. Другий аргумент може бути як константою, так і виразом (наприклад, викликом функції). Тому значення тимчасового зміщення під час моделювання може змінюватися. При нульовому або від'ємному значенні зміщення значення змінної залишиться без зміни.

2. Табличні функції. AnyLogic™ підтримує спеціальний тип функцій – *табличні функції*. Таблична функція – це функція, задана в табличній формі, яка може бути зроблена безперервною за допомогою інтерполяції та екстраполяції.

Таблична функція може бути інтерпольована. Можливі типи інтерполяції наведено в табл. 4.6.

Допустимою областю інтерпольованої табличної функції є діапазон її аргументів, неінтерпольованої – набір заданих аргументів. Потрібно визначити, як має поводитися функція в тому випадку, якщо її аргумент вийде за межі допустимої області. Для цього необхідно вибрати в області *Якщо аргумент виходить за межі* діалогового вікна *Таблична функція* один з наведених у табл. 4.7 варіантів поведінки функції.

Типи інтерполяції

Тип інтерполяції	Опис
Східчаста інтерполяція	Значення функції між двома точками дорівнює значенню функції в точці з меншим аргументом
Лінійна інтерполяція	Точки з'єднуються прямими лініями
Сплайн-інтерполяція	Сплайн-інтерполяція. Точки з'єднуються поліномом четвертого ступеня. В кожній точці значення функції, а також першої та другої похідних мають бути однаковими зліва і справа. Друга похідна у крайніх точках має дорівнювати нулю
Апроксимація	Функція буде апроксимована поліномом порядку, заданого в полі Порядок, у якого сума середньоквадратичних похибок у точках є мінімальною
Дискретні значення	Жодна інтерполяція не застосовується

Таблиця 4.7

Поведінка функції при виході аргументу за задані межі

Поведінка функції	Опис
Видавати помилку	Якщо аргумент знаходиться за межами допустимої області, то буде виведено повідомлення про помилку
Використовувати найближче коректне значення	Для всіх аргументів зліва від допустимої області функція дорівнює значенню, якого вона набуває в крайній лівій (правій) точці допустимої області
Екстраполювати	Функція екстраполюється за межі області відповідно до вибраного типу інтерполяції
Екстраполювати повторенням	Функція стає періодичною. Періодом функції буде діапазон її значень
Повертати значення	Якщо аргумент знаходиться за межами допустимої області, то таблична функція повертатиме значення, задане в сусідньому з цією опцією полі

Сплайн-інтерпольована функція екстраполюється лінійними функціями, що мають у крайніх точках діапазону ті ж значення перших похідних, що й сплайн-функція.

В якості прикладу розглянемо реалізацію моделі відділення офтальмології. Для цього слід створити модель лікарняного відділення, в якому здійснюється процедура офтальмоскопії. Пацієнт, прийшовши у відділення, спочатку реєструється у прийомному покої. Потім він прямує для проведення процедури в указане приміщення (кімнату). Якщо

всі процедурні кабінети виявляються зайнятими, він чекає в приймальному покої, поки якийсь із них не звільниться. Тільки тоді медсестра відводить пацієнта у вільну кімнату і викликає туди офтальмолога. Лікар оглядає пацієнта за допомогою офтальмоскопа, який спеціально приносить із приміщення, де зберігаються інструменти. Після проведення процедури лікар відносить офтальмоскоп назад і вирушає в ординаторську, а пацієнт покидає відділення офтальмології.

Створимо відповідну модель за допомогою об'єктів Enterprise Library для моделювання транспортних мереж. Ця бібліотека дозволяє легко створювати транспортні моделі зі складною структурою. У транспортних моделях використовується вдосконалений механізм розділення ресурсів.

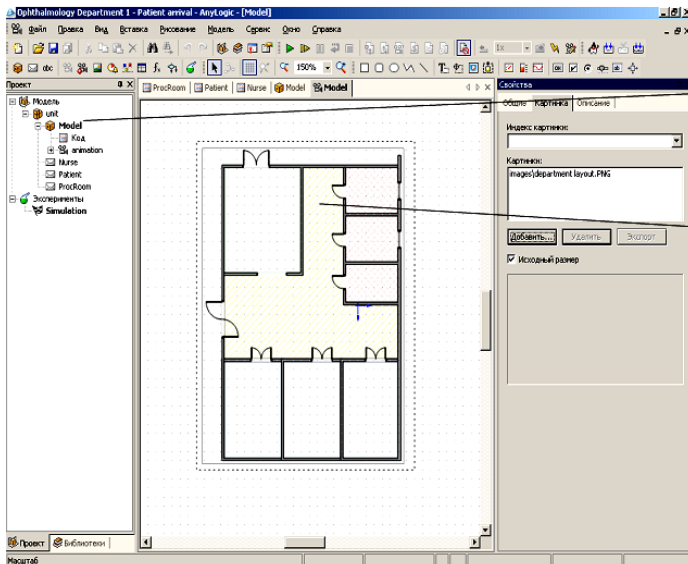
1. Створення нового проекту

Створіть новий проект. Переіменуйте клас Main в Model. Задайте режим реального часу з виконанням однієї одиниці модельного часу за одну секунду.

2. Створення анімації

Передусім потрібно створити анімацію, оскільки саме вона визначатиме структуру моделі – її транспортну мережу.

Щоб полегшити рисунки, спочатку додамо зображення плану відділення. Не рисуватимемо план у редакторі анімації AnyLogic™, а просто вставимо вже готове зображення (рис. 4.96).



1. Створити анімацію

Нестійкість

Стойкість

Стойкість

Рис. А.

3.

Поведінка логічного відображення для $r =$


$r = 3,$

$x_1 = 1413$

ітеруються для отримання

Рис. 4.96. Створення анімації

Щоб створити нову анімацію, клацніть мишею по кнопці «Новая анимация» (нова анімація).

Щоб додати зображення, натисніть мишею спочатку по кнопці панелі інструментів «Изображение» (зображення) , а потім по анімаційній діаграмі. Задайте властивості зображення, показані на рис. 4.97.

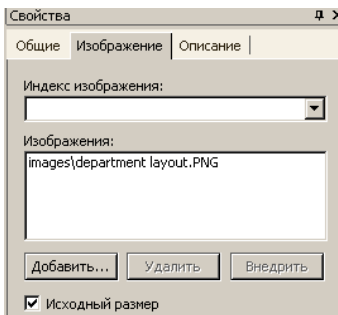


Рис. 4.97. Вікно властивостей зображення

Тепер нарисуємо анімацію моделі (рис. 4.98). На основі анімації будеться транспортна мережа моделі: прямокутники відповідають вузлам мережі, а ламані лінії – зв'язкам між ними, що відіграють роль шляхів руху.

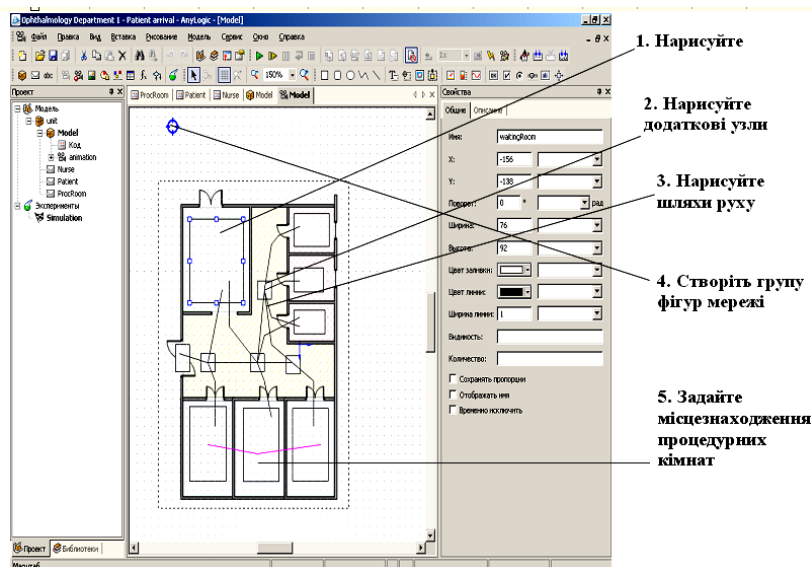



Рис. 4.98. Анімація моделі

Для створення необхідної транспортної мережі ми маємо намалювати на анімації прямокутниками приміщення нашого відділення і з'єднати їх ламаними лініями.

1. Відділення офтальмології (рис. 4.99) включає приймальний покій, три процедурні кабінети, кімнату для зберігання офтальмоскопів, ординаторську і кімнату для персоналу. Нарисуйте приміщення відділення за допомогою інструменту рисунка – прямокутника . Змініть розмір прямокутників так, щоб вони поміщалися у відповідних місцях на плані відділення, як показано на рисунку.

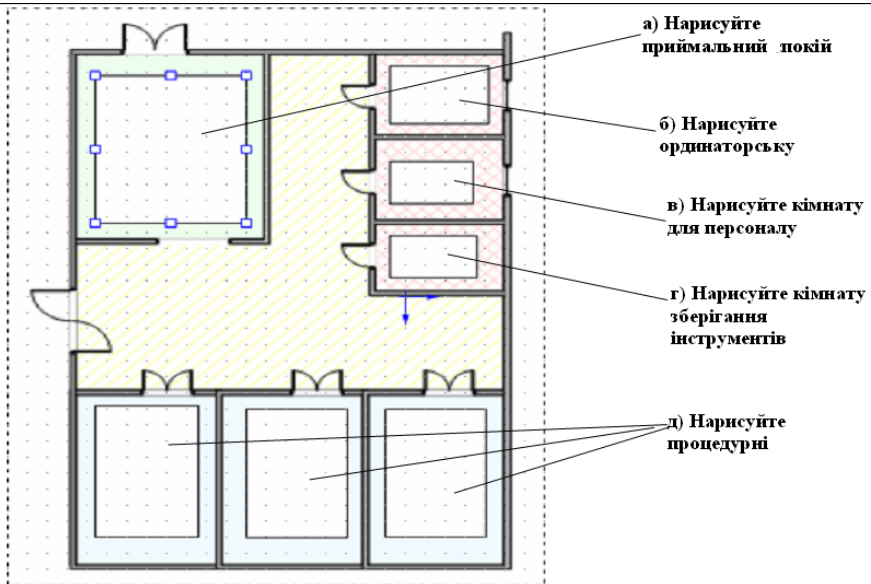


Рис. 4.99. Відділення офтальмології

- а) Назвіть прямокутник waitingRoom.
 - б) Назвіть прямокутник staffRoom.
 - в) Назвіть прямокутник staffLounge.
 - г) Назвіть прямокутник storageRoom.
 - д) Нарисуйте три прямокутники і назвіть їх procRoom1, procRoom2 і procRoom3. Вони відповідатимуть процедурним кімнатам відділення.
- Щоб зробити шляхи руху людей на анімації більш реалістичними, додайте додаткові вузли мережі, нарисувавши ще декілька прямокутників (рис. 4.100):
- а) Назвіть прямокутник exit. Він позначатиме вихід з відділення.
 - б) Нарисуйте чотири прямокутники і розташуйте їх так, як показа-

но на рисунку. Назвіть прямокутники upNode, leftNode, middleNode і rightNode, відповідно до їхнього положення на анімації.

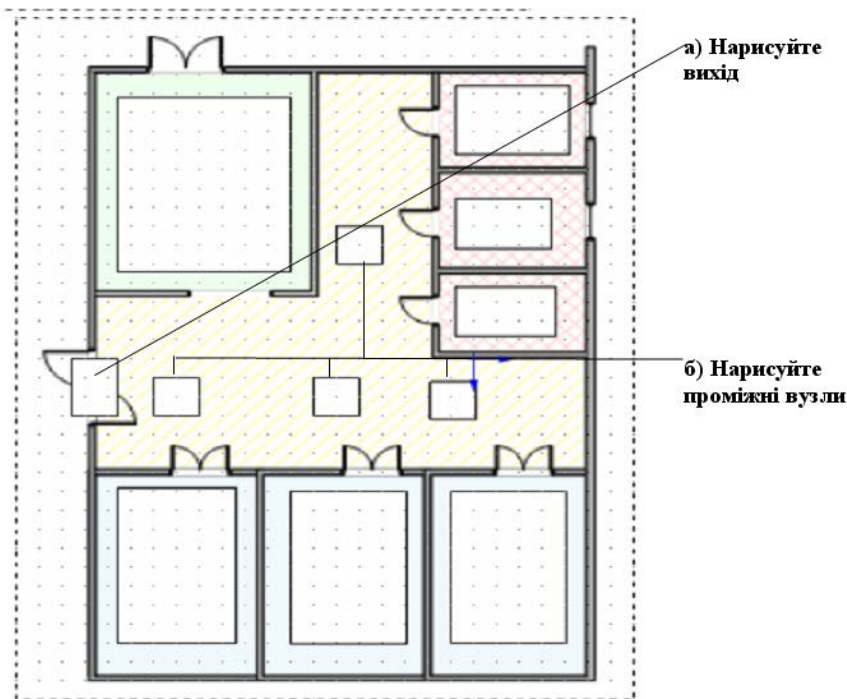



Рис. 4.100. Додавання додаткових вузлів

3. За допомогою інструменту рисунка – ламаної  зобразіть ламані лінії, як показано на рис. 4.101.

Ламані лінії задають шляхи руху пацієнтів і персоналу лікарні. Щоб відобразити необхідну транспортну мережу моделі, з'єднайте сусідні вузли, а саме:

- leftNode з exit, waitingRoom, procRoom1 і middleNode;
- middleNode з waitingRoom, procRoom2, storageRoom, rightNode і upNode;
- rightNode – з procRoom3 і upNode;
- upNode – з storageRoom, staffLounge і staffRoom.

Усі початкові та кінцеві точки ліній повинні обов'язково знаходитися всередині з'єднаних прямокутників.

4. Створіть групу фігур і назвіть її networkPivot. Логічна структура мережі буде сконструйована на базі елементів, доданих до цієї групи.

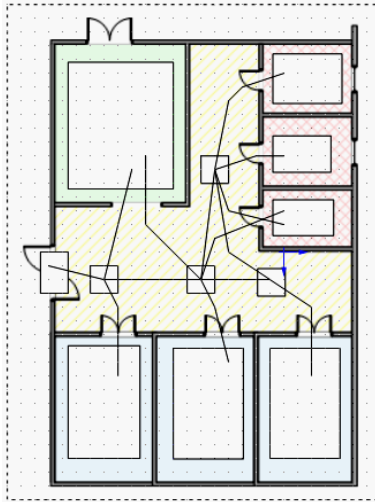


Рис. 4.101. Додавання шляхів руху

Додайте всі створені фігури в групу фігур. Для цього клацніть правою кнопкою миші по значку групи фігур і виберіть «Добавить / Удалить» (дати / знищити) фігури з контекстного меню. Потім виберіть усі нарисовані раніше фігури і клацніть мишею по анімаційній діаграмі.

5. Нарисуйте ламану лінію, яка сполучає прямокутники, що є процедурними кімнатами. Вона знадобиться нам трохи пізніше.

Помістіть точки ламаної всередину прямокутників `procRoom1`, `procRoom2` і `procRoom3`. Задайте наступні властивості (рис. 4.102):

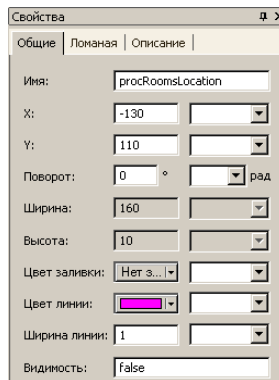
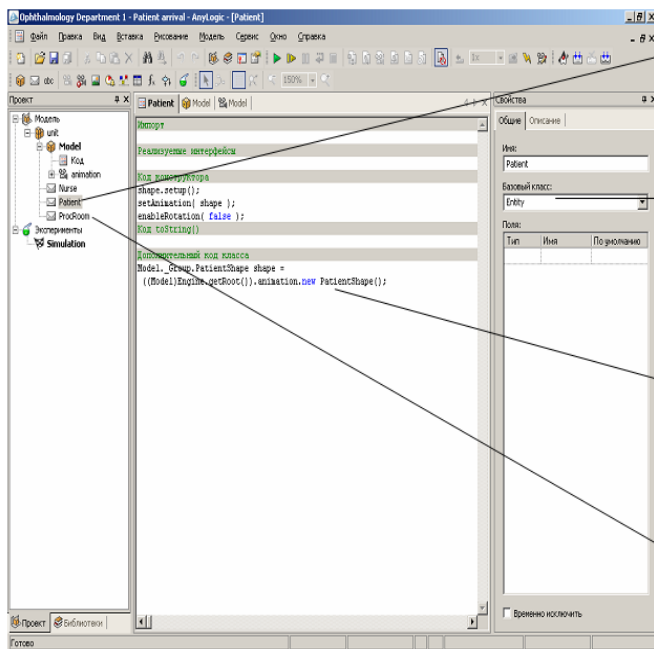


Рис. 4.102. Вікно властивостей

Далі треба зробити так, щоб можна було розрізнити на анімації пацієнтів і медсестер. Для цього створимо для них свій окремий клас повідомлення з унікальною анімацією (рис. 4.103).



1. Створіть клас повідомлення Patient

Нестійкість
Стойкость
Стойкость

Рис. А.3.
Поведінка логічного відображення для $r = 3$, $x_1 = 1$ ітерується для отримання x_2, x_3 і

Рис. 4.103. Створення класу повідомлення

1. Створіть клас повідомлення клацанням миші по інструменту «Новый класс сообщения» (новый класс сообщения). Назвіть його Patient. Повідомлення цього класу представлено в нашій моделі пацієнтів.

2. При роботі з Enterprise Library в якості базового класу вибрати клас повідомлення Entity.

3. Напишіть у полі «Дополнительный код класса» (доповільний код класу) такий код:

`Model_Group.PatientShape shape = ((Model)Engine.getRoot()).animation.new PatientShape();`

Цей код створює новий екземпляр динамічної групи фігур, PatientShape.

Щоб додати створену групу фігур на анімацію, напишіть код ініціалізації:

б) Створіть групу фігур, додайте в групу мітку, потім мітку над фігурою


```
shape.setup(); setAnimation( shape ); enableRotation( false );
```

4. Створіть клас повідомлень Nurse. Повідомлення цього класу представлятимуть у нашій моделі медсестер. Створіть клас так само, як і в попередньому випадку, за винятком того, що «Дополнительный код класса» (додатковий код класу) повинен бути таким:

```
Model._Group.NurseShape shape =  
((Model)Engine.getRoot()).animation.new NurseShape();
```

Аналогічно створіть і клас повідомлення procRoom. За допомогою повідомлень цього класу в моделі будуть задані процедурні кімнати. Оскільки на анімації вони відображатися не будуть, код анімації писати не треба.

Наступним етапом буде додавання об'єктів, які описують саму мережу та її ресурси. Ресурси можуть бути трьох видів: персонал (staff), переносні (portable) і статичні (static). У нашому випадку медсестри і лікарі будуть задані ресурсами типу «персонал», офтальмоскопи – портативними ресурсами, а процедурні кімнати – статичними. На цьому етапі ми створимо тільки ресурси, які задають медсестер і процедурні кімнати; інші ресурси будуть створюватися пізніше (рис. 4.104).

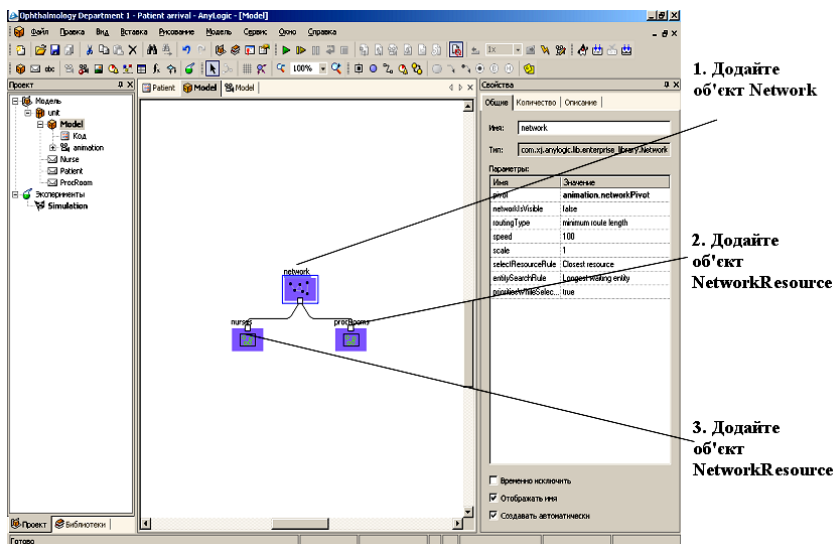


Рис. 4.104. Додавання об'єктів мережі та ресурсів

1. Об'єкт Network задає властивості транспортної мережі моделі. Задайте об'єкту наступні властивості (рис. 4.105):

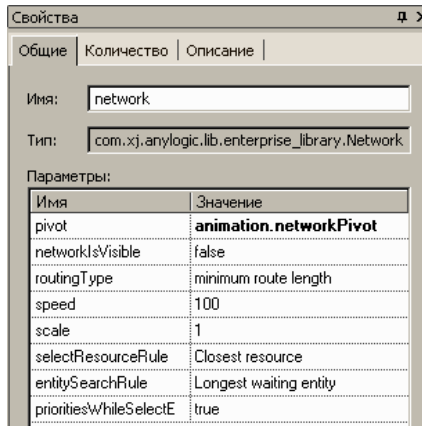


Рис. 4.105. Вікно властивостей

Далі слід вибрати групу фігур, що визначає структуру транспортної мережі.

2. Об'єкт `NetworkResource` описує ресурси певного типу. Цей об'єкт показуватиме властивості ресурсів, що представляють у нашій моделі медсестер. Задайте об'єкту наступні властивості (рис. 4.106):

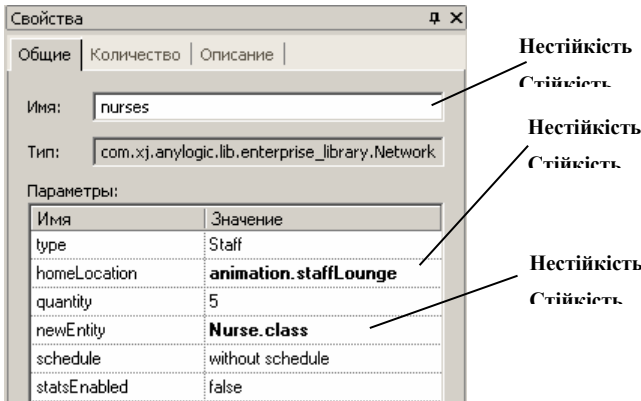


Рис. 4.106. Вікно властивостей

Ресурс типу «персонал» повертається в задане місце, коли стає вільним.

3. Об'єкт `procRooms` задаватиме властивості ресурсів, що представляють у нашій моделі процедурні кімнати. Задайте об'єкту наступні властивості (див. рис. 4.107).

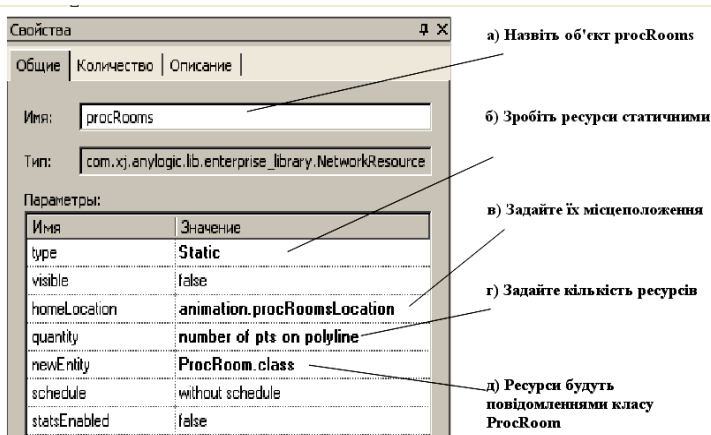
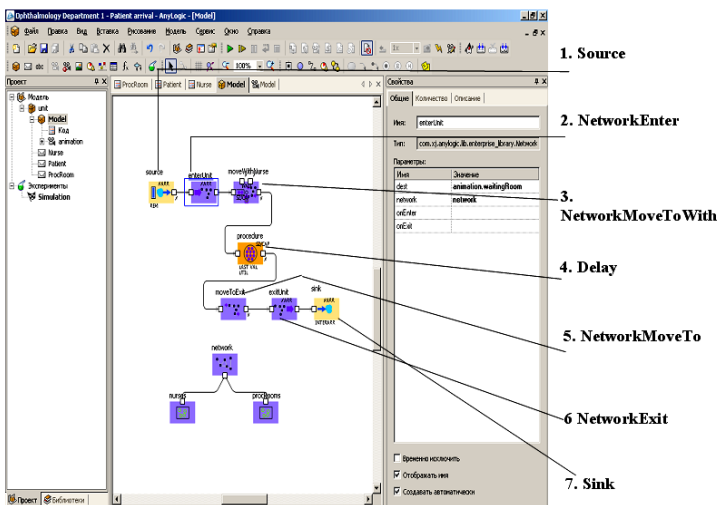


Рис. 4.107. Вікно властивостей

Статичні ресурси завжди знаходяться в місці, вказаному як базове. Ви можете задати декілька таких місць; для цього потрібно нарисувати ламану лінію з точками, що лежать у відповідних прямокутниках, і вибрати цю лінію у властивості об'єкта `homeLocation`. Виберіть раніше створену для цієї мети ламану `procRoomsLocation`. Вкажіть, що кількість ресурсів дорівнює числу точок заданої ламаної лінії.

Далі створимо блок-схему моделі (рис. 4.108).



1. Додайте об'єкт Source. Задайте об'єкту наступні властивості (рис. 4.109):

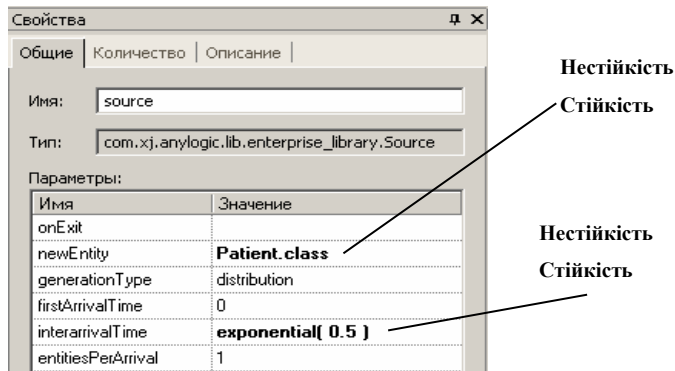


Рис. 4.109. Вікно властивостей

2. Об'єкт NetworkEnter додає заявки у визначене місце мережі. Задайте об'єкту наступні властивості (рис. 4.110):

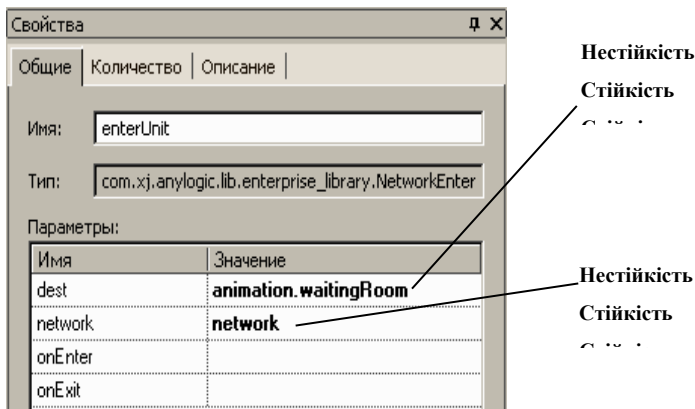


Рис. 4.110. Вікно властивостей

а) Пацієнти приходять у приймальне відділення.

б) Виберіть об'єкт, який задає транспортну мережу моделі.

3. Об'єкт NetworkMoveToWithQ переміщує заявку у визначене місце в супроводі ескорта – ресурсів типу «персонал». Цей об'єкт потрібен нам, щоб змодельовати те, як пацієнти відводяться медсестрами до процедурних кімнат (рис. 4.111).

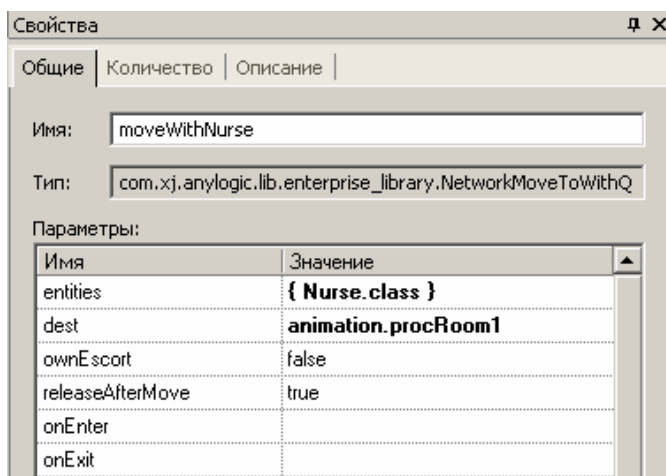


Рис. 4.111. Вікно властивостей

4. Об'єкт Delay моделює затримку, пов'язану з проведенням процедури.

Задайте об'єкту наступні властивості (рис. 4.112):

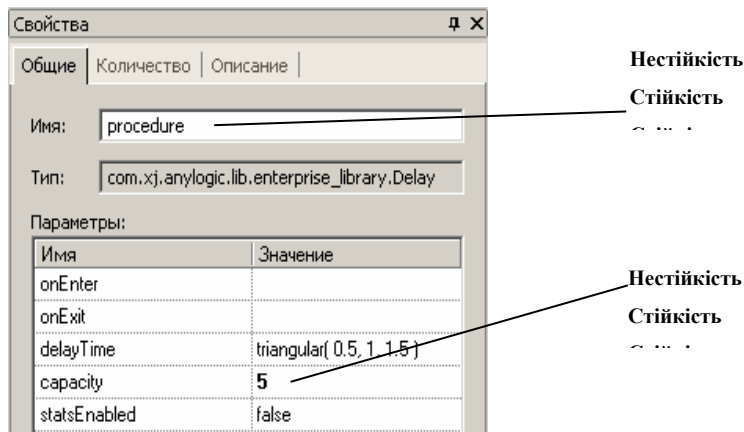


Рис. 4.112. Вікно властивостей

5. Об'єкт NetworkMoveTo моделює те, як пацієнти прямують до виходу після проведення процедури. Задайте об'єкту наступні властивості (рис. 4.113):

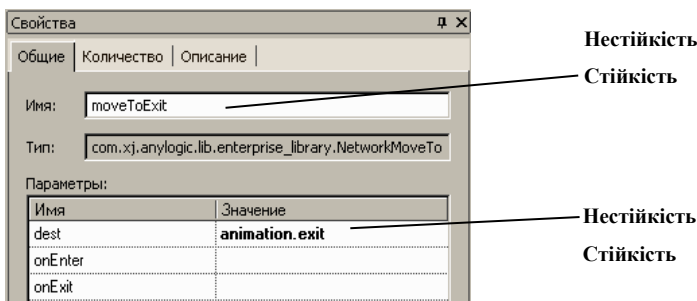


Рис. 4.113. Вікно властивостей

6. Об'єкт NetworkExit моделює вихід пацієнтів з відділення. Залиште властивості об'єкта, які задані стандартно.

7. Об'єкт Sink завершує блок-схему. Залиште властивості об'єкта, задані стандартно.

Щоб анімація була більш наочною, нарисуємо спеціальні символи, за допомогою яких відображатимемо ресурси нашої моделі (рис. 4.114).

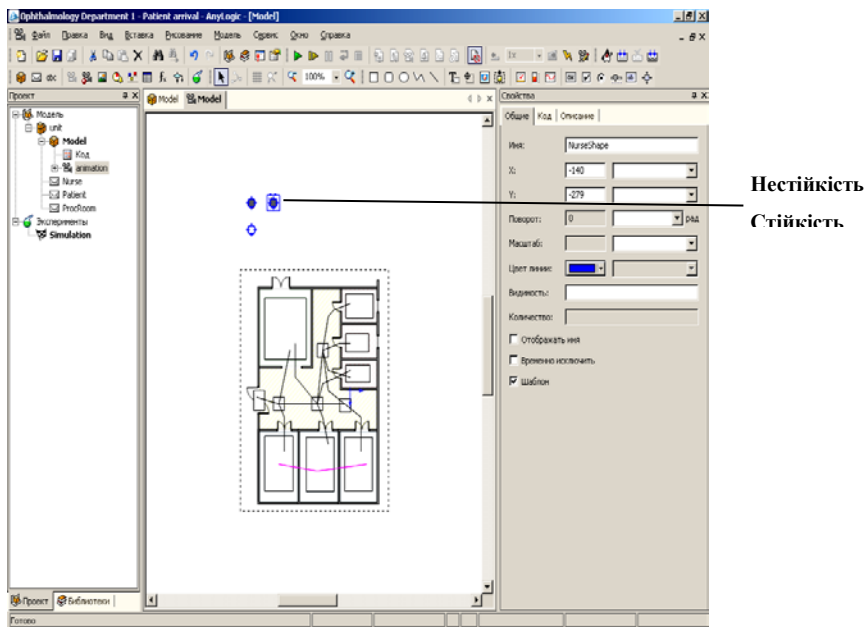


Рис. 4.114. Створення символів, що відображають ресурси моделі

1. Нарисуйте символ, яким на анімації відображатиметься пацієнт (рис. 4.115).

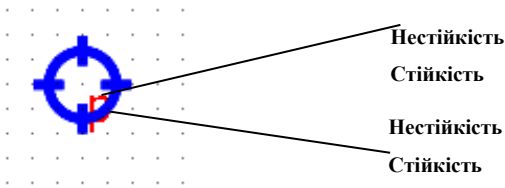


Рис. 4.115. Створення символу

а) Створіть текстову мітку клацанням миші спочатку по кнопці панелі інструментів «Текст», а потім – по анімаційній діаграмі. Задайте червоний шрифт розміру 7.

б) Створіть динамічну групу фігур (рис. 4.116).

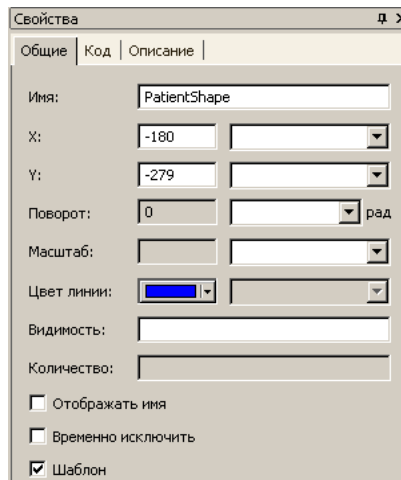


Рис. 4.116. Вікно властивостей

Додайте мітку до групи фігур. Клацніть правою кнопкою миші по фігурі групи фігур, виберіть «Добавить / Удалить» (дати / знищити) фігури з контекстного меню, а потім клацніть по мітці. Після цього помістіть мітку поверх значка групи фігур.

Тепер нарисуйте символ, яким відображатимуться медсестри (рис. 4.117).

На цьому створення простої транспортної моделі завершується. Запустіть модель клацанням миші по кнопці «Запустить» (запустити).

Наступним етапом є моделювання процесу заняття кімнат. На даний момент усі пацієнти оглядаються тільки в першій процедурній кімнаті. Більше того, декілька пацієнтів оглядаються в одній кімнаті одночасно. Тепер ми поліпшимо нашу модель, задавши процедурні кімнати статичними ресурсами. Пацієнти оглядатимуться в будь-якій з трьох процедурних. На час проведення процедури кімната буде зайнятою, тож ніхто інший не зможе бути оглянутий у ній у той же час.

[illegible]

1. Об'єкт NetworkSeizeQ займає статичні ресурси. Ми додаємо цей об'єкт для того, щоб змодельовати те, як пацієнт займає процедурну кімнату. Задайте наступні властивості об'єкта (рис. 4.119):

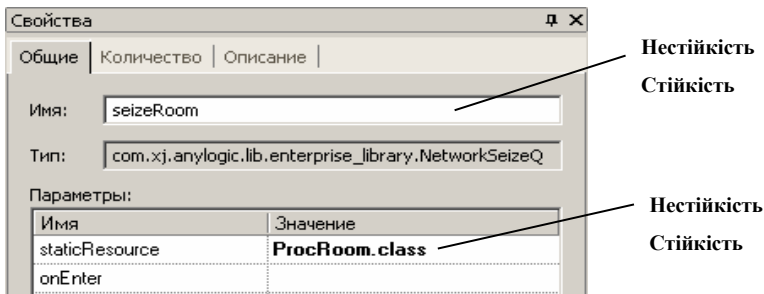


Рис. 4.119. Вікно властивостей

2. Задайте об'єкту наступні властивості (рис. 4.120):

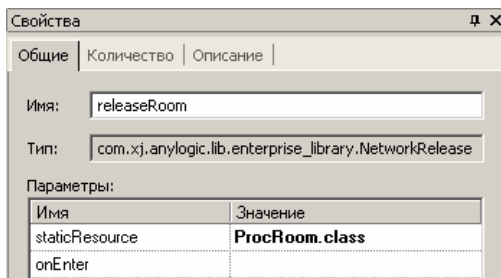


Рис. 4.120. Вікно Властивості

Запустіть модель клацанням миші по кнопці «Запустити» (запустити).

Тепер закінчимо створення нашої моделі, змодельовавши виклик офтальмолога до процедурної кімнати (рис. 4.121).

1. Створіть клас повідомлення Doctor. Повідомлення цього класу представлятимуть у нашій моделі офтальмологів. Успадкуйте клас повідомлення від класу Entity.

а) Щоб створити екземпляр групи фігур цього класу, напишіть такий Додатковий код класу :

```
Model._Group.DoctorShape shape =
(Model)Engine.getRoot().animation.new DoctorShape();
```

б) Щоб додати на анімацію створену групу фігур, напишіть такий код ініціалізації:

```
hape.setup();
setAnimation( shape );
enableRotation( false );
```

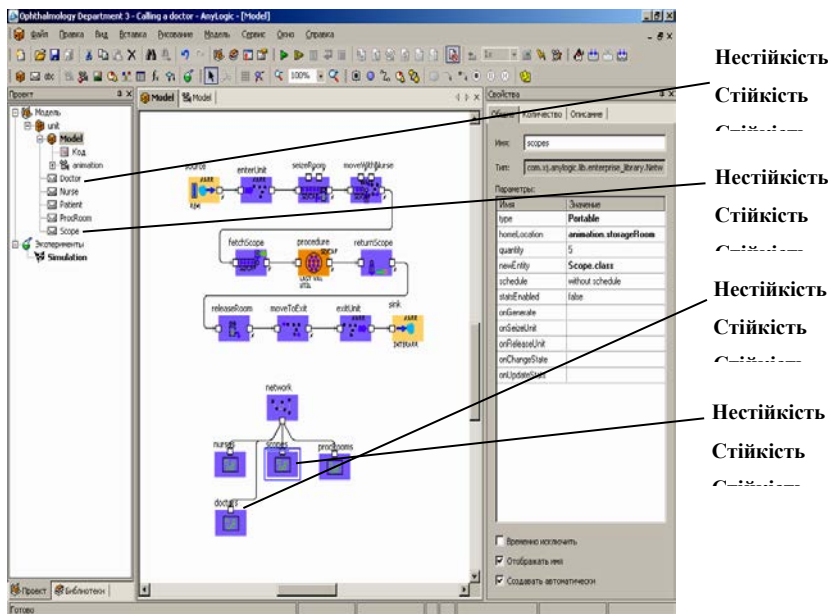


Рис. 4.121. Модельовання виклику офтальмолога до процедурної

2. Створіть клас повідомлення Score. Повідомлення цього класу представлятимуть офтальмоскопи.

Успадкуйте клас повідомлення від класу Entity. Анімаційний код писати не треба, оскільки ми не задаватимемо для об'єкта унікальну анімацію.

3. Об'єкт задаватиме властивості ресурсів типу Doctor. Задайте об'єкту наступні властивості (рис. 4.122):

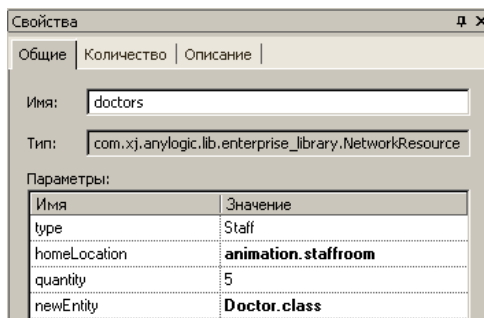


Рис. 4.122. Вікно властивостей

4. Об'єкт задаватиме властивості ресурсів – офтальмоскопів.
 Задайте об'єкту наступні властивості (рис. 4.123):

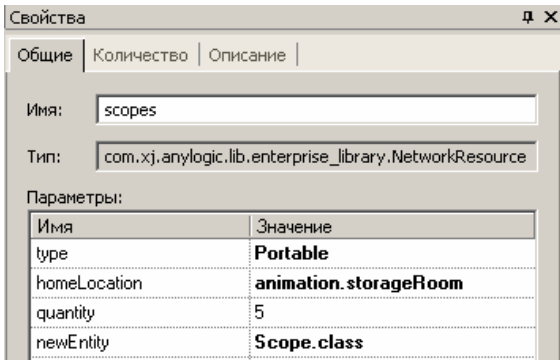


Рис. 4.123. Вікно властивостей

Змініть блок-схему (рис. 4.124).

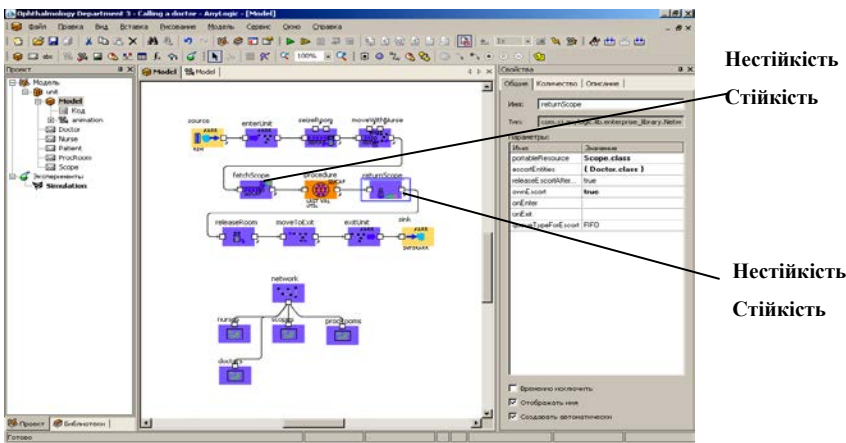


Рис. 4.124. Зміна блок-схеми

1. Об'єкт fetchScope моделює доставку переносних ресурсів за допомогою персоналу. Задайте об'єкту наступні властивості (рис. 4.125):
 - в) Переносні ресурси можуть приноситься і декількома різними членами персоналу.
 - г) Коли офтальмоскоп буде принесено, ми можемо відпустити лікаря. Проте в нашій моделі він має залишитися в процедурній – для виконання процедури.

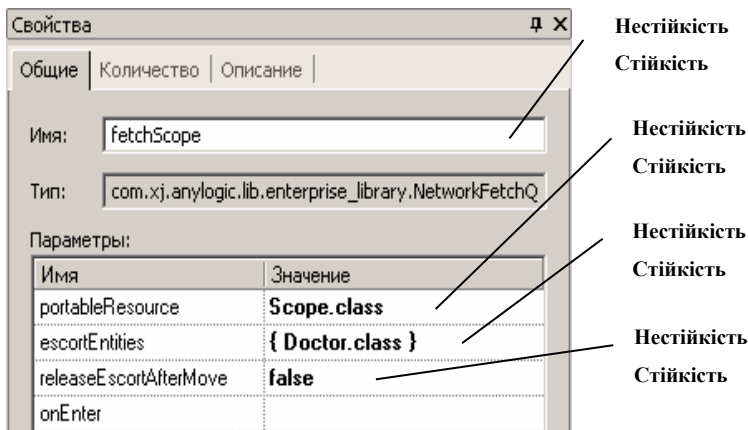


Рис. 4.125. Вікно властивостей

2. За допомогою об'єкта NetworkReturn змодельємо те, як лікарі відносять офтальмоскопи назад до кімнати для інструментів.

Задайте об'єкту наступні властивості (рис. 4.126):

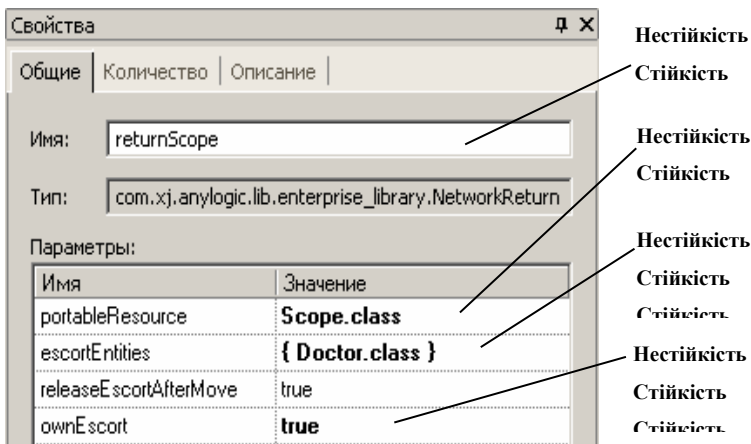


Рис. 4.126. Вікно властивостей

Далі ми змодельємо унікальну анімацію для лікарів – аналогічну тій, яку ми здійснили для медсестер і пацієнтів (рис. 4.127).

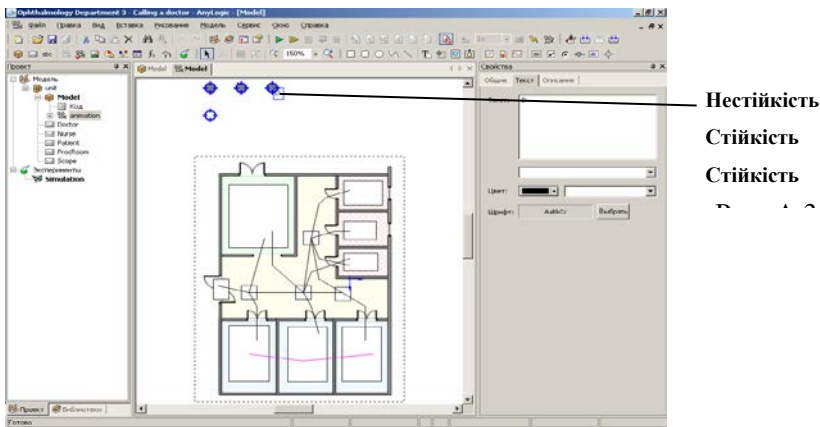
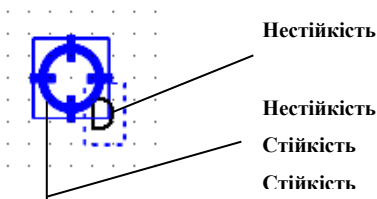


Рис. 4.127. Моделювання анімації для «лікарів»

1.



Створення моделі відділення офтальмології завершено. Запустіть модель клацанням миші по кнопці «Запустить» (запустити). Відтепер для виконання офтальмоскопії в процедурну кімнату викликається офтальмолог з офтальмоскопом.

У тому випадку, якщо Вам потрібно розширити функціональність цієї моделі та вийти за рамки дискретно-подійного моделювання, Ви можете застосувати будь-який інший підхід до моделювання: наприклад, задати складну і нетривіальну поведінку об'єктів моделі за допомогою стейтчартів.

ВИСНОВКИ

У нашому посібнику розглянуто деякі питання сучасного нелінійного моделювання нелінійної динаміки (синергетики, теорії хаосу, теорії катастроф, теорії біфуркації і т. д.) і аналізу складних систем, до яких належать усі соціально-економічні, екологічні, біомедичні, фізико-хімічні та інші системи.

В якості висновку автори пропонують цікавий оглядовий матеріал з питань нелінійної науки в цілому та із соціокультурної динаміки зокрема. Основна мета полягає в тому, щоб розглянути можливість і перспективи застосування ідей самоорганізації для моделювання процесів соціокультурної динаміки. Важливим поняттям у цій галузі міждисциплінарних наукових досліджень є синергетика, або теорія систем, що самоорганізуються.

Як це нерідко траплялося, поняття синергетики прийшло в науку з богослів'я. Грецьке слово *synergos* означає «спільно діючий». У богослів'ї його вперше використав послідовник Орігена Григорій Нісський, який жив у IV ст. У своїх проповідях він говорив про злагоджене різноманіття, красу і доцільність космосу, завдяки яким ми пізнаємо Творця, який тримає в руці свій весь світ. Цей світ стає Божим через людину, яка розуміється не як окремий індивід, а як вседине людство. Тому життя людини, за вченням Григорія Нісського, є синергією, або співдіяльністю, співпрацею її з Богом. А оскільки йдеться про самоузгоджену взаємодію двох різних природ і двох волей, то питання про обмеження Богом свободи людини і навпаки – Бога людини навіть не постає.

Таким чином, приймаючи вчення про синергію, у богослів'ї вдається органічно зняти антитезу «свобода – приреченість».

Цікаво зіставити ідеї Григорія Нісського про синергію з тим тлумаченням вчення про визначеність людської долі, яке дає Августин Аврелій. Підкреслюючи індивідуальний характер гріховності людини, Августин стверджує, що спасіння є тільки ласкою Бога і визначене небом. Добродійне життя не може вплинути на результат, допомогти людині здатна лише церква. Все, що залишається людині в цьому випадку, це, очевидно, приймати з вдячністю очікувану Божу благодать.

Займаючи таку жорстку позицію, Августин став попередником протестантської теології.

Успадковане від богослів'я поняття синергії, або синергізму, знайшло застосування у природничо-наукових дисциплінах. Так, у фізіології воно використовується для позначення злагодженої дії тих чи інших органів, у фармакології означає реакцію організму на комбіновану дію кількох ліків.

Синергетика як новий загальнонауковий напрям, що має справу з колективними, кооперативними ефектами в процесах самоорганізації, виникла в другій половині 70-х рр. ХХ ст. Основоположну роль у її становленні відіграли праці Іллі Пригожина і Германа Хакена (останньому належить сам термін «синергетика»). Спочатку методи синергетики застосовувалися в дослідженнях нерівноважних фазових переходів і процесів самоорганізації у фізичних, хімічних і біологічних системах. Проте згодом стало зрозумілим, що коло наукових проблем, для дослідження яких можна використовувати ці методи, значно ширше. Останнім часом ідеї синергетики стали активно застосовуватися в гуманітарних і соціальних наукових дисциплінах.

Категорії самоорганізації широко представлені у працях Е. Ласло, Дж. Форестера, Д. Медоуза, Е. Тоффлера, а в Росії – М. М. Моїсеєва, С. В. Курдюмова, Ю. Л. Клімонтовича, О. А. Самарського, їхніх учнів та ін. У моделюванні динаміки складних систем перспективними виявилися математичні методи теорії катастроф (роботи Р. Тома, К. Зімана, О. О. Андропова, В. І. Арнольда та ін.).

Г. Хакену належить просте і найзагальніше визначення синергетики: вона утворює міст між частиною і цілим. Мабуть, точніше слід було б сказати: і всім іншим, – тому що основним принципом синергетики є вимога не розбирати систему на частини, а розглядати її в цілісності, зрозуміти взаємозв'язки на рівні її структурних підсистем, а також особливості виходу на систему в цілому. В цьому контексті доречно пригадати вислів Гете: коли ціле цілком знаходить себе, воно вказує на решту. Доречно пригадати й афоризм Гермеса Трісмегіста: «Все в одному і одне в усьому».

Після цих вступних зауважень перейдемо до викладу тієї частини ідейного апарату синергетики, яка може бути використана при дослідженні процесів соціокультурної динаміки.

Якщо досліджуваний об'єкт не можна розглядати окремо від інших об'єктів, оскільки зв'язки з цими об'єктами впливають на його поведінку, то треба досліджувати всю сукупність цих об'єктів, або *систему*. Система називається *динамічною*, якщо її характеристики змінюються з часом.

Для такої системи вводиться поняття стану – як опис її в певний момент часу. Зміна системи проявляється в зміні її станів унаслідок зовнішніх впливів і внутрішніх властивостей самої системи. Якщо сукупна дія зовнішніх і внутрішніх факторів взаємно врівноважена, то система знаходиться в стаціонарному стані.

Особливий клас систем утворюють системи, що саморозвиваються, або самоорганізуються. До цього класу належать системи відкритого типу з нелінійними зворотними зв'язками. Відкритий характер системи означає, що вона має джерела і витоки енергії, речовини або інформації. Відкрита система не ізольована від зовнішнього середовища, а навпаки – знаходиться з ним у взаємодії. Прикладом такої системи може бути біосфера Землі, яка існує завдяки тому, що постійно отримує енергію, випромінювану Сонцем.

Зворотні зв'язки можуть бути як невід'ємними, так і від'ємними. Перші призводять до відходу системи від стаціонарного стану і розвитку нестійкостей, другі – повертають її до початкового стану. Приклад невід'ємних зворотних зв'язків – падаючий зі схилу гори камінь, який здатний викликати цілу лавину. Приклад від'ємних зворотних зв'язків – реакція організму на зміну температури навколишнього повітря.

Для систем, що саморозвиваються, характерні нелінійні зворотні зв'язки. Простий приклад таких зв'язків – зростання чисельності народонаселення Землі. Швидкість приросту, за статистичними даними, збільшується як квадрат чисельності n^2 (фактор народжуваності), а зменшується як перший ступінь чисельності n (фактор смертності). Проте обидві величини, n^2 і n , що визначають швидкість зміни чисельності народонаселення n , мають коефіцієнти, залежні від багатьох конкретних умов. Для різних значень величин цих коефіцієнтів можливі різні режими зростання народонаселення:

1. Стаціонарний режим (швидкість зростання дорівнює нулю, чисельність народонаселення залишається постійною).
2. Згасання (смертність переважає над народжуваністю).
3. Режим із загостренням – у певний момент чисельність населення наближається до нескінченності. На практиці такого, зрозуміло, не відбудеться, а математично цьому еквівалентна зміна чисельних коефіцієнтів величин n^2 і n , які визначають відносну інтенсивність процесів народжуваності та смертності.

На цьому прикладі стають очевидними такі властивості систем, що саморозвиваються, як незворотність і багатоваріантність альтернативних шляхів їхньої еволюції. Якщо розвиток системи відбувається у

сталому режимі, то такий тип її еволюції називають *атрактором*. Важлива властивість атрактора полягає в тому, що він здатний притягувати межуючі з ним режими (атракція означає «тяжіння»).

Цю здатність атрактора у процесі свого саморуху автоматично пригнічувати флуктуації, малі збурення можна інтерпретувати як вплив майбутнього на теперішній час.

Отже, система, що самоорганізовується, здатна поводитися зовсім не так, як того вимагає класичний принцип лапласівського детермінізму, за яким поведінка системи цілком і повністю визначається її попередньою історією. На поведінку систем з нелінійними зворотними зв'язками не менш значний вплив може чинити також майбутнє.

Наступна принципово важлива властивість динаміки систем, що самоорганізовуються, полягає в тому, що на фоні монотонного збільшення або зменшення параметрів системи може настати раптова зміна її стану. Це явище, також обумовлене нелінійними зворотними зв'язками, називається *катастрофою*. Добре відомий приклад такої катастрофи – закипання води, коли її температура досягає ста градусів за Цельсієм.

Однак для відкритих систем з нелінійними зворотними зв'язками цей катастрофічний процес виявляється, як правило, значно складнішим, ніж у випадку з водою. Після проходження цієї точки подальша еволюція системи перестає бути однозначною, вона відбуватиметься за одним з альтернативних сценаріїв, які значно різняться між собою. Тому такі точки розриву і галуження еволюційного процесу називають *біфуркаціями* (строго кажучи, біфуркація означає «роздвоєння»).

Потрапляння системи в околі точки біфуркації спричиняє парадоксальні явища: фундаментальну роль починають відігравати випадковості, другорядні фактори. Саме такий фактор здатен зіграти в цих умовах головну роль і здійснити значний вплив на перехід системи до того чи іншого еволюційного сценарію. Відбувається це тому, що в області біфуркації випадковим процесам ніщо не протистоїть: система втратила стійкість, вийшла з режиму атрактора.

У цьому пункті виявляється ще одна принципова відмінність поведінки систем, що самоорганізовуються, від класичних закономірностей. Класична наука розглядає випадковості всього лише як другорядні фактори, які не можуть здійснювати вирішальний вплив на процес, хід якого визначається в першу чергу об'єктивно діючими закономірностями, що розвиваються.

Саме з такого погляду на хід історичних процесів молодий Маркс оцінював можливість прогнозувати їхню динаміку: «Це можна буде

встановити з тією ж приблизно достовірністю, з якою хімік визначає, за яких зовнішніх умов споріднені речовини мають утворити хімічну сполуку».

З теорії систем, що самоорганізуються, випливає, що такі прогнози неможливі принципово. Наголосимо: неможливі тільки для тих систем, які належать до класу об'єктів, що саморозвиваються. Але саме такими є всі без винятку соціально-політичні системи. А тому періодична зміна режимів атракції та біфуркації – їхня органічна властивість.

Це означає, що в області біфуркації саме випадковості можуть вирішальним чином визначати долю таких систем. Якби, наприклад, у липні 1917 р. міністр юстиції Тимчасового уряду Малянтович виконав наказ цього уряду про арешт Леніна, то наступні події 25 жовтня того ж року, швидше за все, не сталися б, а сам Малянтович не загинув би пізніше в сталінських застінках. Не відбулися б ці події і в тому випадку, якби місяць по тому Керенський порозумівся з генералом Корніловим, а не з більшовиками.

Було б, проте, великою помилкою на цій підставі вважати, що динаміка системи після біфуркації має цілком випадковий, а тому непередбачуваний характер. Це зовсім не так. З теорії систем, що саморозвиваються, випливає, що після точки біфуркації їхня подальша еволюція може відбуватися тільки за одним з альтернативних сценаріїв, які чітко й однозначно фіксуються. У момент біфуркації ці сценарії існують лише як віртуальні, однак вони дуже різняться між собою і число їх не тільки скінченне, а у багатьох випадках і невелике. Ця альтернативна віртуалістика, прогнозована синергетикою, також є характерною особливістю теорії систем, що самоорганізуються.

Як же в такому разі розглядати прогнозні можливості цієї теорії? Щоб відповісти на це питання, слід передусім відзначити ще одну принципову відмінність цієї теорії від гуманітарних соціальних і політичних дисциплін: синергетика досліджує не самі системи, а їхні теоретичні моделі, а по-друге – згадати про сформульований Хакеном опорний *принцип підпорядкування*. Цей принцип – один з найважливіших у теорії самоорганізації і є наслідком механізму атракції: коли після проходження зони біфуркації система опиняється в околі одного з атракторів, кількість факторів, які визначають подальшу її поведінку, стає мінімальною. Внаслідок такого ефекту, для моделювання процесу переходу системи до цього атрактора стає можливим обійтися незначною кількістю змінних, які називаються параметрами порядку, або регулювання. Ця *концепція параметрів порядку* відіграє ключову роль у синергетиці.

На практиці підбір цих параметрів нагадує роботу карикатуриста, який прагне на малюнку передати тільки найхарактерніші риси зображуваного об'єкта. Функція цих регулювальних параметрів полягає в тому, що вони визначають асимптотичну поведінку системи, її перехід до того чи іншого нового стійкого атрактора. Все це дозволяє розглядати синергетику як сучасну *парадигму розвитку*.

Передбачувальну силу цієї парадигми слід розуміти так. Асимптотичні граничні стани – це атрактори. Єдиний шлях, що веде до них, обов'язково пролягає через зону біфуркацій – кризових, або катастрофічних, розривів монотонного еволюційного процесу. Атрактори притягують процеси: майбутнє впливає на сучасне. Проте неминучість біфуркації позбавляє це майбутнє однозначності. Однак його не можна вважати непередбачуваним – за біфуркацією слідує система шляхів. Вибір шляху може виявитися випадковим, але може бути зроблений і свідомо.

Як розуміти, виходячи з цих уявлень, свободу волі? Принцип класичного детермінізму вимагає дати на це питання добре відому однозначну відповідь: «Свобода є усвідомлена необхідність». Приймаючи принципи нелінійного мислення, що лежать в основі синергетики, ми отримуємо інше формулювання: свобода є можливість вибору і одночасне почуття відповідальності за цей вибір.

У заданих умовах середовища, як оточуючого систему, так і належного самій системі, заданий і набір віртуальних альтернативних атракторів. Перетворення однієї з цих віртуальних альтернатив у реальність може відбуватися за законами випадку, але може бути обумовленим і нашим свідомим вибором. Завдання *кратології*, або науки про управління функції полягає в тому, щоб навчитися управляти цим вибором.

Говорячи про катастрофи, або біфуркації, ми досі не прагнули ввести їхню класифікацію. Тимчасом тут є принципово важливий момент. Катастрофа, або криза, яка випробовує систему, може мати *структурний* або *системний* характер. У першому випадку серед альтернативних віртуальних сценаріїв, які сліднують за біфуркацією, є щонайменше один, при переході до якого система зберігає свої основні ознаки і функціональні особливості, відбувається лише її структурна перебудова. У другому випадку віртуальна альтернативістика не має жодного такого сценарію. Це означає, що за межею біфуркації початкова (вихідна) система вже не зможе існувати – на її місці виникне щось принципово інше.

Розрізняти ці два типи криз дуже важливо при прогнозуванні динаміки соціальних і політичних систем. На початку XX ст. В. І. Ленін

вчинив помилку, прийнявши чергову структурну кризу капіталізму за системну. На цій підставі він зробив необґрунтований висновок про неминучість перемоги світової соціалістичної революції. Але оскільки насправді ця криза капіталістичної системи мала не системний, а структурний характер, то, знайшовши дієві механізми її вирішення, капіталізм не тільки вижив, а й перейшов до нового, ще більш ефективного атрактора. А ось соціалістична революція, кінець кінцем, зазнала поразки.

Системна тріада синергетики. В основі синергетики лежать три базові постулати: це принципи *відкритості, нелінійності і когерентності*.

Перший – *принцип відкритості* – означає, що аналізована система має входи і виходи матерії, енергії та інформації – всіх разом або кожної окремо. Рівняння класичної механіки описують поведінку досліджуваного об'єкта «самого по собі», без зв'язку з навколишнім середовищем, хоча він і може знаходитися в полі зовнішніх сил, але будь-яка активна взаємодія з цим середовищем, взаємообмін з ним відсутній.

Тимчасом з життєвого досвіду цілком зрозуміло, що такий взаємообмін є звичайним явищем у реальних процесах. Сфера застосування методів синергетики – саме такі процеси. Принцип відкритості відображає субстанційний, наочний аспект синергетики.

Іноді цей принцип призводить до виникнення запитань, на які сучасна наука поки що не знає відповідей. Ось приклади таких запитань: як розуміти неповноту буття? якщо розглядати Всесвіт як відкриту систему, то куди вона відкрита? що таке Великий вибух, що спричинив виникнення нашого Всесвіту? Мабуть, відповіді на ці запитання слід шукати за межами сучасної загальнонаукової парадигми.

Другий елемент синергетичної тріади – *нелінійність* – характеризує її аналітичний аспект: нелінійні системи вимагають відображення в багатовимірному просторі. Цей наслідок нелінійності на перший погляд може видатися неочевидним. Щоб показати, що це саме так, наведемо парадоксальний приклад з вигаданої Х. Борхесом «китайської енциклопедії».

В одній зі статей цієї «енциклопедії» пишеться: «Тварини поділяються на: а) тих, які належать Імператорові, б) тих, яких бальзамують, в) приручених, г) молочних поросят, ґ) сирен, д) казкових, ж) бродячих собак, з) уведених до цієї класифікації, і) тих, які буйствують, як у безумстві, к) тих, яких не можна порахувати, л) намальованих дуже тонким пензликом з верблюжої вовни, м) та інших, н) тих, які щойно розбили глека, о) тих, які здалеку здаються мухами».

За всієї навмисне вигаданої безглуздості такої класифікації вона є вдалим прикладом суто одновимірного лінійного впорядкування абсолютно несхожих об'єктів. Очевидно, що кожному з цих об'єктів слід було б «приписати» власний параметр і перевести таким чином усю цю жахливу мішанину в 14-вимірний простір.

Але це ще не все. Разюча відмінність цих «китайських» об'єктів вимагає зробити й наступний крок – ввести для опису кожного з них специфічний параметр, або критерій, характерний винятково для цього об'єкта. А це й означатиме, що багатовимірний простір, побудований за цими параметрами як за осями координат, буде обов'язковий нелінійним.

Математично нелінійність означає, що рівняння, які описують процес, містять змінні, показник ступеня яких може відрізнятися від одиниці. Найпростіший приклад – квадратне рівняння.

Нелінійність системи виявляється в цілій низці її властивостей: нестійкості, незворотності в часі, у біфуркаціях, альтернативності віртуальних еволюційних патернів, можливості переходу до стану динамічного хаосу. Описувати поведінку такої системи в класичному наближенні окремих траєкторій неможливо.

Мабуть, найменш зрозумілим здається третій елемент синергетичної тріади – *когерентність*. Цей термін походить від латинського слова *cohaerentia*, що означає «зв'язок, зчеплення». У теорії коливань когерентність означає злагоджений перебіг у часі декількох хвильових процесів, різниця фаз яких є постійною. В результаті когерентні хвилі або підсилюють, або ослаблюють одна одну. Внаслідок цього ефекту додавання малих величин може дати дуже велику інтенсивність сигналу. На цьому принципі працює лазер.

У синергетиці когерентність означає злагоджену дію всіх елементів у масштабі системи як єдиного цілого. При цьому механізм кооперації елементів може бути будь-яким, а не тільки оснований на узгодженні фаз. Узгодженість функціонування елементів – це і є той принцип синергії, який у теології був проголошений Григорієм Нісським, а стосовно синергетики як теорії самоорганізації прийнятий Хакеном і Пригожиным. Саме когерентність, кооперативність, узгодженість внутрішніх процесів, що визначають еволюцію системи, і надає їй головну властивість – здатність до самоорганізації. Тому можна стверджувати, що когерентність, як третій елемент синергетичної тріади, вносить до її опису як єдиного цілого якісний аспект.

Щоб глибше осмислити структурні особливості синергетичної тріади, доцільно пригадати погляди на потрійність самого поняття «тріада».

Російський філософ Р. Г. Баранцев пропонує таку класифікацію триад: лінійні, перехідні та системні. Лінійні, або одновимірні, триади по суті є виродженими; семантично вони не багатші за діади, прикладом яких є парні зіткнення.

Прикладом триад проміжного типу є гегелівська формула «теза – антитеза – синтез». Елементи цієї триади нерівноправні, несинхронні і не містять вказівок на механізм власного динамізму.

Особливості системних триад полягають у тому, що їхні елементи рівноправні, мають спільну топологічну структуру та утворюють цілісну єдність. У сукупності ці особливості системних триад визначають такі їхні властивості, як динамізм, незворотність у часі, самоорганізація, еволюція. Тому можна погодитися, що концепція синергетичної триади служить достатньою підставою для системного визначення синергетики.

Футуросинергетика. Той напрям соціосинергетики, який стосується прогнозування еволюції соціальних систем, логічно назвати футуросинергетикою. Яке місце може посісти цей новий напрям у низці інших футурологічних дисциплін – науково-технологічного і соціального прогнозування, глобалістики, альтернативістики тощо?

Особливо сильне враження на світову громадськість справили доповіді «Римського клубу», починаючи від перших публікацій Дж. Форрестера, Д. Медоузова та ін. Ці доповіді, що з'явилися на початку 70-х рр. XX ст., стали справжньою світовою сенсацією. З'ясувалося, що людство опинилося на межі глобальної катастрофи, обумовленої вичерпанням мінеральних ресурсів, неприпустимим техногенним забрудненням довкілля і безупинним зростанням чисельності народонаселення Землі. Ті доповіді «Римського клубу», що з'явилися пізніше, не змогли додати світлих тонів до цієї похмурої картини грядущого апокаліпсису.

Криза глобалістики, в рамках якої так і не вдалося накреслити конструктивних шляхів подолання загальнопланетного колапсу, призвела до появи серії альтернативних досліджень, автори яких поставили за мету пошук рішення глобальних проблем. Серед цих праць були книги Р. Гендерсона, М. Фергюсона, Ф. Фукуями, П. Кеннеді, а в Росії – І. В. Бестужева-Лади, Л. В. Лескова, О. С. Панаріна, Ю. В. Яковця та ін., в яких було сформульовано концепцію альтернативної цивілізації, перехід до якої, на думку авторів, може забезпечити подолання глобальної кризи.

Проект цієї альтернативної цивілізації в найзагальнішому вигляді включає декілька програм: відновлення глобального паливно-сиро-

винного балансу, нормалізацію відтворювання поколінь, природоохоронні заходи, припинення гонки озброєнь і загальне роззброєння, постановку людини в центр системи цінностей. Цільові засади цих програм були абсолютно правильними, але їхнім слабким місцем стала відсутність ефективних механізмів їхньої реалізації.

У 1992 р. на конференції Організації Об'єднаних Націй у Ріо-де-Жанейро ці пропозиції було покладено в основу пакету документів «Порядок денний на ХХІ століття». Рішення конференції в Ріо-де-Жанейро орієнтували уряди та світову громадськість на перехід до стійкого розвитку – розвитку, що самопідтримується. Як зазначено в документах ООН, людство здатне зробити свій розвиток стійким – забезпечити задоволення потреб сьогодення, не піддаючи ризику можливість майбутнім поколінням робити те ж саме. Проте ці, абсолютно правильні, орієнтири також мали на собі «наліт» прекраснодушності, оскільки не було знайдено ні дієвих способів втілення цих рішень у глобальному масштабі, ні засобів міжнародного контролю за їхнім виконанням. Саме тому на багатьох міжнародних форумах, які відбуватися згодом, включаючи «Саміт Землі» (Йоханнесбург, 2002), наголошувалося на незадовільній реалізації рекомендацій, прийнятих у Ріо-де-Жанейро.

Отже, до сьогодні проблема глобальної кризи залишається невирішеною. Попри досить значний обсяг досліджень, здійснених у різних країнах, задовільних підходів до її розв'язання знайти так і не вдалося. Одна з причин невдач полягає, очевидно, в недостатньому методологічному забезпеченні досліджень. Немає сумнівів, що включення в інструментарій технологічного і соціального прогнозування методів синергетики зможе посприяти вирішенню цього важливого комплексу завдань.

Зупинімося на тих потенційних перевагах, які може дати розвиток синергетичних методів моделювання процесів соціокультурної динаміки:

1. Комплексний аналіз проблеми глобальної кризи в усьому його багатовимірному і багатофакторному просторі.
2. Побудова спектра альтернативних віртуальних сценаріїв еволюції локальних цивілізацій та світової спільноти в цілому після виходу з глобальної мегабіфуркації.
3. Формалізація умов виходу з кризи на основі концепції регулювальних параметрів порядку.
4. Числова оцінка статистичних вагів альтернативних сценаріїв еволюції у функції курсу реформ та інших факторів.

Спираючись на ці переваги футуросинергетики, можна застосовувати її методи для розв'язання досить широкого кола задач. Наведемо деякі з них:

1. Виявлення факторів, що дозволяють класифікувати цю біфуркаційну кризу соціальної системи як структурну або як системну.
2. Аналіз стійкості соціальної системи в зоні біфуркації на основі визначення генетичного комплексу адіабатичних інваріантів історичного процесу, характерних для цієї системи.
3. Побудова ієрархічного ряду систем і підсистем, взаємно впливаючих на власний еволюційний процес. Наприклад, соціальну систему можна розглядати як структурний елемент ієрархічно вищої соціально-екологічної системи, а цю останню – як елемент космопланетарної системи.
4. Числове моделювання еволюції соціальних систем з урахуванням енергетичних, технологічних, екологічних, соціально-політичних, психологічних та інших факторів.
5. «Історична механіка» – числове моделювання альтернативних віртуальних сценаріїв розвитку реальних історичних подій методом ретропроекції.
6. Фантоматика, або кентавристика, – синергетичний аналіз утопічних соціальних проектів, який дозволяє визначити ціну їхньої реалізації та можливі негативні наслідки.
7. Синергетична кратологія – вибір коридорів здійснення управляючих функцій, відповідних мінімальному ризику негативних наслідків.
8. Синергетика національної та міжнародної безпеки.
9. Синергетика переходу до постіндустріальної та постекономічної цивілізації.
10. Електоральна синергетика – синергетичний прогноз результатів виборів.
11. Синергетика когнітивної діяльності.
12. Синергетика глибокого футурологічного прогнозу за межами існуючої наукової парадигми.

Цим переліком практичні можливості футуросинергетики не вичерпуються.

Філософія нестабільності. У філософії дуже давно відомий принцип Оккама: *не слід примножувати сутності без необхідності*. Серед усіх галузей знань філософія вирізняється тим, що має, мабуть, найбільшу кількість самостійних напрямів. Серед них: філософія життя, філософія відчуття, філософія тотожності, філософія цінностей і на-

віль філософія суїциду. То, може, ці напрями в сукупності охоплюють все коло наших проблем і немає необхідності вводити у філософську науку ще один новий напрям?

Щоб дати на це питання якомога точнішу відповідь, скористаємося нестандартним прийомом. У 1959 р. знаменитий філософ і логік Бертран Рассел дав інтерв'ю В. Хайетту. Ми збережемо все сказане Расселом, але замінимо запитання інтерв'юера власними. Темою бесіди було питання «Що таке філософія?».

Ось як відповів на нього лорд Рассел:

– Моя власна відповідь була б такою: філософія є роздумом про предмети, точне знання про які неможливе. Наука – це те, що ми знаємо, а філософія – те, чого не знаємо. Філософія має дві реальні області застосування. Одна з них – підтримка роздумів про предмети, які ще не потрапили в сферу науки. Існує безліч речей, які дуже цікаві і про які наука, принаймні зараз, знає мало.

У цьому місці дозволимо собі перервати міркування філософа і зробити таке зауваження:

– Але це саме наш випадок! Наша основна тема – дослідження поведінки соціальних систем в області біфуркації та моделювання їхньої подальшої еволюції. Наука не знає поки що остаточних відповідей на ці запитання. Тимчасом їхнє практичне значення винятково велике, оскільки наш час – це епоха гігантської біфуркації, яка охопила всю планету і загрожує загибеллю людству.

– Я вважаю, – зауважив з цього приводу Рассел, – що одне із застосувань філософії полягає в збільшенні наших уявних конструкцій про світ і доведення їх до рівня гіпотез.

– Саме в цьому й полягає завдання футуросинергетики, – погодився ми. – Але скажіть, лорде Расселе, що у такому разі припадає на частку власне філософії? На яких філософських питаннях, враховуючи це, Ви порадили б зосередити нашу увагу?

– На мій погляд, – відповів наш високошанований співбесідник, – існує й інше призначення філософії, не менше важливе, яке допомагає нам зрозуміти, що є безліч речей, які тільки здаються відомими, але насправді не відомі нам.

– Дякуємо за підказку, – говоримо ми. – Хоча синергетика сама по собі точна наука, але не стосовно соціальних проблем. Безумовно, в цій сфері є чимало питань, які погано піддаються математичній формалізації. Крім того, для аналізу такої складної проблеми, якою є пошук шляхів подолання глобальної кризи і переходу до стійкого майбутнього, не обійтися без міждисциплінарного підходу. Роль філосо-

фії при цьому має полягати в аналітичному узагальненні отриманих результатів Можна сподіватися, що внаслідок поєднання різних методологічних підходів будуть отримані корисні рекомендації щодо способів вирішення нашої проблеми.

– Я вважаю, що справа філософії – не змінювати світ, – у голосі Рассела почулося роздратування, – а пізнавати його. І це прямо протилежне тому, що говорить Маркс.

Вислухавши таку відповідь, перервемо на хвилину бесіду і замислимся: порада, яку ми одержали від вченого співбесідника, виявилася прямо протилежною основним принципам футуросинергетики: по-перше, розглядати проблему передусім у її цілісності, а по-друге, визначати критерії заборони тупикових еволюційних патернів. Але вчитася ще раз у слова Рассела, адже вони, у своїй суті, наводять нас на цінну думку: саме дослідження нинішньої глобальної мегабіфуркації в усій її цілісності, з усіма її нелінійними внутрішніми зв'язками, з її входами та виходами і є основним предметом філософії нестабільності. Усвідомивши це, поставимо філософові наступне запитання:

– А який практичний сенс може мати філософія для людини, чи здатна вона підказати, як їй жити?

– Переважна більшість людей, – неспішно відповів Рассел, – у наш час абсолютно заплуталися, як їм треба поводитися. На мою думку, нікому не слід бути впевненим ні в чому. Якщо у вас немає сумнівів, ви, однозначно, помиляєтесь, оскільки ніщо не заслуговує цілковитої впевненості, а отже, завжди всі свої переконання потрібно піддавати певному сумніву, але, не дивлячись на сумніви, діяти рішуче. У практичному житті доводиться діяти, ґрунтуючись на вірогідності, і я чекаю від філософії, що вона заохотить людей діяти рішуче, хоч і без абсолютної впевненості.

Так мало слів – і стільки цінних порад! По-перше, оцінка вірогідності – це саме те, що робить футуросинергетика. А там, де їй буде важко впоратися із завданням, на допомогу їй має прийти філософія, – це по-друге. Але саме це і є наступним завданням філософії нестабільності – працювати в тісному союзі з футуросинергетикою над загальними проблемами.

І третя підказка мудрого філософа – вихід на живу людину, на її дії. А це вже питання етики. І отже, третя проблема, над розробкою якої має працювати філософія нестабільності, – це питання моралі в умовах мега-кризи та перехідних процесів до альтернативних сценаріїв майбутнього. Однак тут, схоже, Рассел суперечить самому собі: справа філософії, говорить він, – пізнавати світ, а не змінювати його. А у

Маркса сказано: філософи по-різному пояснювали мир, але справа полягає в тому, щоб змінити його.

Стосовно подолання мегабіфуркації має рацію Маркс, а не Рассел. Проте і Рассел, немов забувши свої попередні слова, дає людям пораду діяти рішуче. Причому з допомогою саме філософії.

Розмова з відомим філософом виявилася надзвичайно плідною. Філософія нестабільності отримала не тільки підтримку як самостійний актуальний напрям філософської думки, а й конкретне наповнення своєї тематичної спрямованості. Очевидно, має йтися про дослідження трьох фундаментальних проблем, а саме:

1. Глобальна мегабіфуркація і шляхи виходу з неї.
2. Етика процесів переходу до стійкого майбутнього.
3. *«Якщо ви маєте гарну наукову уяву, то ви можете розмірковувати про всілякі явища, які можуть бути істинними. І в цьому суть науки».* Що це, як не ще одна підказка, яку дає нам Рассел у пошуках рішення нашого завдання? Значення його слів очевидне: це порада заглянути за горизонт сучасного позитивного знання, накреслений існуючою науковою парадигмою.

Формулюючи перелік основних проблем філософії нестабільності, ми отримали результат, який було важко передбачати, – нову синергетичну тріаду, цього разу – тріаду філософії нестабільності. Очевидно, дослідження цих проблем слід здійснювати, спираючись на об'єднані методологічні зусилля і футуросинергетики, і філософії нестабільності. І тут теж має місце третій елемент – нелінійне мислення, – який дозволяє говорити ще про одну, цього разу методологічну, тріаду.

Тепер, коли питання про філософію нестабільності, здається, стало зрозумілим, хочеться поставити лордові Расселу, який, сам того не знаючи, так допоміг нам, останнє запитання:

– *Наскільки цінні результати може дати філософія для наших цілей?*

Відповідь старого вченого була твердою:

– *Я вважаю, що філософія має велике значення в сучасному світі. По-перше, тому, що, як я вже сказав, вона примушує нас усвідомлювати існування дуже багатьох речей і дуже важливих питань, які не входять, принаймні зараз, до сфери науки. А по-друге, вона все ж таки робить людей трохи децю стриманішими інтелектуально і примушує їх усвідомлювати, що короткого шляху до знань не існує. І що пізнання світу – ця дуже довга і складна справа, в якій ми не повинні бути догматиками.*

Класична картина світу заснована на принципі детермінізму, на запереченні ролі випадковостей. Закони природи, включаючи і закономірності соціокультурної динаміки, з цієї точки зору виявляють визначеність. Реальний Всесвіт мало схожий на цю картину. Для нього характерні стохастичність, нелінійність, невизначеність, незворотність. Для еволюціонізуючого нелінійного Всесвіту застосування поняття стріли часу виявляється спірним. Пригадаймо вислів Ейнштейна: «*Час – це ілюзія*».

У нелінійному Всесвіті закони природи – і, отже, соціально-економічні закономірності – виражають не визначеність, а можливість і ймовірність. Випадковості в цьому Всесвіті відіграють фундаментальну роль, а його найхарактернішою властивістю є процеси самоорганізації.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алиев Р. А., Абдикеев Н. М., Шахназаров М. М.* Производственные системы с искусственным интеллектом. – М.: Радио и связь, 1990. – 264 с.
2. *Алиев Р. А., Абдикеев Н. М., Шахназаров М. М.* Планирование производства в условиях неопределенности. – М.: Радио и связь, 1990. – 286 с.
3. Аналитическая платформа Deductor 4. Руководство пользователя BaseGroup Labs 1998–2005.
4. *Анищенко В. С.* Знакомство с нелинейной динамикой: Лекции соросовского профессора : учеб. пособ. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 144 с.
5. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. – М.: Наука, 1990. – 128 с.
6. *Барсегян А. А., Куприянов М. С., Степаненко В. В., Холод И. И.* Методы и модели анализа данных: OLAP и Data Mining. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 336 с. : 6 ил.
7. *Безручко Б. П., Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях / Под ред. И. В. Лебедева. – М.: КомКнига, 2005. – 304 с.
8. *Билл Вильямс.* Торговый хаос. – М.: ИК Аналитика, 2000. – 328 с.
9. *Бирюков Б. В., Тростников В. Н.* Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики. Формализация мышления от античных времен до эпохи кибернетики. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: ЭдиториалУРСС, 2004. – 232 с.
10. *Борисов А. Н.* Модель принятия решений на основе лингвистической переменной. – Рига: Зинатне, 1982. – 256 с.
11. *Борисов А. Н. и др.* Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. – М.: Радио и связь, 1989. – 304 с.
12. *Бранский В. П.* Социальная синергетика и теория наций. Основы этнологической акмеологии. – СПб.: Изд. Санкт-Петербургской Акмеологической Академии, 2000. – 108 с.
13. *Вайдлих Вольфганг.* Социодинамика: системный подход к математическому моделированию в социальных науках / Пер. с англ.; под ред. Ю. С. Попкова, А. С. Семечкина. – Изд. 2-е, стереотип. – М.: ЭдиториалУРСС, 2005. – 480 с.

14. Воронкова А. Э., Козаченко А. В., Рамазанов С. К., Хлапенков Л. Е. Современные технологии управления промышленным предприятием. – К.: Лібра, 2007. – 254 с.
15. Гультияев А. Визуальное моделирование в среде MATLAB : учеб. курс. – СПб: Питер, 2000 г.– 425 с.
16. Гультияев А. К. MatLab 5.3. Имитационное моделирование в среде Windows : практич. пособ. – СПб.: КОРОНА принт, 2001. – 400 с.
17. Данилов Ю. А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение : учеб. пособ. / Предисл. Г. Г. Малинецкого. – Изд. 2-е, испр. – М.: КомКнига, 2006. – 208 с.
18. Евин И. А. Искусство и синергетика. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 164 с.
19. Евин И. А. Синергетика мозга и синергетика искусства. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 164 с.
20. Емельянов А. А., Власова Е. А., Дума Р. В. Имитационное моделирование экономических процессов. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 365 с.
21. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 165 с.
22. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 335 с.
23. Згуровский М. З. Интегрированные системы оптимального управления и проектирования : учеб. пособ. – К.: Вища школа, 1990. – 351 с.
24. Иванилов Ю. Н. Математические модели в экономике. – М.: Наука, 1999. – 304 с.
25. Иванилов Ю. П., Лотов А. В. Математические модели в экономике. – М.: Наука, 1979. – 304 с.
26. Иваницкий Г. Р. Синергетика // Новое в жизни, науке и технике. – 1989. – № 7. – (Сер. «Математика, кибернетика»)
27. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1975. – 606 с.
28. Исследование операций в экономике / Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
29. История и синергетика: Математическое моделирование социальной динамики / Отв. ред. С. Ю. Малков, А. В. Коротаев. – М.: КомКнига, 2005. – 192 с.
30. История и синергетика: Методология исследования / Отв. ред. С. Ю. Малков, А. В. Коротаев. – М.: КомКнига, 2005. – 184 с.
31. Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика и прогнозы будущего. – Изд. 3-е. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 288 с.

32. *Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Синергетика и прогнозы будущего. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 288 с.
33. *Кара-Мурза С. Г.* Идеология и мать ее наука. – М.: Изд-во Эксмо, 2002. – 256 с.
34. *Кара-Мурза С. Г.* Манипуляция сознанием. – М.: Изд-во Эксмо, 2003. – 832 с.
35. *Кейнс Дж. М.* Избранные произведения / Пер.с англ. – М.: Экономика. – 1993. – 376 с.
36. *Князева Е. Н., Курдюмов С. П.* Основания синергетики. Режимы с обострением, самоорганизация, темпомиры. – СПб.: Алетейя, 2002. – 414 с.
37. *Колемаев В. А.* Математическая экономика. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
38. *Колесников А. А.* Синергетические методы управления сложными системами: Теория системного синтеза. – М.: КомКнига, 2006. – 240 с.
39. Компьютеры и нелинейные явления: Информатика и современное естествознание / Авт. предисл. А. А. Самарский. – М.: Наука, 1988. – 192 с.
40. *Короновский А. А., Трубецкая В. И.* Нелинейная динамика в действии: Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. – Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002. – 324 с.
41. *Кортаев А. В., Малков А. С., Халтурина Д. А.* Законы истории. Математическое моделирование исторических макропроцессов. Демография, экономика, войны. – М.: КомКнига, 2005. – 344 с.
42. *Котов Ю. Б.* Новые математические подходы к задачам медицинской диагностики. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 328 с.
43. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
44. *Краасс М. С., Чупрынов Б. П.* Математические методы и модели для магистрантов экономики : учеб. пособ. – СПб.: Питер, 2006. – 496 с.
45. *Краасс М. С.* Математика в экономике. Основы математики. – М.: ФБК-ПРЕСС, 2005. – 472 с.
46. *Краасс М. С., Чупрынов Б. П.* Математика в экономике. Математические методы и модели. – М.: Дело, 2006. – 688 с.
47. *Кугаенко А. А.* Методы динамического моделирования в управлении экономикой : учеб. пособ. / Под ред. П. Е. Кондрашова. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Университетская книга, 2005. – 456 с.
48. *Кудинов Ю. И.* Нечетные системы управления // Изд. АН СССР. – Сер. ТК. – 1990. – № 5. – С. 196–206.

49. Кузнецов А. П. Колебания, катастрофы, бифуркации, хаос. – Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2000. – 98 с.
50. Лабскер Л. Г., Бабешко Л. О. Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом. – М.: Дело, 2001. – 464 с.
51. Лебедев В. В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. – М.: Изограф, 1997. – 224 с.
52. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 736 с.
53. Лесков Л. В. Нелинейная Вселенная: новый дом для человечества / Л. В. Лесков. – М.: ЗАО «Издательство “Экономика”», 2003. – 446 с.
54. Лесков Л. В. Футуросинергетика: универсальная теория систем : науч.-учеб. пособ. / Л. В. Лесков. – М.: ЗАО «Издательство “Экономика”», 2005. – 170 с.
55. Лоскутов Ю. А., Михайлов А. С. Введение в синергетику. – М.: Наука, 1990. – 270 с.
56. Лысенко Ю. Г., Петренко В. Л., Тимохин В. Н., Филиппов А. В. Экономическая динамика. – Донецк: ДГУ, 2000. – 176 с.
57. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 320 с.
58. Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. – Изд. 4-е, суц. перераб. и доп. – М.: КомКнига, 2005. – 312 с. – (Синергетика: от прошлого к будущему)
59. Малинецкий Г. Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 256 с.
60. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 336 с.
61. Мелихов А. Н., Бернштейн Л. С., Коровин С. Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. – М.: Наука, 1990. – 272 с.
62. Милованов В. П. Синергетика и самоорганизация: Общая и социальная психология. – М.: КомКнига, 2005. – 208 с.
63. Милованов В. П. Синергетика и самоорганизация: Экономика. Биофизика. – М.: КомКнига, 2005. – 168 с.
64. Милованов В. П. Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 264 с.
65. Моделирование экономической динамики : учеб. пособ. / Т. С. Клебанова и др. – Х.: Издательский дом «ИНЖЕК», 2004. – 244 с.

66. Моделювання економічної динаміки : навч. посіб. / Г. В. Лаврінський, О. С. Пшенишнюк, С. В. Устинко, О. Д. Шарاپов – К.: Атака, 2006. – 276 с.
67. *Моисеев Н. Н.* Алгоритмы развития. – М.: Наука, 1987. – 305 с. – (Сер. Академические чтения).
68. *Моисеев Н. Н.* Математика в социальных науках // Математические модели в социологическом исследовании. – М.: Наука, 1981. – 452 с.
69. *Морозов А. Д.* Введение в теорию фракталов. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 160 с.
70. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 318 с.
71. Нечеткие множества и теория возможностей / Под ред. Р. Р. Ягьяра. – М.: Радио и связь, 1986. – 408 с.
72. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. Введение / Пер. с англ. – Изд. 2-е, стереотип. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 344 с.
73. *Орловский С. А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
74. *Осовский С.* Нейронные сети для обработки информации. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 344 с.
75. *Пенроуз Р.* Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики / Пер. с англ.; отв. ред. В. О. Малышенко. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 384 с.
76. *Пенроуз Р.* Тени разума: в поисках науки о сознании. Часть II: Новая физика, необходимая для понимания разума. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 352 с.
77. *Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П.* Введение в системный анализ. – М.: Высшая школа, 1989. – 320 с.
78. *Петерс Э.* Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка / Пер. с англ. – М.: Мир, 2000. – 333 с.
79. *Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А.* Опыт математического моделирования экономики. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – 558 с.
80. *Пригожин И., Стенгерс И.* Время, хаос, квант. К решению парадокса времени / Пер. с англ. – Изд. 5-е, исправл. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 240 с.
81. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой / Пер. с англ. – Изд. 4-е, стереотип. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 312 с.
82. *Пригожин И.* От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках / Пер. с англ.; под ред., с предисл. и

- послесл. Ю. Л. Климонтовича. – Изд. 2-е, доп. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 288 с.
83. *Пригожин И., Стенгерс И.* Время, хаос, квант. К решению парадокса времени. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 240 с.
84. *Рамазанов С. К.* Автоматизация управления производственно-транспортными комплексами в системе экологического мониторинга : монография. – Луганск: ВУГУ, 1996. – 268 с.
85. *Рамазанов С. К.* Инструменты эколого-экономического управления предприятием : монография. – Донецк: ООО «Юго-Восток, Лтд», 2008. – 351 с.
86. *Рамазанов С. К.* Модели эколого-экономического управления производственной системой в нестабильной внешней среде : монография. – Луганск: Изд-во ВНУ им. В. Даля, 2004. – 384 с.
87. *Рамазанов С. К.* Современные проблемы моделирования социально-экономических систем : монография. – Харьков: ИД «ИНЖЭК», 2009. – 440 с.
88. *Рамазанов С. К.* Сучасні та перспективні методи і моделі управління в економіці : монографія: у 2 ч. – Суми: ДВНЗ «УАБС НБУ», 2008. – 256 с.
89. *Рамазанов С. К., Припотень В. Ю.* Методы и информационные технологии управления предприятием в условиях нестабильностей : монография. – Луганск: Изд-во ВНУ им. В. Даля, 2006. – 216 с.
90. *Рамазанов С. К., Степаненко О. П., Тимашова Л. А.* Технології антикризового управління : монография. – Луганськ: СНУ ім. В. Даля, 2004. – 192 с.
91. *Редько В. Г.* Эволюция, нейронные сети, интеллект: Модели и концепции эволюционной кибернетики. – Изд. 3-е. – М.: КомКнига, 2005. – 224 с.
92. *Рюэль Д.* Случайность и хаос. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 192 с.
93. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование (идеи, методы, примеры). – М.: Наука, 1997. – 320 с.
94. *Сергеева Л. Н.* Моделирование поведения экономических систем методами нелинейной динамики (теории хаоса). – Запорожье: ЗГУ, 2002. – 227 с.
95. *Сергеева Л. Н.* Моделирование структуры экономических систем и процессов. – Запорожье: ЗГУ, 2002. – 88 с.
96. *Сергеева Л. Н.* Нелинейная экономика: модели и методы. / Научн. ред. проф. Ю. Г. Лысенко. – Запорожье: Полиграф, 2003. – 218 с.
97. Синергетика и проблемы теории управления / Под ред. проф. А. А. Колесникова. – М.: Физматлит, 2004. – 504 с.

98. Синергетика и психология: Тексты: Выпуск 3: Когнитивные процессы / Под ред. В. И. Аршинова, И. Н. Трофимовой, В. М. Шендяпина. – М.: Когито-Центр, 2004. – 416 с.
99. Синергетическая парадигма. Когнитивно-коммуникативные стратегии современного научного познания. – М.: Прогресс-Традиция, 2004. – 560 с.
100. Синергетическая парадигма. Нелинейное мышление в науке и искусстве. – М.: Прогресс-Традиция, 2002. – 496 с.
101. Синергетическая парадигма. Человек и общество в условиях нестабильности. – М.: Прогресс-Традиция, 2003. – 584 с.
102. *Смоленцев Н. К.* Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 304 с.
103. *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 320 с.
104. *Тарасевич Ю. Ю.* Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс : учеб. пособ. – Изд. 2-е, испр. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 144 с.
105. *Тихомиров Н. П., Райцин В. Я., Гаврилец Ю. Н., Спиридонов Ю. Д.* Моделирование социальных процессов. – М: Изд-во РЭА, 1993.
106. *Томпсон Дж. М. Т.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике / Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 254 с.
107. *Трубецков Д. И.* Введение в синергетику. Колебания и волны / Предисл. Ю. А. Данилова, Г. Г. Малинецкого; послесл. Г. Г. Малинецкого. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 224 с.
108. *Трубецков Д. И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры / Предисл. Г. Г. Малинецкого. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 240 с.
109. *Уэстид С.* Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии : учеб. пособ. – М. : Изд. Триумф, 2003. – 320 с.
110. *Федер Е.* Фракталы / Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
111. *Федосин С. П.* Основы синкретики. Философия носителей. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 464 с.
112. *Форрестер Д.* Мировая динамика / Пер. с англ. / Д. Форрестер. – М.: ООО «Издательство АСТ»; Terra Fantastica, 2003. – 379 с.
113. *Хайтун С. Д.* Феномен человека на фоне универсальной эволюции. – М.: КомКнига, 2005. – 536 с.
114. *Хайтун С.Д.* От эргодической гипотезы к фрактальной картине мира. – М.: КомКнига, 2007. – 256 с.
115. *Хайтун С.Д.* Социум против человека: Законы социальной эволюции. – М.: КомКнига, 2005. – 336 с.

116. *Хакен Г.* Принципы работы головного мозга: Синергетический подход к активности мозга, поведению и когнитивной деятельности. – М.: ПЕР СЭ, 2001. – 351 с.
117. *Хакен Г.* Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам / Пер. с англ.; предисл. Ю. Л. Климонтовича. – Изд. 2-е, доп. – М.: КомКнига, 2005. – 248 с.
118. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1985. – 424 с.
119. *Хачатрян С. Р., Пинегина М. В., Буянов В. П.* Методы и модели решения экономических задач : учеб. пособ. / С. Р. Хачатрян, М. В. Пинегина, В. П. Буянов. – М: Издательство «Экзамен», 2005. – 384 с.
120. *Цисарь И. Ф., Нейман В. Г.* Компьютерное моделирование экономики. – М.: Диалог-МИФИ, 2002. – 304 с.
121. *Чернавский Д. С.* Синергетика и информация (динамическая теория информации) / Послесл. Г. Г. Малинецкого. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 288 с.
122. *Черных И. В.* Simulink: инструмент моделирования динамических систем. – М.: Финансы, 2003. – 250 с.
123. *Шамис А. Л.* Поведение, восприятие, мышление: проблемы создания искусственного интеллекта. – М.: Эдиториал УРСС, 2005. – 224 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ (якісний аналіз)

Зміст

1. Нелінійні динамічні системи.
2. Діаграма біфуркації.
3. Чутливість до початкових умов.
4. Ознаки хаосу.
5. Двовимірні та тривимірні системи.
6. Фрактали і фрактальні розмірності.
7. Нелінійний статистичний апарат.
8. Складність.

1. Нелінійні динамічні системи

Мо
дель
зроста
ння:

$$x_{new} = rx_o$$

або

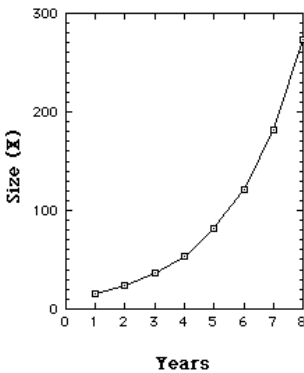
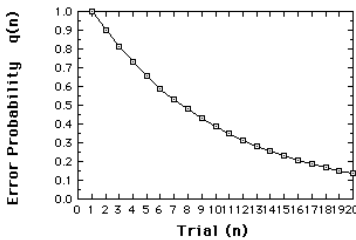
$$x_{n+1} = rx_n$$

Не
хай r
буде
більш
е за
одини
цю.

Як
що r
більш
е

Нестійкість

одини Сстійкість



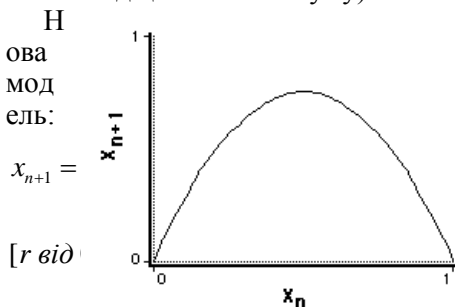
ці, то x зростає з послідовними ітераціями. Якщо r менше одиниці, то x зменшується.

Слід зазначити, що поки що ми маємо лінійну модель, яка дає необмежене зростання.

Обмежена модель зростання – логістичне відображення

Логістичне відображення не допускає необмеженого зростання, стримуючи зростання після досягнення високого рівня. Останнє відбувається за рахунок додаткового члена $[1 - x_n]$.

Міра зростання (x) також масштабується так, що максимальне значення, якого може досягти x , перетвориться в 1 (так, якщо максимальна кількість складає, наприклад, 25 мільйонів, то x виражається як частка від цього максимуму).



Ч
лен
[$1 - x_n$]

Нестійкість
Стійкість

~ ~ ~

служить для уповільнення зростання, оскільки при наближенні x до 1 $[1 - x_n]$ наближається до 0.

Будуючи графік x_{n+1} щодо x_n , ми отримуємо нелінійне відношення.

Модель обмеженого зростання (модель Ферхюльста):

x_{n+1} щодо x_n , $r = 3$.

Для того щоб побачити поведінку цієї функції, необхідно її ітерувати.

Припустимо, $r = 3$, а $x_1 = 1$.

$$x_2 = rx_1[1 - x_1] = 3(1)(.9) = .27$$

$$x_3 = rx_2[1 - x_2] = 3(.27)(.73) = .591$$

$$x_4 = rx_3[1 - x_3] = 3(.591)(.409) = .725$$

Виявляється, що поведінка логістичного відображення дуже різниться залежно від управляючого параметра r . Щоб перевірити це, дослідимо часові ряди, отримані за різних значень r , починаючи з 0 і закінчуючи для $r = 4$. Ми побачимо дуже різні результати, які засвідчують і представляють основні характеристики хаотичної системи.

При r менше 1 маємо таку поведінку логічного відображення (див. рис. А.4):

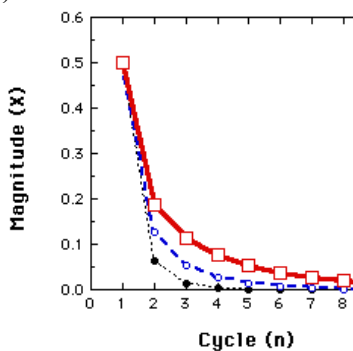
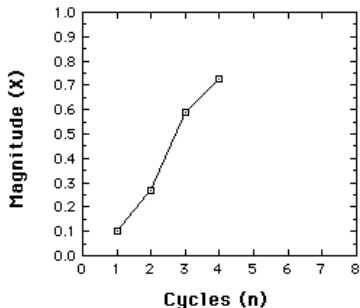


Рис. А.4. Поведінка логістичного відображення для $r = .25, .50$ і $.75$ (в усіх випадках $x_1 = .5$)

Така ж картина очікується за будь-



Нестійкість

Стійкість

Стійкість

Рис. А.3. логічного $r = 3$, отриманн

Рис. А.2. зростання відображе
Рис. А.1. зростання

б) Створіть групу мітку, фігурою

а) Створіть

1. Нарисуйте відображатим

г) Вкажіть, відноситиме

в) Вкажіть, повернути

б) Вкажіть повертається

а) Назвіть

г) Вкажіть, чи процедурну

в) Виберіть

якого початкового значення. Поки r менше 1, x наближається до 0. Це ілюструє одноточковий аттрактор.

При r від 1 до 3 маємо графік, зображений на рис. А.5.

Тепер, незалежно від початкового значення, ми маємо ненульові одноточкові аттрактори.

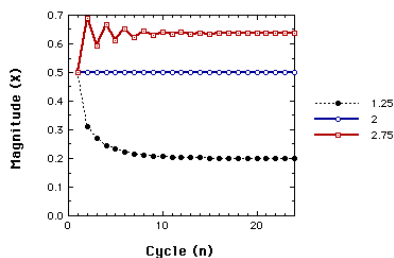


Рис. А.5. Поведінка логістичного відображення для $r = 1.25, 2.00$ і 2.75 (в усіх випадках $x_1 = .5$)

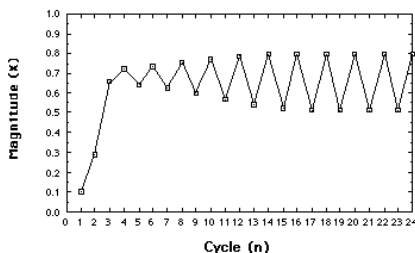


Рис. А.6. Поведінка логістичного відображення для $r = 3.2$

При r більше 3 картина виглядає так (див. рис. А.6).

Коли значення дещо перевищує $r = 3$, система стабілізується на чергуванні між двома точками. Це двоточковий аттрактор.

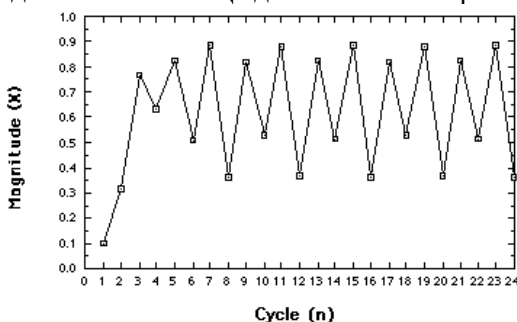


Рис. А.7. Поведінка логічного відображення для $r = 3.54$. Чотирьохточковий аттрактор

Інший приклад біфуркації відображено на рис. А.8. Концепція: N-точковий аттрактор.

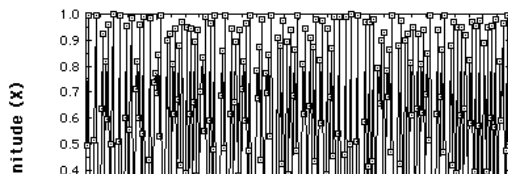


Рис. А.8. Хаотична поведінка логічного відображення при $r = 3.99$

Отже, що таке атрактор? Це те, до чого «підлаштовується» система. Дуже важлива концепція нелінійної динаміки полягає в тому, що система, врешті-решт, стабілізується. Але те, до чого вона стабілізується – її атрактор – не обов'язково повинен бути стабільним, він може бути при цьому дуже дивним.

2. Діаграма біфуркації

Що таке біфуркація? Біфуркація – це подвоєння періоду, перехід від N -точкового аттрактора до $2N$ -точкового аттрактора, який відбувається при зміні параметра управління.

Діаграма біфуркації – це візуальне зображення послідовності подвоєнь періоду, що відбуваються при збільшенні r . На рис. А.9 показано діаграму біфуркації логістичного відображення r на осі X . Для кожного значення r системі спочатку дозволяють встановитись, а потім наносяться послідовні значення x для кількох сотень ітерацій.

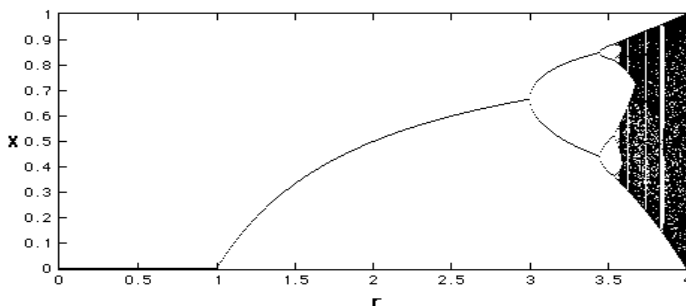


Рис. А.9. Діаграма біфуркації для r від 0 до 4

Ми бачимо, що для r менше 1 усі точки побудовані на 0. Нуль – це одноточковий атрактор для r менше 1. Для значень r від 1 до 3 ми все ще маємо одноточкові атрактори, але значення x , що «притягується», зростає зі збільшенням r , принаймні до $r=3$. Біфуркації відбуваються при $r=3$, $r=3.45$, 3.54 , 3.564 , 3.569 (приблизно) і т. д., до трохи більше за 3.57 , де система стає хаотичною.

Проте система не є хаотичною для всіх значень r , більших ніж 3.57 .

Дещо збільшимо масштаб.

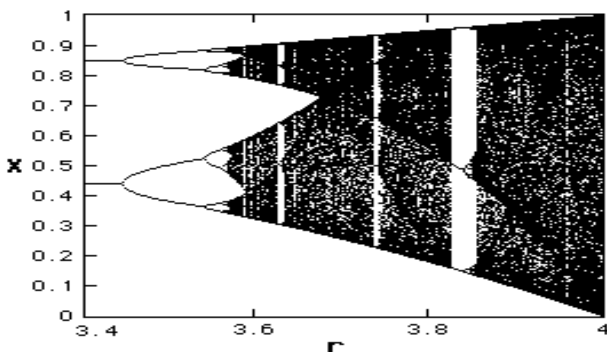


Рис. А.10. Діаграма біфуркації r від 3.4 до 4

Зверніть увагу, що для декількох значень r , більших ніж 3.57 , відзначається невелика кількість значень x . Ці області утворюють «білий простір» на діаграмі. При уважному розгляді $r=3.83$ Ви побачите трьохточковий атрактор.

Фактично, між 3.57 і 4 є багатократне чергування хаосу і порядку. Незначна зміна r може зробити стійку систему хаотичною, і навпаки.

3. Чутливість до початкових умов

У хаотичній області виникає інша важлива властивість. Щоб розглянути цю властивість, встановимо $r=3.99$ і почнемо з $x_1=.3$. На графіку нижче (рис. А.11) показано часовий ряд для 48-ми ітерацій логічного відображення.

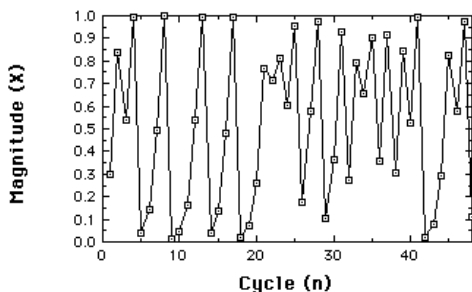


Рис. А.11. Часовий ряд для логічного відображення
 $r = 3.99$, $x_1 = .3$, 48 ітерацій

Тепер припустимо, що ми трохи змінимо початкову точку. На рис. А.12 порівнюється часовий ряд для $x_1 = .3$ (безперервна лінія) і $x_1 = .301$ (пунктирна лінія).

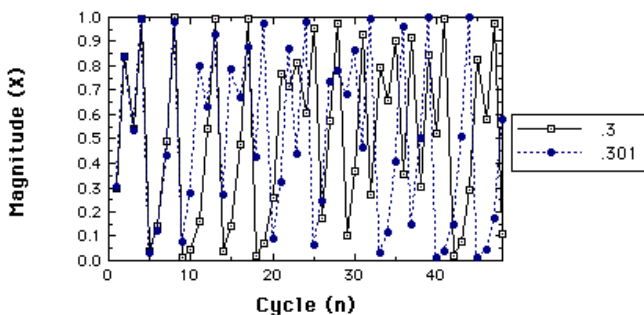


Рис. А.12. Два часові ряди для $r = 3.99$; $x_1 = .3$
 порівнюється з $x_1 = .301$

Два часові ряди майже співпадають упродовж приблизно 10-ти ітерацій. Але після цього вони помітно розходяться.

Розглянемо ближчі вихідні умови. На рис. А.13 показано порівняльний результат для початкових точок .3 і .3000001...

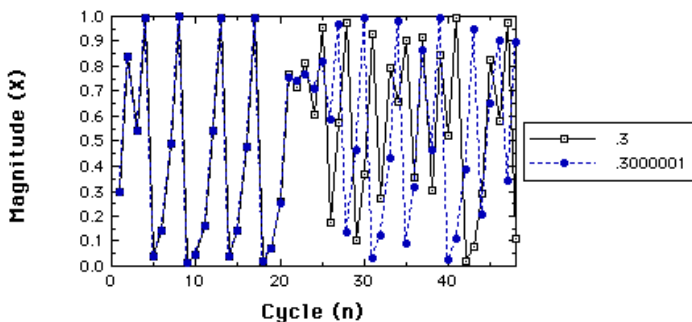


Рис. А.13. Два часові ряди при $r = 3.99$; $x_1 = .3$
порівнюється з $x_1 = .3000001$

Цього разу точки знаходяться поруч значно довше, але після 24-х ітерацій вони розходяться. Щоб побачити, наскільки незалежними вони стають, на рис. А.14 наведено графіки розсіювання для двох часових рядів до і після 24-х ітерацій.

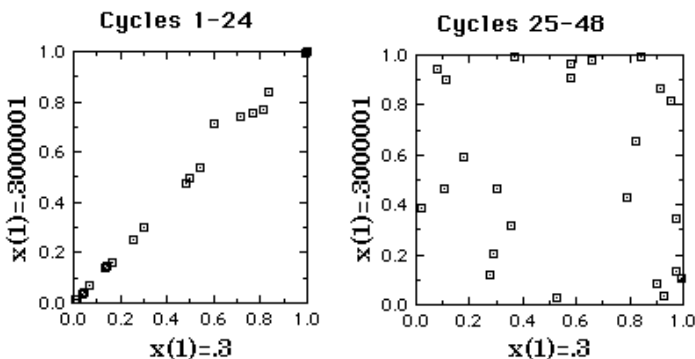


Рис. А.14. Графіки розсіювання часових рядів з
початком у .3 і з початком у .3000001: перші 24 цикли – ліворуч,
наступні 24 цикли – праворуч

Кореляція після 24-х ітерацій (праворуч), по суті, дорівнює нулю. Цим ми проілюстрували одну з ознак хаосу. Хаотична система – це система, для якої *відстань між двома траєкторіями з сусідніх точок у її просторі станів з часом збільшується*. Величина відхилення в хаотичній системі збільшується експоненційно.

Це означає, що хаотична система, навіть та, що визначається простим правилом, у принципі є непередбачуваною. Вона непередбачувана «у принципі» тому, що для того щоб передбачити її поведінку в майбутньому, ми маємо точно знати її поточне значення. У наведеному прикладі незначне відхилення, в шостому десятковому розряді, призвело до помилки прогнозу після 24-х ітерацій. А шостий десятковий розряд значно перевищує точність вимірювань, якої ми зазвичай досягаємо у природних біологічних системах.

4. Ознаки хаосу

Ми починаємо уточнювати наше визначення хаотичної системи. Перш за все, це *детермінована* система. Якщо простежити за пове-

дінкою, яка, ймовірно, є результатом хаотичної системи, то можна помітити, що:

- цю поведінку важко відрізнити від випадкової;
- вона є чутливою до початкових умов.

Запам'ятайте: жодна з цих ознак, взята окремо, *не достатня* для визначення хаосу.

5. Двовимірні та тривимірні системи

Спочатку розмежуємо змінні (розмірність) і параметри.

Розглянемо знову логічне відображення

$$x_{n+1} = rx_n[1 - x_n].$$

Перемноживши праву сторону, маємо $x_{n+1} = rx_n - rx_n^2$. Замінімо дві r на різні параметри a і b , $x_{n+1} = ax_n - bx_n^2$.

Тепер окремі параметри, a і b , управляють зростанням і придушенням, але все ще є тільки одна змінна – x .

У випадку, коли є система з двома або більше змінними, тоді:

- її поточний стан – це поточні значення її змінних;
- система розглядається як точка у фазовому просторі, а отже, ми маємо справу з траєкторією або орбітою в часі.

Модель «хижак – жертва»

Це – двовимірна динамічна система, в якій дві змінні зростають, але одна з них зростає за рахунок іншої. Число хижаків представляє y , число жертв – x .

Побудуємо фазовий простір системи, який є двовимірним графіком можливих станів системи.

A = дуже багато хижаків.

B = дуже мало жертв.

C = мало хижаків і жертв; число жертв може зростати.

D = мало хижаків, достатньо жертв.

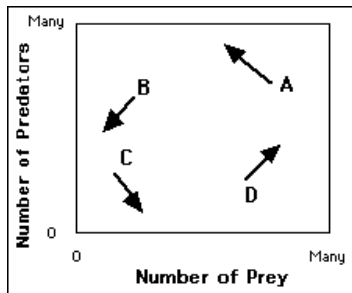


Рис. А.15. Фазовий простір системи «хижак – жертва»

На рис. А.15 показано чотири стани. У точці А є велика кількість хижаків і велика кількість жертв. Проведена від точки А стрілка, або вектор, показує, як би змінилася система з цієї точки. Багато жертв було б з'їдено хижаками. Тому стрілка від точки А вказує напрям від меншого значення x до більшого значення y .

У точці В багато хижаків, але мало жертв. Вектор показує зменшення для обох: для хижаків – бо дуже мало жертв, і для жертв – бо кількість хижаків залишається для них неоптимальною. Оскільки в точці С невелика кількість хижаків, кількість жертв може зростати, але жертв усе ще дуже мало, щоб підтримувати популяцію хижаків. І нарешті, в точці D наявність великого числа жертв є сприятливою для хижаків, але кількість хижаків ще дуже мала для стримування зростання жертв, тому їхня чисельність збільшується. Повну траєкторію (дещо ідеалізовану) показано нижче (див. рис. А.16).

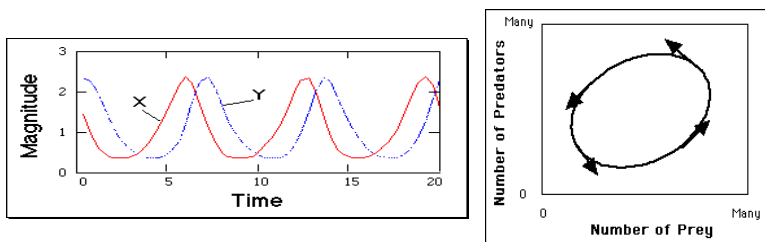


Рис. А.16. Фазовий простір системи «хижак – жертва»

Атрактор, який утворює подібний цикл (петлю), називається граничним циклом. Проте в цьому випадку система не починається зовні циклу, а потрапляє в нього як кінцевий атрактор. У цій системі будь-який початковий стан вже знаходиться в кінцевому циклі. Це ілюструє рис. А.17, де показано цикли для чотирьох різних початкових станів.

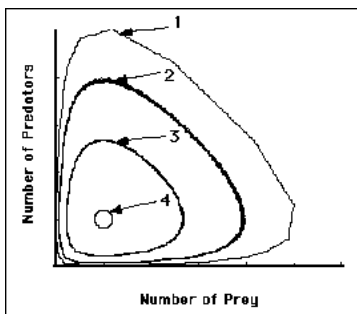


Рис. А.17. Фазова картина системи «хижак – жертва», яка показує вплив початкового стану

У початкових точках 1–4 приблизно однакове число жертв, але різна кількість хижаків. Давайте розглянемо цю систему в часі, тобто як два часові ряди. На рисунку видно, як коливаються, з неспівпаданням фази, ці дві змінні.

Безперервні функції та диференціальні рівняння

Зміни *дискретних* змінних виражаються різницевими рівняннями, такими як логістичне відображення.

Зміни *безперервних* змінних виражаються диференціальними рівняннями. Наприклад, система «хижак – жертва» зазвичай відображається як система з двох диференціальних рівнянь:

$$dx / dt = (a - b)x;$$

$$dy / dt = (cx - d)y.$$

Типи двовимірних взаємодій

За категоризацією Ван Гріта (1991), можливі й інші види двовимірних взаємодій, а саме:

- взаємопідтримуючі – чим більшою стає одна, тим швидше зростає інша;
- взаємоконкуруючі – кожна негативно впливає на іншу;
- підтримуючо-конкуруючі – як у системі «хижак – жертва».

Система гнучкої колони

Абрахам, Абрахам і Шоу (1990) використовували систему колони, що згинається, для обговорення психологічних явищ, яким властиві коливання (наприклад, зміна настроїв, стану свідомості, зміна відношення). Моделлю є одна гнучка колона, яка підтримує масу в горизонтально обмеженому просторі. Якщо маса об'єкта достатньо велика, колона «згинатиметься», що описують два розміри: x представляє бічний зсув колони, а y – швидкість її руху.

На рис. А.18 показано дві ситуації, різні за масою.

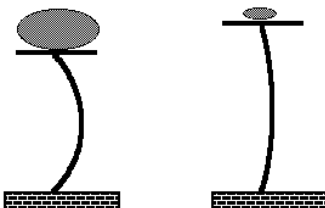


Рис. А.18. Модель колони, що згинається
(Абрахам, Абрахам і Шоу, 1990)

Маса на рисунку ліворуч більша за масу праворуч. Якою є динаміка? Колона еластична, тому первинний вигин супроводжується пружним поверненням і коливаннями у вертикальному напрямі. Якщо є опір (тертя), коливання у вертикальному напрямі зменшуватимуться, і маса повернеться до стану спокою. Нижче наведено відповідні рівняння:

$$dx / dt = y ,$$

$$dy / dt = (1 - m)(ax^3 + b + cy) .$$

Параметри m і c представляють масу і тертя, відповідно. Якщо існує тертя ($c > 0$) і маса мала, колона врешті-решт повертається у вертикальне положення ($x = 0, y = 0$), яке показано на рис. А.19 для двох траєкторій.

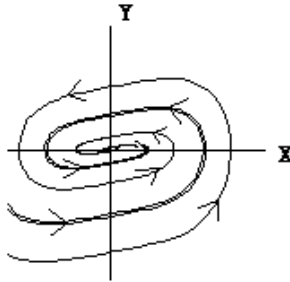


Рис. А.19. Фазовий портрет моделі колони, що згинається

За більшої маси колона повертається у стан спокою в одному з двох положень (двоточковий атрактор), які показані з двома траєкторіями на рис. А.20.

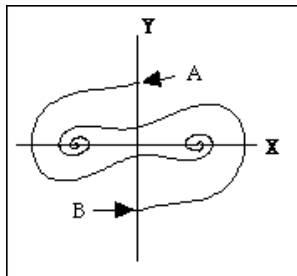


Рис. А.20. Фазовий портрет моделі гнучкої колони

За умови початку в точці А система повертається у стан спокою, будучи злегка деформованою вправо, за початку в точці В – вліво. Тепер ми можемо ввести ще одне основне поняття.

Басейни тяжіння. З достатньо великою масою колона, що згинається, може застигнути в одному з двох станів: зігнута вліво або вправо. Що визначає той чи інший результат? Для даного набору значень параметрів результат повністю визначається початковим положенням, вихідними значеннями x і y . Фактично, кожна точка у фазовому просторі може бути класифікована відповідно до її атрактора. Набір точок, який відповідає даному атрактору, називається басейном тяжіння цього атрактора. Для наведеного тут двоточкового атрактора існує два басейни тяжіння. Вони показані на рис. А.21, де фазовий простір поділений відповідно до атрактора.

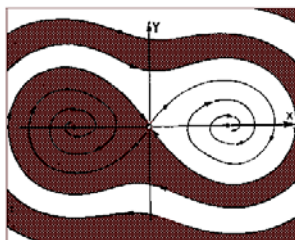


Рис. А.21. Басейн тяжіння двоточкового атрактора

На рисунку басейн тяжіння для невід’ємного атрактора зафарбований (праворуч), а басейн тяжіння для іншого атрактора – не зафарбований. Для опису межі між басейнами тяжіння використовується термін «сепаратриса» (separatrix).

Тривимірні динамічні системи. Система Лоренца

Модель атмосферної динаміки Лоренца – це класика літератури про хаос. Модель добре ілюструє тривимірну систему:

$$\begin{aligned} dx / dt &= a(y - x), \\ dy / dt &= x(b - z) - y, \\ dz / dt &= xy - cz. \end{aligned}$$

Є три змінні, що відображають перепад температури і рух повітря, але подробиці для нас неістотні, – нам цікаві траєкторії системи в її фазовому просторі для $a=10$, $b=28$, $c=8/3$. Побудуємо графік частини траєкторії, починаючи з $(5,5,5)$ (див. рис. А.22).

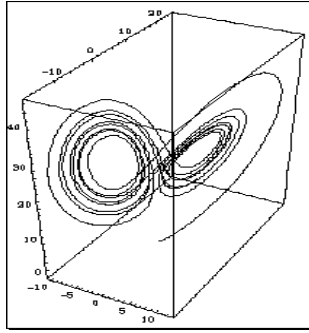


Рис. А.22. Система Лоренца (показано тільки частину однієї траєкторії)

Рисунок передбачає, що траєкторія може перетинатися з попередніми проходами, однак фактично цього ніколи не відбувається.

Хоча тут цього й не показано, система Лоренца виявляє чутливість до вихідних умов. Це – хаос, перший дивний атрактор, який і став образом для хаосу.

Граничні точки (точки накопичення) у фазовому просторі

Є три види граничних точок:

- атрактори – точки, в яких стабілізується система;
- репелери – точки, від яких система віддаляється;
- сідлові точки: для одних областей – атрактор, для інших – репелер.

Приклади:

- атрактори (більшість з них уже було розглянуто);
- репелери – значення 0 у логістичному відображенні;
- сідлові точки – точка (0,0) для моделі гнучкої колонії.

6. Фрактали і фрактальні розмірності

Б. Мандельброт і природа

«Хмари не є сферами, гори – конусами, берегові лінії не мають форми кола, кора не гладка і блискавка не поширюється по прямій лінії» (Мандельброт, 1983).

Поняття розмірності

Досі ми використовували термін «простір» у двох значеннях:

- три виміри евклідового простору ($D=1,2,3$);
- кількість змінних у динамічній системі.

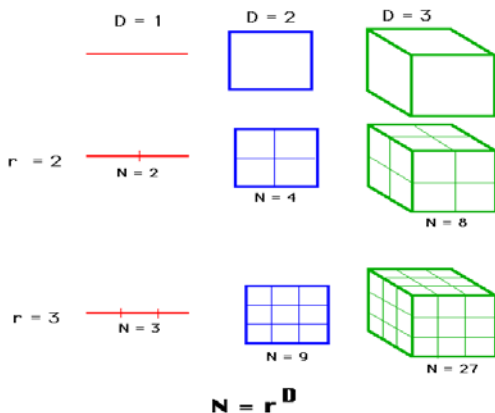
Фрактали, які є неправильними геометричними об'єктами, вимага-

ють третього визначення.

Розмірність Хаусдорфа

Якщо лінійний розмір об'єкта, розташованого в евклідовому просторі D , зменшити в $1/r$ разів у кожному просторовому напрямі, показники об'єкта (довжина, площа або об'єм) збільшаться в $N = r^D$ разів порівняно з початковими.

Це демонструє рис. А.23.



А.23. Розмірність Хаусдорфа

Розглянемо $N = r^D$, прологарифмуємо обидві сторони і отримаємо $\log(N) = D \log(r)$. Якщо розв'яжемо для D , то $D = \log(N) / \log(r)$. При здійсненні дослідження таким чином D не обов'язково має бути цілим числом, як в евклідовій геометрії. Воно може бути дробом, як у фрактальній геометрії. Це узагальнене трактування простору названо на честь німецького математика Фелікса Хаусдорфа. Воно виявилося корисним для опису природних об'єктів і обчислення траєкторій динамічних систем.

Довжина берегової лінії. Мандельброт почав свій трактат про фрактальну геометрію з обговорення питання: якою є довжина берегової лінії Британії? Берегова лінія має неправильну форму, тому вимірювання за допомогою прямої лінійки, як показано на рис. А.24, дає помилку розрахунку. Розрахункова довжина берегової лінії, L , дорівнює довжині лінійки s , помноженій на N – кількість таких лінійок, яка необхідна для покриття вимірюваного об'єкта. На рис. А.24 внизу зміряємо частину берегової лінії двічі: лінійка, яка використовується праворуч, удвічі довша за лінійку, що використовується ліворуч.

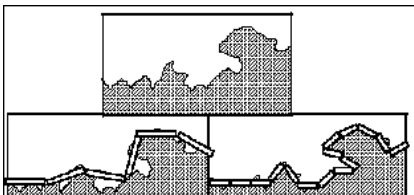


Рис. А.24. Вимірювання довжини берегової лінії з використанням лінійок різних довжин

Обчислене значення довжини праворуч вийшло більшим. Якщо масштаб ліворуч дорівнює 1, то ми одержимо шість одиниць лінійок, але зменшення довжини лінійки вдвічі дає результат 15 лінійок ($L = 7.5$), а не 12 ($L = 6$). Якщо ми знову вдвічі зменшимо масштаб лінійки, буде отримано аналогічний результат – більш довгу оцінку L . Загалом, при зменшенні лінійки до нескінченно малого розміру довжина стає нескінченно великою. Поняття довжини починає втрачати сенс.

Ефект Річардсона

Льюїс Фрай Річардсон першим звернув увагу на зв'язок між довжиною берегової прикордонної лінії та масштабом. Як показано на рис. А.25, на графіку з логарифмічним масштабом на обох осях відношення між оціненою (обчисленою) довжиною і довжиною масштабу є лінійним.

Манделброт додав до нахилу елемент $(1 - D)$, і таким чином функціями стали: $\log[L(s)] = (1 - D)\log(s) + b$, де D – фрактальна розмірність.

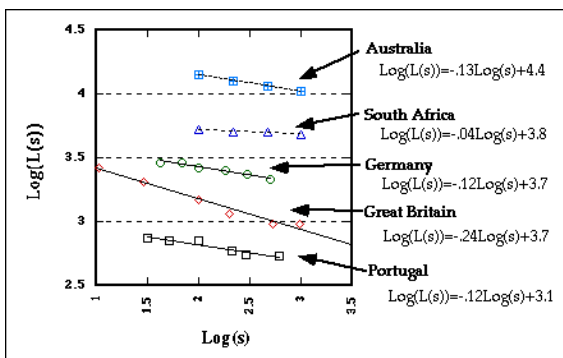


Рис. А.25. Ефект Річардсона

Для Великобританії $(1 - D)$ складає приблизно -0.24 , $D = 1 - (-0.24) = 1.24$, що є дробовою величиною. Берегова лінія Південної Африки є дуже гладкою, практично дугою кола. Нахил, оцінений вище, наближається до 0, а $D = 1 - 0 = 1$. Це логічно, оскільки берегова лінія дуже схожа на звичайний евклідовий об'єкт, лінію, розмірність якої дорівнює 1. Загалом, чим нерівнішою є лінія, тим крутіший нахил, тим більша фрактальна розмірність.

Приклади геометричних об'єктів з нецілою розмірністю

Крива Коха

Почнемо з прямої лінії завдовжки 1 і назвемо її *ініціатором*. Потім видалимо середню третину лінії та замінімо її двома лініями, які мають таку ж довжину, як і лінії, що залишилися з обох країв ($1/3$). Нова форма називається *генератором*, оскільки вона встановлює правило, що використовується для отримання нової форми.

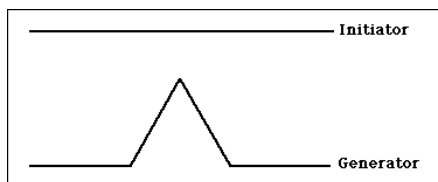
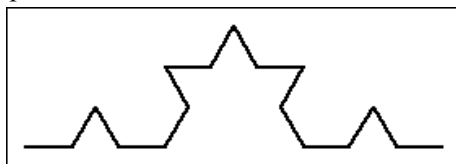
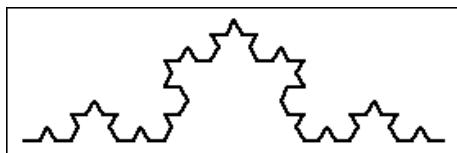


Рис. А.26. Ініціатор і генератор для побудови Кривої Коха

Згідно з правилом, замінімо кожен лінійний сегмент чотирма, довжина кожної з яких дорівнює третині початкової.



А.27. Рівень 2 побудови Кривої Коха



А.28. Рівень 3 побудови Кривої Коха

Ця операція повторюється багато разів ... нескінченну кількість разів.

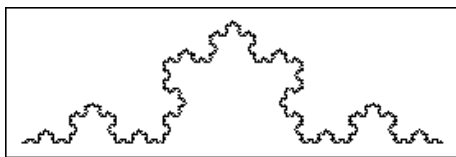


Рис. А.29. Крива Коха

Яка довжина Кривої Коха?

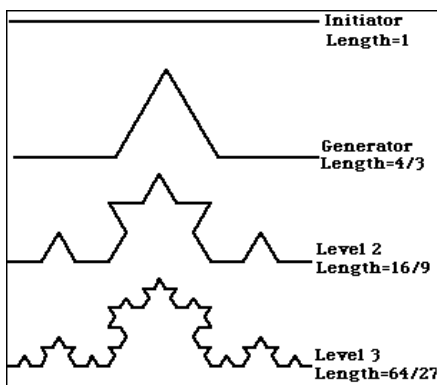


Рис. А.30. Рівні Кривої Коха

Довжина кривої збільшується з кожною ітерацією. Вона має нескінченну довжину. Але якщо розглядати Криву Коха так само, як розглядалася берегова лінія, то з'ясується, що її фрактальна розмірність дорівнює 1.26. Той же результат отримуємо з $D = \log(N)/\log(r)$: $D = \log(4)/\log(3) = 1.26$.

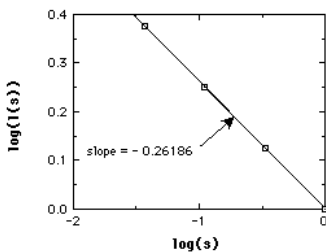


Рис. А.31. Відношення між $\log(L(s))$ і $\log(s)$ для Кривої Коха

Пил (множина) Кантора

Ітераційне видалення середньої третини прямої початкової лінії здійснюється так само, як і в Кривій Коха, але цього разу без заміни розриву, що утворився (рис. А.32, А.33):

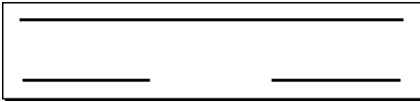


Рис. А.32. Ініціатор і генератор для побудови Пилу Кантора



Рис. А.33. Рівні 2, 3 і 4 побудови Пилу Кантора

Обчислення розмірності $D = \log(N)/\log(r)$: $D = \log(2)/\log(3) = .63$. Ми маємо об'єкт із розмірністю менше 1, між точкою (розмірність якої дорівнює 0) і лінією (розмірність якої – 1).

Трикутник Серпінського

З'єднаємо середні точки трьох сторін рівностороннього трикутника і видалимо отриманий внутрішній трикутник.

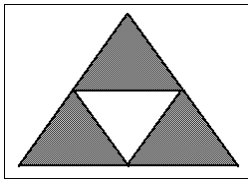


Рис. А.34. Побудова Трикутника Серпінського

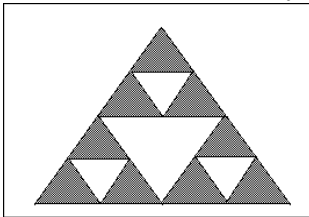


Рис. А.35. Виконання ітерації першого кроку

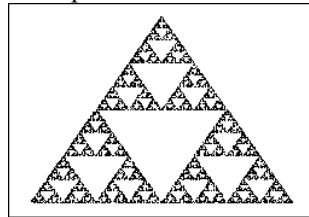


Рис. А.36. Побудова Трикутника Серпінського

Обчислення розмірності $D = \log(N)/\log(r)$: $D = \log(3)/\log(2) = 1.585$. Цього разу отримано значення між 1 і 2.

Розмірність дивного атрактора

1. Траєкторія дивного атрактора не може перетинати себе.
2. Близькі траєкторії розходяться експоненційно.
3. Атрактор обмежений фазовим простором.
4. Траєкторія не заповнює фазовий простір.

Дивний аттрактор – це фрактал, і його фрактальна розмірність менша за розмірність фазового простору.

Самоподібність

Важлива (визначальна) властивість фрактала – самоподібність, яка належить до нескінченного вкладення структури за будь-якого збільшення.

Прикладом є галуження дерева. Кожна гілка і всі подальші розгалуження є різними, але всі вони мають якісну схожість з деревом у цілому.

Строга самоподібність є характеристикою форми, якщо підструктура має однотипну схожість з верхньою структурою.

Множина Мандельброта

Ця множина обчислюється ітерацією:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

де z – комплексне число ($z_0 = 0$).

За різних значень c траєкторії або залишаються біля первинної точки, або «мігрують».

Множина Мандельброта – ця множина тих точок, які не «мігрують».

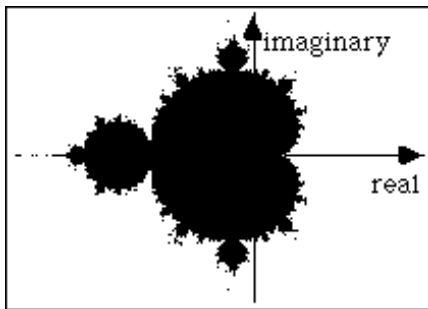


Рис. А.32. Множина Мандельброта (точки множини забарвлені чорним)

«Мігруючі» точки в цій множині відрізняються за швидкістю міграції, що графічно зображається різними кольорами або висотою

(рис. А.33).

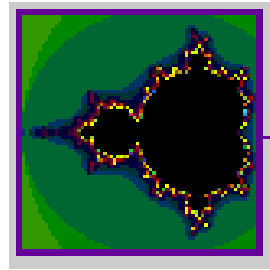
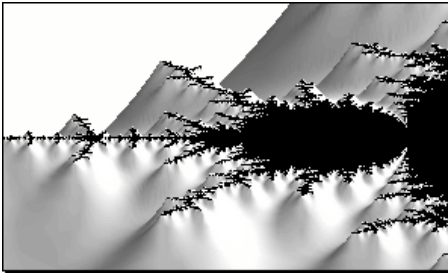


Рис. А.33. Фрактали, створені з використанням комп'ютерної програми «Beauty Fractal Lab» Томаса Еберхардта

Отже, фрактал – це неправильний геометричний об'єкт з нескінченним вкладенням структури за всіх масштабів.

Фрактали нас цікавлять з таких причин:

- природні об'єкти є фракталами;
- хаотичні траєкторії (дивні атрактори) є фракталами;
- оцінка фрактальних властивостей спостережуваного часового ряду є інформативною.

7. Нелінійний статистичний апарат

Щоб спробувати оцінити дані часових рядів, було введено декілька статистичних методів. Вони мають на меті: 1) спробувати відрізнити хаотичний часовий ряд від випадкових даних («шум»), 2) визначити ймовірність того, що дані є результатом детермінованої системи, і 3) оцінити розмірність даних.

Введемо деякі основи концепцій цих методів.

Навіщо потрібно будувати цей графік?

Щоб оцінити структуру вимірюваної траєкторії.

Для ілюстрації почнемо з часового ряду, отриманого випадковою вибіркою в інтервалі $(0,1)$. Побудуємо графік x_n відносно $x_{n+1}x_n$ (див. рис. А.34).

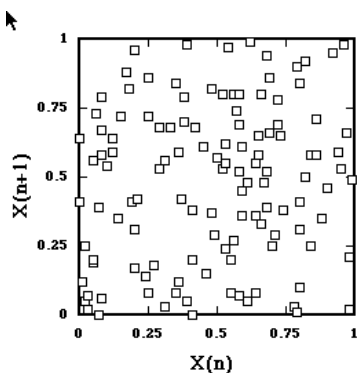


Рис. А.34. Зворотне відображення часового ряду за випадкового рівномірного розподілу

Як і очікувалося, точки розсіяні. Нижче, на рис. А.35, показано зворотне відображення іншого випадкового часового ряду. У цьому випадку вибірка здійснювалася з експоненційного розподілу (розподіл з невід’ємною асиметрією).

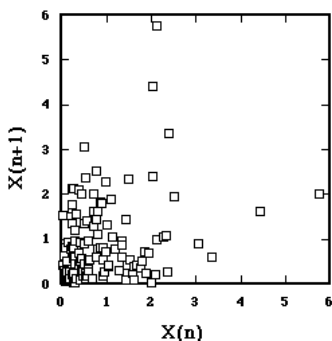


Рис. А.35. Зворотне відображення часового ряду за експоненційного розподілу

Тут точки не розсіяні повсюди. Що це означає? Нагадаємо, що ознакою хаосу є те, що зворотне відображення обмежене областю відображення.

Тепер розглянемо часовий ряд, що походить з логістичного відображення для хаотичної області, $r = 3.99$ (рис. А.36).

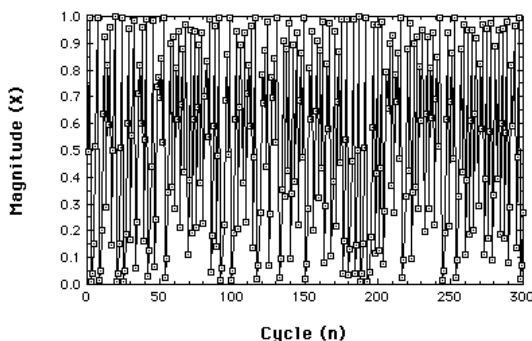


Рис. А.36. Невипадковий часовий ряд

Його зворотне відображення виглядає так (рис. А.37):

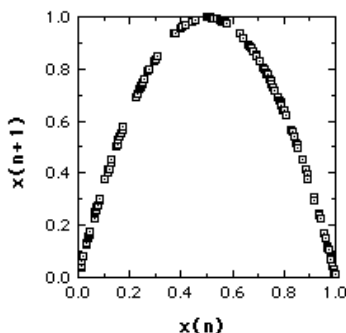


Рис. А.37. Зворотне відображення логістичного відображення, $r = 3.99$

Як засвідчує графік, структуру твірної функції повністю збережено.

Отже, зворотне відображення може бути дуже практичним – за умови, що дані взято з одновимірної системи. Якщо розмірність системи більше за 2, зворотне відображення має обмежену практичність.

Сучасний статистичний аналіз досліджує геометричну структуру отриманих часових рядів, вкладених з різними розмірностями.

Типи «шумів»

Аналіз Фур'є, зокрема ШПФ (Швидке перетворення Фур'є) – це випробуваний лінійний інструмент для дослідження часових рядів. ШПФ перетворює тимчасову область на частотну і досліджує ряди на періодичність. За допомогою ШПФ створюється спектральна функція,

ступінь якої кожна частота вносить у послідовність. Якщо ряд періодичний, то отримана спектральна функція показує пікову потужність у частоті збурення.

Складаючи графік логарифма потужності відносно логарифма частоти, слід пам'ятати, що:

- білий «шум» (і більшість хаотичних систем) мають нульовий нахил;
- коричневий «шум» має нахил, рівний -2;
- $1/f$ (рожевий) «шум» має нахил -1.

$1/f$ «шум» цікавий тим, що він повсюдно зустрічається в природі, – це вид часового фрактала. Якщо фракталу властива самоподібність у просторі, то $1/f$ «шуму» притаманна самоподібність у часі.

8. Складність

Тоді як дослідження хаосу є вивченням того, яким чином прості системи можуть генерувати складну поведінку, дослідження комплексності – це вивчення того, як складні системи можуть генерувати просту поведінку.

Складні системи – протяжні в просторі та / або часі нелінійні системи, що характеризуються вихідними колективними властивостями, притаманними системі в цілому і відмінними від власної поведінки її складових.

Приклади складних систем:

Клітинні автомати (Джон фон Нейман, С. Улам, і С. Вольфрам). Клітинний автомат – це решітка зі значеннями комірок 0-1 (N – загальна кількість комірок).

- Просте правило (щодо зміни стану комірок) застосовується до кожної комірки і, одночасно, ітерується в часі.
- Правило залежить від стану сусідніх комірок.

Гра «Життя». $N \times N \times N \dots \times N$ – матриця значень комірок (які можуть бути дійсними або уявними значеннями), яка змінює в часі:

1) стан «сусідніх» (або «сполучених») комірок, або якусь зовнішню умову;

2) якесь правило, що може бути загальним або локальним.

Ця «система» розвивається в часі.

Правила:

- $N_{\text{сусідів}} > 3 \rightarrow 0$ (перенаселення);
- $N_{\text{сусідів}} < 2 \rightarrow 0$ («самотність»);
- $N_{\text{сусідів}} = 2$ (збереження поточного стану);
- $N_{\text{сусідів}} = 3 \rightarrow 1$ (продовження життя або народження).

У цих систем є «атрактори», а саме:

- статичні стани – «нерухома точка»;
- періодичні стани – «граничні цикли»;
- аперіодичні стани («хаотичний», або «дивний атрактор»).

Генетичні алгоритми (Джон Холланд)

- Підхід: значення осередків Генетичного алгоритму – не елементи виду, а генотипи.
- Мета: система, яка вчиться.

Додаток Б

Автономні системи

Система диференціальних рівнянь називається автономною, якщо вона переходить у себе при довільних зміщеннях уздовж осі часу. Іншими словами, система називається автономною, якщо її права частина не залежить від часу: $y' = f(x)$.

Атрактор. Це множина точок або підпростір у фазовому просторі, до якого наближається траєкторія після згасання перехідних процесів. Класичними прикладами атракторів у динаміці можуть служити точки рівноваги або нерухомі точки відображень, граничні цикли або поверхні торів для квазіперіодичних рухів.

Приклад атрактора – атрактор Лоренца – зображено нижче (рис. Б.1).

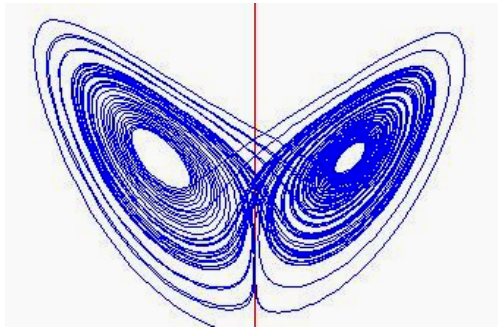


Рис. Б.1. Атрактор Лоренца

Біфуркація. Біфуркація – це зміна характеру руху динамічної системи на великому часовому інтервалі при зміні одного або декількох параметрів. Ті значення параметрів, за яких змінюються якісні або топологічні властивості руху, називаються критичними, або біфуркаційними значеннями. Наприклад, при стисненні стержня останній деформується, і один стан рівноваги, втративши стійкість, змінюється новими стійкими станами рівноваги.

В якості прикладу розглянемо розв'язок, що описує ідеальний осцилятор Дуффінга:

$$x'' + a*x + b*x*x*x = 0.$$

Спершу побудуємо залежність положення точок рівноваги від a . Зі зміною a від невід'ємних до від'ємних значень єдина точка рівноваги розпадається на три. Мовою динаміки: єдиний центр перетвориться на сідлову точку в центрі координат і два центри (рис. Б.2).

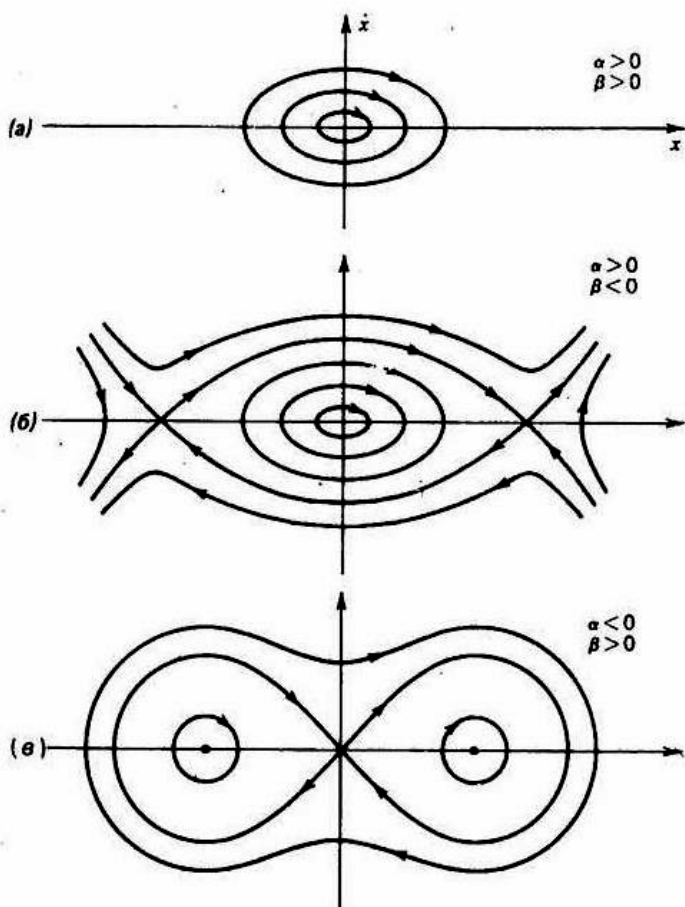


Рис. Б.2. Траєкторії осцилятора з нелінійною повертаючою силою (рівняння Дuffінга) на фазовій площині: a – випадок жорсткої пружини, $a, b > 0$; b – випадок м'якої пружини, $a > 0, b < 0$; c – потенціал з двома ямами, $a < 0, b > 0$

Біфуркація такого типу називається біфуркацією типу вил. Фізичний сенс цього явища зрозумілий з того, що силу $-(a \cdot x + b \cdot x^3)$ можна описати за допомогою потенційної енергії. Коли a стає від'ємним, потенціал з однією ямою змінюється потенціалом з двома ямами. При цьому відбувається якісна зміна динаміки системи, і тому $a = 0$ є критичним біфуркаційним значенням.

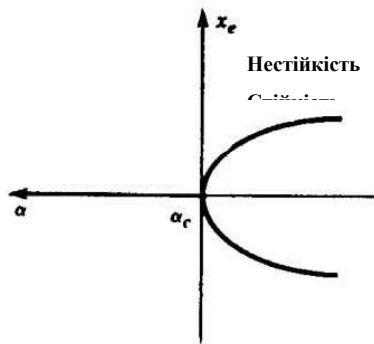


Рис. Б.3. Біфуркаційна діаграма: біфуркація типу вил, яка відповідає переходу зі стану з одним стійким станом рівноваги у стан з двома стійкими рівноважними точками

Інший приклад біфуркації – виникнення у фізичних системах граничних циклів. У цьому випадку зі зміною певного управляючого параметра пара комплексно-спряжених власних значень $s_1 = i * w + q$, $s_2 = -i * w + q$ переходить з лівої частини площини ($q < 0$, стійка спіраль) у праву частину ($q > 0$, нестійка спіраль) і виникає періодичний рух, який називається граничним циклом. Такий тип якісної зміни динаміки системи, показаний на рис. Б.4, називається біфуркацією Хопфа.

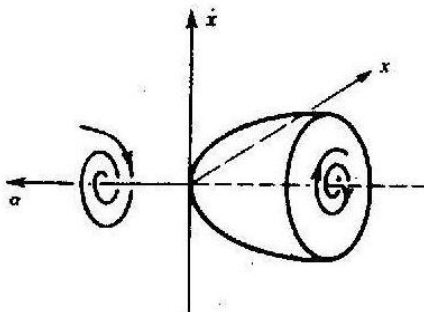


Рис. Б.4. Біфуркаційна діаграма: біфуркація Андронова-Хопфа, яка відповідає переходу від стійкої спіралі до коливань на граничному циклі

На рис. Б.5 представлено біфуркаційну діаграму логістичного відображення.

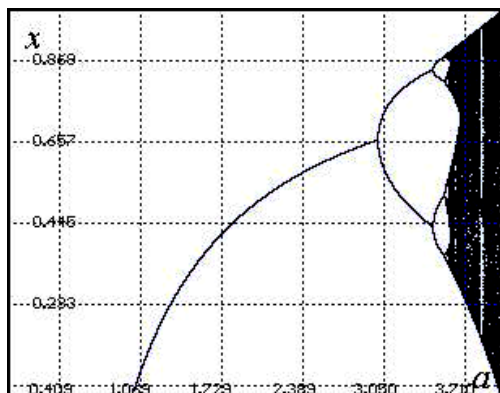


Рис. Б.4. Діаграма логістичного відображення

Інтегральні криві

Припустимо, що в кожній точці якоїсь області на площині вибрано пряму, яка проходить через цю точку. У такому випадку кажуть, що в області задано поле напрямів (або векторне поле). Аналогічним чином визначається поле напрямів у n -вимірному просторі.

Лінія, яка в кожній своїй точці дотична до напрямку поля, що існує в цій точці, називається інтегральною кривою поля напрямів.

Назва « інтегральні криві » пояснюється тим, що в деяких випадках ці криві можна знайти за допомогою операції інтегрування.

Інтеграл системи

Нехай у нас є система:

$$x' = P(x, y),$$

$$y' = Q(x, y).$$

Якщо $F(x, y)$ – функція, аналітична в усіх неособливих точках (може, зокрема, залишатись аналітичною також і в особливих точках) і така, що $(F'x) * (F'x) + (F'y) * (F'y) \succ 0$ (не дорівнює 0 тотожно), де $(F'x)$ і $(F'y)$ – похідні функції $F(x, y)$ за x і y відповідно, і має місце тотожна рівність $F'x(x, y) * P(x, y) + F'y(x, y) * Q(x, y) = 0$, то відношення називається загальним інтегралом системи.

Консервативна система

Найпростіший випадок консервативної системи – це гамільтонова система, тобто система, що має вигляд:

$$x' = dH / dy ,$$

$$y' = -dH / dx ,$$

де $H(x, y)$ – аналітична функція змінних x і y . Система явно має аналітичний інтеграл $H(x, y) = C$.

Консервативною системою ми називатимемо таку систему:

$$dx / dt = P(x, y) ,$$

$$dy / dt = Q(x, y) ,$$

визначену в певній області площини G або на всій площині, яка після множення правих частин на інтегруючий множник $M(x, y)$ – аналітичну функцію, що не звертається в нуль у всій області вищезгаданої системи, – і після зміни параметризації може бути приведена до гамільтонового вигляду:

$$dx / dt_1 = M(x, y) * P(x, y) = dH / dy ,$$

$$dy / dt_1 = M(x, y) * Q(x, y) = -dH / dx ,$$

$$dt_1 = dt / M(x, y) .$$

Непередбачуваний регулярний рух

По суті, це – множинні регулярні аттрактори, що припускають більш ніж один тип періодичного руху; тривалий рух чутливий до початкових умов.

Обмежений хаос

Хаотичні рухи, орбіти яких пролягають у фазовому просторі поблизу орбіт деяких періодичних або регулярних рухів; їхні спектри часто виявляють невелике або обмежене розширення певних частотних компонент.

Граничні цикли

Стійкі граничні цикли описують усталені періодичні коливання системи, що знаходиться в стаціонарних зовнішніх умовах. Коливання, описувані стійкими циклами, називаються *автоколиваннями* – на відміну від вимушених коливань, викликаних періодичними зовнішніми впливами, і від коливань типу вільних коливань маятника. Виникнення автоколивань саме по собі досить дивне, але вони зустрічаються, наприклад, у таких системах, як годинник, парова машина, електричний дзвінок, серце, радіопередавач, – робота кожного з цих

пристроїв описується граничним циклом у відповідному фазовому просторі.

Проте не слід вважати, що всі коливальні процеси описуються граничними циклами: у багатовимірному фазовому просторі можлива значно складніша поведінка фазових кривих. Прикладами можуть бути рух планет і їхніх супутників та їхні обертання навкруги своїх осей (неперіодичність цих рухів «відповідальна» за складність календаря і труднощі передобчислювання приливів), а також рух заряджених частинок у магнітних полях («відповідальний» за виникнення полярних сьайв). У системах з багатовимірним фазовим простором фазові криві навіть можуть замість циклу наблизитися до множини, на якій усі близькі траєкторії швидко розходяться одна від одної. Такі притягаючі множини нещодавно отримали назву дивних атракторів: вони пов'язані з явищами на зразок турбулентності та є причиною, приміром, неможливості здійснення довгострокового прогнозу погоди.

Перехідний хаос

Рух, який на скінченному часовому інтервалі виглядає як хаотичний, тобто траєкторія ніби рухається дивним атрактом, але потім виходить на періодичний або квазіперіодичний рух.

Хаос, що перемежовується

Періоди регулярного руху, що перемежовується з перехідними спалахами хаотичного руху; тривалість періодів регулярного руху непередбачувана.

Передбачуваний регулярний рух

Це періодичні коливання, квазіперіодичний рух, який нечутливий до змін параметрів і початкових даних.

Гранична точка

Точка M називається граничною точкою невід'ємної напівтраєкторії L^+ (або, відповідно, від'ємної напівтраєкторії L^-), якщо за будь-якого як завгодно малого $\epsilon > 0$ і будь-якого як завгодно великого $T > 0$ (будь-якого $T < 0$) у колі радіуса ϵ з центром у точці M лежить хоча б одна точка напівтраєкторії L^+ (L^-), що відповідає значенню $t > T$ (або, відповідно, $t < T$). Точка M називається граничною точкою цілої траєкторії L , якщо M є граничною точкою або для невід'ємної напівтраєкторії L^+ , або для від'ємної напівтраєкторії L^- . Гранична точка траєкторії L може як належати самій траєкторії L , так і не належати їй. Будь-який стан рівноваги є своєю єдиною граничною точкою. Всі точки замкнутої траєкторії, очевидно, також є її граничними точками.

Траєкторія, що наближається до стану рівноваги, має своєю єдиною граничною точкою цей стан рівноваги.

Показники Ляпунова

Хаос у динаміці означає чутливість динамічної еволюції до змін початкових умов. Якщо уявити собі набір початкових умов, що заповнює у фазовому просторі сферу радіусу E , то траєкторії хаотичного руху, які починаються в цій сфері, відобразять її на еліпсоїд, велика напіввісь якого зростає як $d = E \cdot \exp(L \cdot t)$, де постійна $L > 0$ – показник Ляпунова. Ряд експериментаторів, які мають справу з хаотичною динамікою, розробили алгоритми обчислення показника Ляпунова L . Для регулярних рухів $L \leq 0$, але в хаотичних режимах $L > 0$. Отже, знак L є критерієм хаосу.

Стан рівноваги

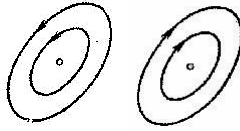
У безперервній динамічній системі стан рівноваги – точка у фазовому просторі, до якої наближається траєкторія після згасання перехідних режимів (при t , яке наближається до нескінченності). У механічних системах під станом рівноваги зазвичай розуміють стан з нульовим прискоренням і нульовою швидкістю. У відображеннях станами рівноваги можуть бути скінченні множини: при ітераціях відображення або різнищевому рівнянню система послідовно переходить від однієї точки такої множини до іншої. (Стан рівноваги також називається нерухомою точкою.) Стани рівноваги бувають таких типів: вузол (стійкий і нестійкий), фокус (стійкий і нестійкий), сідло і центр (рис. Б.5).



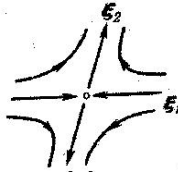
Стійкі фокуси



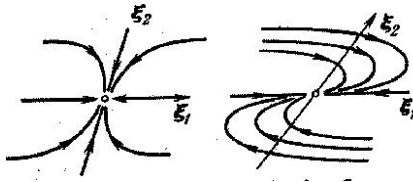
Нестійкі фокуси



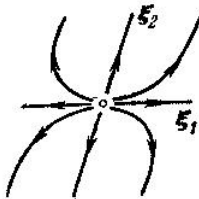
Центри



Сідло



Стійкі вузли



Нестійкий вузол

Рис. Б.5. Типи станів рівноваги

Майже періодична траєкторія

Це траєкторія, часова залежність якої складається з декількох дискретних несумірних частот.

Продовження за параметром

Складемо рівняння: $G(u, \lambda) = 0$ і $G \in R^n, \lambda \in R, u, \lambda = 0$.

Нехай $x(u, \lambda) = 0$; тоді рівняння може бути записано так:

$$G(0) = 0, G: R^{n+1} \rightarrow R^n.$$

Регулярні розв'язки

Розв'язок x_0 рівняння $G(0)=0$ є регулярним, якщо $G_x^0 = G_x(x_0)$ має максимальний ранг, тобто якщо $\text{Rank}(G_x^0) = n$. В іншому разі у параметричному формулюванні $G(u, \lambda) = 0$ ми матимемо:

$$\text{Rank}(G_x^0) = \text{Rank}(G_u^0 \mid G_\lambda^0) = n \Leftrightarrow \begin{cases} (i) G_u^0 \text{ is non singular,} \\ \text{or} \\ (ii) \begin{cases} \dim N(G_u^0) = 1, \\ \text{and} \\ g_\lambda^0 \notin R(G_u^0). \end{cases} \end{cases}$$

Теорема. Нехай $x_0 \equiv (u_0, \lambda_0)$ є регулярним значенням $G(x) = 0$. Тоді в околі x_0 існує унікальне однорозмірне продовження розв'язку $x(s)$ при $x(0) = x_0$.

Зауваження. Таке продовження розв'язку часто рекомендується як гілка рішення (див. рис. Б.6 для графічної інтерпретації):

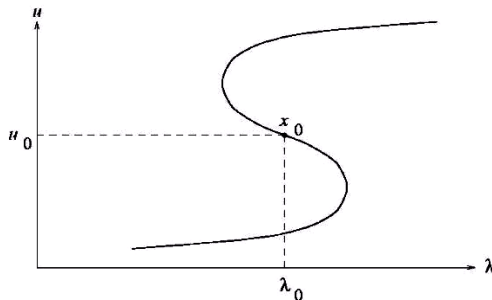


Рис. Б.6. Розв'язок гілки $G(u, \lambda) = 0$

Слабкий великомасштабний хаос

Динамічні процеси можна охарактеризувати за допомогою орбіт у фазовому просторі малого числа вимірювань $3 < n < 7$ і зазвичай вдається змінити фрактальну розмірність, яка виявляється меншою за 7; хаотичні орбіти охоплюють обширні області фазового простору; спектри складаються з широкого набору частот, здебільшого менших за частоту збурення (якщо остання присутня).

Сильний великомасштабний хаос

Динамічні властивості можна описати тільки у фазовому просторі дуже великого числа вимірювань; наявне велике число істотних ступенів вільності; важко отримати надійну оцінку фрактальної розмірності; досі не існує динамічної теорії цього явища.

Стійкість станів рівноваги

1. Стійкість за Ляпуновим.

Розглянемо рівняння $x' = v(x)$ (1). Припустимо, що це рівняння має стан рівноваги. Виберемо координати x_i так, щоб стан рівноваги був початком координат: $v(0) = 0$. Розв'язком з початковою умовою $u(t_0) = 0$ є $u = 0$. Нас цікавить поведінка розв'язків з близькими початковими умовами.

Визначення: Стан рівноваги $x = 0$ рівняння (1) називається *стійким* (або стійким за Ляпуновом), якщо для будь-якого $\epsilon > 0$ існує $b > 0$ (залежне тільки від ϵ і не залежне від t , про яке йдеться нижче) – таке, що для будь-якого x_0 , для якого $\|x_0\| < b$, розв'язок u рівняння (1) з початковою умовою $u(0) = x_0$ продовжується на всю вісь $t > 0$ і задовольняє нерівності $\|u(t)\| < \epsilon$ для всіх $t > 0$.

Іншими словами, стійкість стану рівноваги за Ляпуновим – це рівномірна на інтервалі $t > 0$ збіжність (до постійного розв'язку) розв'язків, початкові значення яких наближаються до цього стану рівноваги.

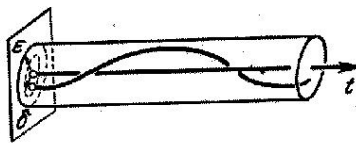


Рис. Б.7. Стійка рівновага



Рис. Б.8. Нестійка рівновага

2. Асимптотична стійкість

Стан рівноваги $x = 0$ рівняння (1) називається *асимптотично стійким*, якщо він стійкий за Ляпуновим і границя $u(t)$ при t , що наближається до нескінченності, дорівнює 0 для будь-якого розв'язку u з початковою умовою $u(0)$, що лежить у достатньо малому околі 0.

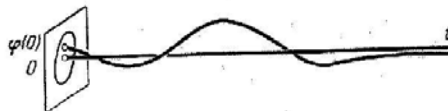


Рис. Б.9. Асимптотична стійкість

Подвоєння періоду

Зазвичай йдеться про послідовність періодичних коливань, у якій при зміні якогось параметра відбувається подвоєння періоду. В класичній моделі біфуркації подвоєння періоду (подвоєння частоти) відбуваються через інтервали управляючого параметра, що монотонно зменшуються. Після проходження критичного значення параметра (точки накопичення) виникають хаотичні коливання. Такий сценарій переходу до хаосу спостерігається в багатьох фізичних системах, але він не є єдиним маршрутом, що веде до хаосу.

Фрактали

Для опису неперіодичних рухів, що нагадують за складністю випадкові, застосовуються терміни «хаотичний» і «дивний» аттрактор. Називаючи аттрактор хаотичним, підкреслюється втрата інформації або передбачуваності. Називаючи аттрактор дивним, наголошується на незвичності геометричної структури, якою рухається траєкторія у фазовому просторі. Використовуючи показники Ляпунова, описується кількісна міра хаотичності, або втрати інформації. Кількісна міра дивності аттрактора називається фрактальною розмірністю.

Найхарактернішою особливістю хаотичних коливань у дисипативних системах, мабуть, є перетин Пуанкаре. Він дає картину поперечного перетину аттрактора, на якому зосереджений рух у фазовому просторі, і якщо рух хаотичний, то в перетині виникає багатошарова структура, що нагадує лабіринт. Множина точок, які складаються в «нитки», має тоншу структуру, що стає видимою, якщо її розглядати при збільшенні. Про такі перетини Пуанкаре кажуть, що вони мають фрактальну структуру.

Найпростіші приклади фрактальних кривих і множин – Крива Коха і множини (Пил) Кантора.

Крива Коха. Геометрична побудова починається з відрізка прямої довжиною 1. Відрізок ділиться на три частини, середня третина викидається, а замість неї будуються дві сторони (завдовжки 1/3 кожна) рівнобедреного трикутника. Таким чином, ми отримуємо чотири ланки завдовжки 1/3 кожна, тому загальна довжина ламаної складає 4/3. Щоб побудувати фрактальну криву, повторимо цей процес на кожній ланці ламаної ще і ще раз. Після багатьох повторень ламана стане

дуже звивистою. Наприкінці за нескінченно великого числа кроків ми отримаємо безперервну криву, яка ніде не диференціюється. В певному розумінні ця крива нагадує «закарлючки», якими маленька дитина вкриває аркуш паперу, якщо дати їй олівець. Перед нами парадокс: безперервна крива з ненульовою «площею» (рис. Б.10). Тому не дивно, що для такої кривої можна визначити фрактальну розмірність, і ця величина знаходиться в інтервалі від 1 до 2.

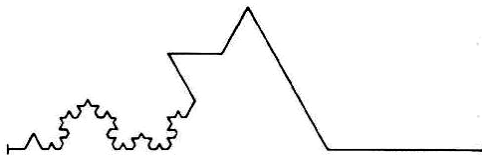


Рис. Б.10. Крива Коха

Множина Кантора. Була названа так на честь Георга Кантора (1845–1918), який відкрив її в 1883 р. Це поняття відіграє дуже важливу роль у сучасній нелінійній динаміці. Побудову Кривої Коха можна розглядати як процес додавання до первинного відрізка дедалі дрібніших деталей (відрізків). Побудова множини Кантора зводиться до додаткової операції – викидання з первинного відрізка дедалі дрібніших відрізків.

Побудова цієї множини теж починається з відрізка довжиною 1, який розділяється на три рівні частини. Проте тут, замість того щоб додавати два нові підвідрізки (як у Кривій Коха), необхідно викинути середню частину, після чого число відрізків зростає до двох, а повна їхня довжина знизиться до $2/3$. Потім процес повторюється на кожному з відрізків, що залишилися, і т. д. На кожному етапі викидання середньої третини подвоює число відрізків, але зменшує загальну довжину відрізків до $2/3$ її величини перед викиданням (див. рис. Б.11). Наприкінці повна довжина множини Кантора наближається до 0, хоча її розмірність знаходиться між 0 і 1.

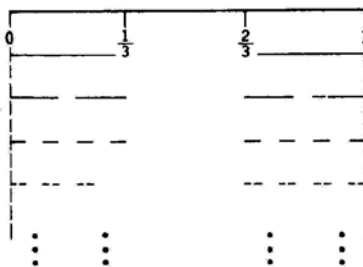


Рис. Б.11. Множина Кантора

Додаток В

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задача 1. Логістичне рівняння

Логістичне рівняння є, можливо, найпростішим прикладом хаотичної системи. Воно моделює процес, що виявляє початкове експоненційне зростання з нелінійністю, яка наприкінці зупиняє це зростання. Більшість загальних особливостей хаосу виявляється на цьому простому прикладі.

Почніть з вихідними умовами $x_0 = 0.1$ і багато разів виконайте ітерацію логістичного рівняння:

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n).$$

1. Покажіть, що розв'язок наближається до нерухомої точки для $0 < A < 3$, до періодичної орбіти для $3 < A < 3.5699\dots$ і до хаотичної орбіти для $A = 4$.

2. Що відбувається з траєкторією для $A < 0$ і $A > 4$?

3. Що відбувається в кожному з наведених випадків, якщо вихідна умова змінюється на $x_0 = 0.101$?

4. Що відбувається, якщо вихідна умова – $x_0 < 0$ або $x_0 > 1$?

Завдання підвищеної складності

5. Знайдіть вихідні умови x_0 , за яких розв'язок обмежений (не наближається до нескінченності), але не є хаотичним для $A = 4$?

Підказка: обчисліть алгебраїчно значення x_0 , за якого одна з послідовних ітерацій також дає x_0 , створюючи цикл, що повторюється. Є нескінченно багато таких значень x_0 в інтервалі $0 < x_0 < 1$, але ймовірність того, що Ви знайдете одну з них випадковим вгадуванням, дорівнює нулю, – вони складають «множину міри нуля».

Задача 2. Біфуркаційні діаграми

Ця задача, в якій Ви продовжите досліджувати властивості логістичного рівняння, є продовженням задачі № 1. Тут Ви простежите звичайний шлях до хаосу через подвоєння періоду і покажете результати графічно. Вміння будувати графіки буде необхідним в усіх наступних задачах.

Пригадайте логістичне рівняння:

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n),$$

яке є прототипною хаотичною системою, що проявляє багато ефектів, властивих хаотичним процесам у природі.

1. Для цього рівняння побудуйте діаграму бифуркації. Можна починати, практично, з будь-яких початкових умов в інтервалі $0 < x_0 < 1$, але переконайтеся, що Ви відкинули достатнє число перших ітерацій перед тим, як наносити на графік решту.

2. Розширте графік на діапазон $3.0 < A < 3.57$, де відбуваються послідовні подвоєння періоду, і використайте графік, щоб оцінити універсальні константи Фейгенбаума.

3. Розширте графік в околі вікна періоду-3 при A , яке приблизно дорівнює 3.84, і покажіть, що він також проявляє послідовність подвоєнь періоду до виникнення хаосу.

4. Стабільні орбіти всіх періодів можуть бути знайдені приблизно в діапазоні $3.0 < A < 4.0$. Знайдіть значення A , за якого орбіта має період -5.

Завдання підвищеної складності

5. Скільки орбіт з великим непарним цілим числом (7, 9, 11...) Ви можете знайти?

Підказка: при збільшенні періоду періодичні вікна стають послідовно більш вузькими, але є правила, які Ви можете знайти і використати для визначення їхнього місцезнаходження.

Задача 3. Рівняння Ван-дер-Поля

На цій задачі Ви навчитеся чисельно розв'язувати систему диференціальних рівнянь. Ви продемонструєте точність Вашого методу, застосовуючи його до простого гармонійного осцилятора, а потім – до рівняння Ван-дер-Поля, розв'язком якого є граничний цикл (періодичний атрактор). Рівняння Ван-дер-Поля використовувалося для моделювання електричних генераторів, биття серця і пульсуючих зірок, які називаються цефеїдами. Числовий метод також буде застосовуватися в декількох наступних завданнях.

Генератор Ван-дер-Поля описується так:

$$dx / dt = y,$$

$$dy / dt = b(1 - x^2)y - x.$$

1. Почніть з $b = 0$; у цьому випадку генератор Ван-дер-Поля перетворюється на простий гармонійний осцилятор (генератор синусоїдних коливань). З початковими умовами $x(0) = 1$ і $y(0) = 0$ траєкторія має бути колом радіуса 1 у двохкоординатній площині xu . Для розв'язання цієї системи від $t = 0$ до, принаймні, $t = 100$ застосуйте метод Рунге-Кутта четвертого ступеня або інший відповідний метод, і перевірте надійність Вашого результату, показавши, що траєкторія не робить спіралі ні всередину, ні назовні. Ви можете зробити це або графічно, або обчислюючи значення $x^2 + y^2$ при кожному часовому кроці.

2. Задайте $b = 1$ і покажіть, що різні початкові значення $x(0)$ і $y(0)$ притягуються до кривої граничного циклу.

3. Який ефект зміни значення b (як невід'ємні, так і від'ємні значення)?

Завдання підвищеної складності

4. Додайте до правої сторони другого рівняння синусоїдний задавальний член ($A \sin \omega t$) і дослідіть поведінку системи для різних значень A і ω . Ви маєте відстежити умови, за яких частота коливань прив'язується до задавальної частоти (захоплення), та інші умови, за яких граничний розв'язок не просто періодичний, а квазіперіодичний (накладання двох невідповідних коливань) або хаотичний.

Задача 4. Атрактор Лоренца

У цій задачі Ви застосуєте розроблений у минулому завданні метод до числового розв'язання системи диференціальних рівнянь для тривимірного випадку і використаєте його для дослідження рівнянь Лоренца. Рівняння Лоренца – перший документально описаний приклад потоку, граничним розв'язком якого є хаотичний атрактор. Ви можете застосовувати метод Рунге-Кутта четвертого ступеня або інший відповідний числовий метод за Вашим вибором. Ви повторите відкриття Лоренца: чутлива залежність від початкових умов.

Рівняння Лоренца:

$$dx / dt = p(y - x),$$

$$dy / dt = -xz + rx - y,$$

$$dz / dt = xy - bz.$$

Лоренц використовував такі значення параметрів: $p = 10$, $r = 28$ і $b = 8/3$.

1. Почніть з довільними початковими умовами в $t = 0$ достатньо близько до атрактора (але не з нерухомої точки $x = y = z = 0$!) і розв'яжіть рівняння Лоренца чисельно, використовуючи параметри Лоренца. Побудуйте графік у площині zy і покажіть, що різні початкові умови притягуються до атрактора.

2. Побудуйте графік залежності x від t у діапазоні $25 < t < 50$, вважаючи, що при $t = 25$ Ви знаходитесь на атракторі.

3. Визначте точні значення x , y і z при $t = 25$ і зробіть повторні обчислення, використовуючи ці значення як початкові умови, округлені до трьох значущих цифр. Покажіть, що $x(t)$ для цих двох випадків спочатку співпадають, але маленька помилка в результаті зростає до розміру атрактора.

Завдання підвищеної складності

4. Вивчіть поведінку системи при зміні параметра r у діапазоні

$0 < r < 200$. Ви зможете відстежити точкові атрактори, граничні цикли і хаос. Будьте уважні в діапазоні $99 < r < 101$, де існує періодичне вікно, в межах якого є каскад подвоєнь періоду з тими ж константами Фейгенбаума, що і в логістичному відображенні.

Задача 5. Показники Ляпунова

У цій задачі Ви розробите числову перевірку на хаос у розв'язку системи рівнянь. Ця перевірка складатиметься з оцінки найбільшого показника Ляпунова. Якщо розв'язок обмежений і значення найбільшого показника Ляпунова невід'ємне, зазвичай воно розглядається як хаотичний. Ця перевірка дозволить Вам автоматизувати виявлення хаосу при скануванні діапазону параметрів у числовому експерименті та кількісно визначити чутливість до початкових умов. Це найнадійніший спосіб розрізнати квазіперіодичність і хаос

(див. також сайт: <http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/lyapexp.htm>).

1. Обчисліть чисельно найбільший показник Ляпунова для відображення Хенона:

$$x_{n+1} = 1 - Cx_n^2 + By_n,$$

$$y_{n+1} = x_n$$

зі звичайними параметрами $B = 0.3$ і $C = 1.4$. Важливо прирошувати x і y одночасно, а не послідовно (тобто, не використовуйте випадкове значення x_{n+1} , визначене з першого рівняння, замість x_n , коли Ви оцінюєте y_{n+1} з другого рівняння). Виконайте ітерацію рівнянь кілька десятків разів, щоб переконатися, що розв'язок знаходиться на аттракторі; потім обчисліть середню логарифмічну швидкість розділення двох довколишніх орбіт, відокремлених відстанню d :

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \log(d_{n+1} / d_n).$$

Переконайтеся, що d залишається малим порівняно з розміром аттрактора і має напрям уздовж найшвидшого зростання. Ви повинні отримати значення, близьке до 0.418 за ітерацію (для $\log e$) або 0.603 біт за ітерацію (для $\log 2$). Зверніть увагу, що інший показник Ляпунова легко отримати з $\lambda_1 + \lambda_2 = \log|B|$.

2. Побудуйте графік λ_1 від N , щоб гарантувати, що ваша оцінка показника стабілізувалася на єдиному значенні.

3. Побудуйте графік λ_1 від C для діапазону $0 < C < 2$. Ви повинні простежити шлях до хаосу через подвоєння періоду ($\lambda_1 = 0$ у кожній точці біфуркації) і періодичні вікна (області з від'ємним λ_1) у межах хаотичної області, як і у випадку з логістичним рівнянням.

Завдання підвищеної складності

4. Застосуйте різні нелінійні функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$ за Вашим вибором і спробуйте знайти якісь нові приклади хаотичних відображень.

Задача 6. Відображення Хенона

У цій задачі Ви досліджуєте властивості відображення Хенона, яке, ймовірно, є найбільш вивченим прикладом двовимірних хаотичних відображень. Ви спостерігатимете самоподібну (фрактальну) структуру хаотичного атрактора. Відображення Хенона є узагальненням 1 - D логістичного рівняння для 2 - D. Воно було запропоновано Хеноном як модель перетину Пуанкаре, який є результатом розв'язання рівнянь Лоренца. Відображення Хенона описується такими рівняннями:

$$x_{n+1} = 1 - Cx_n^2 + By_n,$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

Звичайним вибором параметрів B і C , які дають хаотичні розв'язки, є $B = 0.3$ і $C = 1.4$.

1. Використовуючи параметри, вказані вище, виберіть початкові умови x_0 і y_0 де-небудь у басейні атрактора, і побудуйте графік залежності x_n від n , щоб переконатися, що розв'язок є обмеженим і очевидно хаотичним.

2. Почніть з двома близькими початковими умовами і покажіть, що їхнє розділення швидко зростає, як і передбачається для хаотичної системи.

3. Побудуйте графік декількох тисяч значень y_n від x_n після відкидання достатньої кількості початкових ітерацій, щоб гарантувати, що точки на графіку лежать на (дивному) аттракторі.

4. Збільшіть Ваш графік біля здвоєних ліній, які Ви маєте побачити, і переконайтеся, що лінії, які здаються одинарними, насправді виявляються (при збільшенні) парами ліній, які наближаються до нескінченності.

Завдання підвищеної складності

5. Побудуйте графік басейну тяжіння (ті початкові значення x_0 і y_0 , які не наближаються до нескінченності) для відображення Хенона з даними вище параметрами. Накладіть графік басейну тяжіння на графік атрактора.

Задача 7. Перетини Пуанкаре

У цій задачі Ви навчитеся робити перетини Пуанкаре, використовуючи в якості прикладу керований, згасаючий, нелінійний генера-

тор. Усі реальні генератори є нелінійними при достатньо великій амплітуді, а отже, цей приклад дійсно є досить загальним. Перетин Пуанкаре дозволяє розрізняти квазіперіодичну і хаотичну поведінку та спостерігати фрактальну структуру дивного атрактора, розмірність якого від 2 до 3, як у випадку дисипативних хаотичних потоків у трьох вимірах.

Рівняння, які Ви використовуватимете, – рівняння Удеа – є обмеженою формою рівняння Дуффінга і моделюють масу на жорсткій пружині, в якій сила протидії пропорційна $-x^3$, на відміну від звичайного $-x$ у законі Гука:

$$\begin{aligned} dx / dt &= y, \\ dy / dt &= -by - x^3 + A \sin t. \end{aligned}$$

Ви повинні застосувати звичайний прийом перетворення рівнянь в автономну форму, змінюючи $\sin t$ на $\sin z$ і додаючи рівняння

$$dz / dt = 1.$$

1. Використайте метод Рунге–Кутта четвертого ступеня або іншу відповідну методику для розв’язання наведених вище рівнянь у їхньому хаотичному режимі. Значення $b = 0.1$ і $A = 12$ мають привести до хаотичного розв’язку. Як завжди, здійснюйте обчислення упродовж певного часу, щоб переконатися, що траєкторія досягла атрактора, а потім покажіть графік $x(t)$, який передбачає хаотичну поведінку.

2. Побудуйте графік перетину Пуанкаре у від x при значеннях часу, для яких $\sin t = 0$ і $\cos t = 1$ (тобто, в постійній фазі управляючого члена). Спробуйте зібрати хоча б декілька тисяч точок. Якщо Ваш комп’ютер або компілятор працює повільно, це забере чимало часу, але воно того варте.

3. Повторіть пункт 2, використовуючи $b = 0.2$ і $b = 0.4$. Оскільки b – це згасання (тертя), спробуйте узагальнити висновок про ефект збільшення демпфування в хаотичній системі.

Завдання підвищеної складності

4. При $b = 0.1$ змінюйте значення A в діапазоні $9 < A < 14$ і визначте, які види бифуркацій можна виявити в перетинах Пуанкаре. Для $A = 9.8$ Ви маєте спостерігати період-3 орбіту. Період-3 рух має розгалужуватися до хаосу біля $A = 10$, а далі, вище $A = 13.3$, знову ставати періодичним з перехідним хаосом.

Задача 8. Відображення Чирікова

У цій задачі Ви досліджуєте найвідоміше двовимірне відображення, що зберігає площу, – воно називається стандартним відображенням, або відображенням Чирікова. Це відображення виявляє біль-

шість ефектів, які мають місце в хаотичних гамільтонових системах, – таких як керований, вільний від тертя маятник, куля, яка, пружно підстрибуючи на підлозі, коливається, і тороїдальне магнітне поле за наявності невеликих збурень.

Відображення Чирікова:

$$r_{n+1} = [r_n - (K / 2p) * \sin(2\pi\theta_n)] \bmod 1,$$

$$\theta_{n+1} = [\theta_n + r_{n+1}] \bmod 1.$$

Зверніть увагу, що цього разу (на відміну від відображення Хенона в задачах №№ 5 і 6) r у другому рівнянні – дійсне r_{n+1} , а не r_n , а отже, рівняння можна ітерувати послідовно. Також зверніть увагу, що функція \bmod не працює належним чином для нецілих чисел у багатьох мовах програмування, але Ви можете реалізувати цю функцію операторами, наприклад так:

WHILE $x \geq 1$: $x = x - 1$: WEND

WHILE $x < 0$: $x = x + 1$: WEND

1. При $K = 1$ почніть з 25-ма різними початковими умовами $r_0 = \theta_0 = i/25$ for $i = 1$ to 25 і нанесіть на один графік декілька тисяч ітерацій для кожного випадку. Ви маєте побачити, що деякі початкові умови створюють періодичні орбіти, тоді як інші видаються ергодичними.

2. Повторіть пункт 1 з $K = 0.5$ і $K = 2$.

3. Знайдіть на одному з Ваших графіків область з цікавою структурою і надайте зображення у великому масштабі (використовуючи відповідні та ближче розташовані початкові умови), щоб показати, що ця структура зберігається за всіма шкалами класифікації. Можливо, треба буде збільшити число ітерацій, як Ви робили це з відображенням Хенона в задачі № 5.

Завдання підвищеної складності

4. Виберіть тисячу або більше початкових точок в невеликому околі в хаотичній області («стохастичне поле») і дослідіть їх для декількох ітерацій, щоб показати, що вони розтягуються, але зайнята точками площа залишається постійною, відповідно до теореми Ліювілла. Оцініть найбільший показник Ляпунова зі швидкості розтягування. Ви можете також застосувати метод, який розробили в задачі № 6 для обчислення найбільшого показника Ляпунова.

Задача 9. Автокореляційна функція

У цій задачі Ви почнете розробляти інструментарій для аналізу даних часового ряду. Одна з перших перевірок, яку виконують з екс-

периментальним записом часового ряду, – це обчислення автокореляційної функції, з якої може бути оцінений час автокореляції. Знання функції кореляції часто достатньо для того, щоб відрізнити квазіперіодичність від хаосу, і час кореляції є важливою змінною для застосування більш поглиблених методів. Кореляційна функція – це перетворення Фур'є для спектральної функції.

1. Чисельно розв'яжіть рівняння Лоренца зі звичайними параметрами $p = 10$, $r = 28$ і $b = 8/3$. Дочекайтеся того, щоб траєкторія досягла атрактора, а потім генеруйте і нанесіть на графік ряд з 1000 точок введення даних, які представляють $x(t)$ на рівновіддалених часових інтервалах $\Delta t = 0.05$. Назвіть ці значення x_i для $i = 1$ до N . Далі припустимо, що цей часовий ряд був отриманий з якоїсь експериментальної вибірки (20 разів за секунду) і що Ви більше нічого не знаєте про динаміку системи, яка створила цей часовий ряд.

2. Обчисліть і складіть графік автокореляційної функції $g(n)$ від n для Вашого часового ряду, де $g(n)$ приблизно визначається так:

$$g(n) = \frac{\sum_{i=1}^{N-n} (x_i - \bar{x})(x_{i+n} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{N-n} (x_i - \bar{x})^2},$$

а \bar{x} є середнім значенням x_i :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

3. Оцініть значення n , за якого $g(n)$ потрапляє в $1/e$ свого значення при $n = 0$, і з цього значення знайдіть час автокореляції в секундах.

Завдання підвищеної складності

4. Побудуйте графік автокореляційної функції для кожного з наступних часових рядів:

- а) синусоїдна хвиля з багатьма циклами;
- б) генератор випадкових чисел;
- в) послідовні ітерації логістичного відображення;
- г) суперпозиції двох непропорційних синусоїдних хвиль.

Задача 10. Моделювання запізнювання

Ця задача має переконати Вас, що можна взяти одну змінну хаотичної системи (в цьому випадку – атрактора Лоренца), вибірка якої здійснена з дискретним часом, і відтворити аттрактор у довільному вимірі, який має такі ж топологічні властивості, що й первинний аттрактор. Ця процедура є необхідним етапом аналізу хаотичних експери-

ментальних даних. Дослідження таких графіків часто виявляє періодичність, яка не є очевидною на графіку первинного часового ряду. Ця задача є продовженням задачі № 9. Фактично, Ви можете використовувати той же набір даних, який генерували в попередньому завданні.

1. Використовуючи часовий ряд з 1 000 точок координат x атрактора Лоренца зі звичайними параметрами $p = 10$, $r = 28$ і $b = 8/3$, відібраних з рівновіддаленими інтервалами часу $\Delta t = 0.05$, відкиньте початковий перехідний процес і побудуйте графік X_i від X_{i-n} для $n = 1, 2, 4$ і 8 . Переконайтеся, що остаточний графік схожий із графіком оригінального атрактора Лоренца. Чи є оптимальне значення для n , і яким чином воно стосується часу кореляції, який Ви обчислювали минулого разу для цих же даних?

2. Побудуйте графік фазового простору Вашого часового ряду (тобто графік dx/dt від x). Для цього достатньо апроксимувати dx/dt по $(X_{i+1} - X_{i-1})/2\Delta t$. Переконайтеся, що цей графік також схожий з оригінальним атрактором Лоренца. Якщо запис даних містить істотний «шум», то цей метод гірше описаного вище методу запізнювання.

3. Побудуйте графік зворотного відображення Ваших даних, наприклад, графік локального максимуму x від попереднього локального максимуму, і покажіть, що цей графік є одновимірним (фактично, це фрактал з маломасштабною структурою, яка з'явиться при сильному збільшенні, якщо у Вас є достатня кількість інформаційних точок). Щоб знайти локальний максимум, достатньо нанести на графік ті точки, для яких два найближчі «сусіди» є меншими. Проте, щоб знайти фрактальну структуру, Вам буде необхідно ще підібрати для цих трьох точок параболу, максимум якої обчислюється аналітично, і / або використати менше значення Δt у первинному часовому ряду.

Завдання підвищеної складності

4. Повторіть пункти 1 і 2 (окрім застосування тривимірних графіків): у першому випадку – з осями X_i , X_{i-n} і X_{i-2n} , а в другому – з осями x , dx/dt і d^2x/dt^2 . Можна апроксимувати d^2x/dt^2 по $(X_{i+1} + X_{i-1} - 2X_i)/\Delta t$. Будьте винахідливими – використайте деякі з обговорених вище ідей, щоб відобразити траєкторії в просторах з виміром вище 2.

Задача 11. Нелінійний прогноз

Ця задача є продовженням розробки інструментарію для аналізу хаотичних часових рядів. Тут Ви розробите нелінійний «прогноznик» (предиктор). Прогноз майбутнього часового ряду також може бути використаний як метод придушення «шуму», спосіб оцінки чутливості до початкових умов і спосіб створення рівнянь моделі, розв'язок яких може дати нескінченну кількість даних, а вигляд – фізичне розуміння природи динамічної системи.

1. Перший етап – створення часового ряду для аналізу. Для цієї мети використовуйте відображення Хенона з параметрами ($B = 0.3$, $C = 1.4$), вибраними для отримання хаотичної поведінки. Виконайте декілька ітерацій, щоб гарантувати, що орбіта знаходиться на атракторі, а потім генеруйте часовий ряд X_i для $i = 1$ до 1 000 від змінної X . Також генеруйте наступні 10 точок ($i = 1\,001$ до 1 010), щоб застосувати їх для перевірки якості Вашого прогнозу. Побудуйте графік X_i від X_{i-1} для $i = 2$ до 1 000 і переконайтеся, що він відтворює топологію первинного відображення Хенона в площині X - Y .

2. Тепер, використовуючи Ваші 1 000 точок як вхідні дані, знайдіть у записі даних M точок у D -вимірному вкладенні, які є найближчими до останньої точки в часовому ряду ($i = 1\,000$). Виберіть $M = 8$ і $D = 2$, але запишіть програму так, щоб Ви могли коригувати ці параметри. Далі складіть перелік того, як ці вісім точок змінюються (ΔX , скаляр) при наступній ітерації. Візьміть середнє цих восьми змін і додайте до $X_{1\,000}$, щоб отримати прогноз для $X_{1\,001}$. Порівняйте це значення з фактичним значенням $X_{1\,001}$, одержаним у пункті 1.

3. Продовжіть цей процес для наступних дев'яти кроків, використовуючи M найближчих «сусідів» для Вашого передбаченого значення $X_{1\,001}$ у D -розмірному вкладенні, щоб отримати прогноз для $X_{1\,002}$ і далі, до $X_{1\,010}$. Складіть таблицю або графік Ваших прогнозів для $i = 1\,001$ до 1 010 разом з фактичними значеннями X_i , одержаними в пункті 1. Чи узгоджується зростання помилки Вашого прогнозу з найбільшим показником Ляпунова для відображення Хенона ($\lambda_1 = 0.418$ / ітерація)?

Завдання підвищеної складності

4. Створіть новий часовий ряд, такий самий, як Ваш часовий ряд вище, але з невеликою кількістю доданого «шуму» (скажімо, 10 %). Вивчіть, яким чином цей «шум» погіршує якість Вашого прогнозу і чи є оптимальні значення M і D , які дають найкращий прогноз.

Задача 12. Кореляційна розмірність

Ця задача є продовженням розробки інструментарію для аналізу хаотичних часових рядів з реалізацією алгоритму Гассбергера–Прокаччі для визначення кореляційної розмірності. Цей алгоритм дозволив здійснювати пошук хаосу в експериментальних даних. Досі це найкращий метод для розрізнення хаосу і кольорового «шуму». Коли хаос знайдено, алгоритм забезпечує вимірювання розмірності атрактора (фактично – нижню межу на розмірності), яка показує мінімальне число динамічних змінних, необхідних для моделювання системи. Ймовірно, це найкорисніша програма, яку Ви розробите впродовж цього курсу, тому поставтеся до роботи з особливою увагою. Це також одна з найскладніших задач.

1. Перший етап – створення часового ряду для аналізу. Для цього використайте відображення Хенона з параметрами ($B = 0.3$, $C = 1.4$), вибраними для отримання хаотичної поведінки. Виконайте декілька ітерацій, щоб гарантувати, що орбіта знаходиться на аттракторі, а потім генеруйте часовий ряд X_i для $i = 1$ до 1 000 від змінної X . Ви можете використати дані, отримані в попередній задачі.

2. Створіть програму для обчислення суми кореляції $C(R)$ для Ваших даних у D -вимірному вкладенні із запізнюванням у часі. Зверніть увагу, що для $D > 1$ інформаційні точки є векторами, складовими яких є X_{i-k} і X_{j-k} , а отже, Ви маєте замінити $|X_i - X_j|$ на квадратний корінь виразу

$$\sum_{k=0}^{D-1} (X_{i-k} - X_{j-k})^2.$$

Побудуйте графік $\log(C(R))$ від $\log(R)$ для відображення Хенона для $D = 2$. Запишіть програму так, щоб Ви могли застосовувати її до будь-якого набору даних з довільним вкладенням.

3. Побудуйте графік нахилу $d[\log(C(R))]/d[\log(R)]$ щодо $\log(R)$ і покажіть, що є полого ділянка кривої, для якої значення є близьким до очікуваної кореляційної розмірності 1.21 для відображення Хенона.

Завдання підвищеної складності

4. Побудуйте сім'ю кривих $\log(C(R))$ від $\log(R)$ для значень D від 1 до 8. Як змінюється нахил цих кривих при зміні D ? З експериментальними даними необхідно будувати такий графік, щоб переконатися, що вибране Вами вкладення достатньо (але не надто) велике.

Задача 13. Системи ітерованих функцій

Три останні задачі стосуватимуться фракталів і пов'язаних з ними тем. Одним з найпростіших і найпотужніших методів створення фрактальних структур (крім дивних аттракторів, що походять із хаотичних динамічних систем) є системи ітерованих функцій (IFS). На жаль, у нашому посібнику такі системи не обговорювалися, але вони описані в більшості джерел про фрактали, особливо у праці Барнслі, який є піонером IFS-методів.

Процедура є дуже простою. Почніть її у довільній точці на площині X - Y . Підкиньте монету з N сторонами, щоб генерувати ціле число між 1 і N (на комп'ютері використовуйте генератор випадкових чисел). Потім застосуйте відповідне афінне перетворення F_i :

$$X_{\text{new}} = aX + bY + e,$$

$$Y_{\text{new}} = cX + dY + f.$$

Повторіть процес багато тисяч разів. Відкиньте невелику кількість перших точок, а решту нанесіть на графік.

1. Використайте описану процедуру для створення трикутника Серпінського, IFS-код для якого становить:

	a	b	c	d	e	f
F_1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
F_2	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
F_3	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

2. Застосуйте цю ж процедуру для створення папороті Барнслі, IFS-код для якої складає:

	a	b	z	d	e	f
F_1	0	0	0	0.16	0	0
F_2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6
F_3	0.2	-0.23	0.23	0.2	0	1.6
F_4	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.4

3. Створіть декілька своїх власних цікавих структур, або як різновиди вищезгаданих, або випадковим вибором (комп'ютером) IFS-коду.

Завдання підвищеної складності

4. Розробіть програму для обчислення об'ємної розмірності довільного фрактала, відображеного на екрані комп'ютера. Перевірте Вашу програму, використовуючи трикутник Серпінського, для якого це вимірювання має бути $\log(3)/\log(2) \approx 1.585$.

Задача 14. Множини Мандельброта і Джулія

У цій задачі Ви досліджуєте множину Мандельброта і пов'язану з ним множину Джулія. Множина Мандельброта – можливо, найвідоміша з усіх фрактальних множин, – є надзвичайно привабливою і може існувати у вигляді художніх зразків неперевершеної краси. Вона не має практичного застосування – тільки художнє. Це найпростіший приклад двовимірного фрактала, без участі часу. За більш докладною інформацією і прикладами зображень можна звернутися до практично будь-якої книги про фрактали.

Множина Мандельброта – ця множина значень комплексної змінної C , для якої відображення $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$ із початковою умовою $Z_0 = 0$ залишається обмеженим при n , що наближається до нескінченності. Вищезазначений опис еквівалентний такому двовимірному відображенню:

$$X_{n+1} = X_n^2 - Y_n^2 + C_r, \quad Y_{n+1} = 2X_n Y_n + C_i.$$

1. Побудуйте графік множини Мандельброта в області площини C , обмеженої $-2 < C_r < 1$ і $-1.5 < C_i < 1.55$. Щоб зробити це, потрібно запрограмувати трудомісткий процес перебору кожного поєднання C_r і C_i . Для кожного такого значення C почніть з $X_0 = Y_0 = 0$ і виконуйте ітерації вищезазначених рівнянь, аж поки $X^2 + Y^2$ не перевищить 4 або поки Ви не здійснисте ітерацію 100 разів. Нанесіть на графік у площині C ті точки, які знаходяться в множині. Ви маєте отримати суцільну область точок з фрактальною межею басейну.

2. Щоб подати Ваш графік у більш цікавій візуальній формі, також нанесіть на графік точки, які лежать зовні множини, якщо число ітерацій, потрібних для того, щоб точки вийшли за границі цієї площини, є непарним. За наявності програмного доступу до кольорів можна зафарбувати лежачу зовні множину точок за певною перетворюючою в кольори схемою.

3. Знайдіть біля границі множини область, яка проявляє цікаву структуру, і збільшіть масштаб щонайменше у 10 разів. За бажання, можна збільшити границю від 100 до більшого числа, наприклад, до 500, але слід пам'ятати, що це відповідно уповільнить обчислення.

Завдання підвищеної складності

4. Кожній точці у множині Мандельброта (кожному значенню C) відповідає множина Джулія – множина початкових умов (Z_0), для яких існує обмежений розв'язок. Ці множини можуть бути відображені за тією ж методикою, яка застосовувалася вище. Цікаві випадки (вибір C) лежать біля границі множини Мандельброта. Побудуйте графіки декількох таких випадків.

Задача 15. Просторово-часовий хаос і складність

У цій (останній) задачі Ви створите приклади просторово-часового хаосу в складних системах, які проявляють самоорганізацію. Результати будуть більш цікавими, якщо Ви напишете програму так, щоб на моніторі можна було спостерігати процес створення (розвитку) моделей.

1. Дослідіть поведінку решітки одновимірних зв'язаних відображень (CML), застосовуючи логістичні відображення. Використайте випадкові початкові умови в інтервалі від 0 до 1 і періодичні граничні умови. Побудуйте графік з $X(t)$ від t для одного з вузлів решітки з параметрами, відкорегованими для отримання хаотичної поведінки.

Додатково: пропустіть дані $X(t)$ через Вашу програму визначення кореляційної розмірності та оцініть розмірність атрактора.

2. Реалізуйте класичну гру «Життя» (двовимірний клітинний автомат). Використайте періодичні граничні умови. Почніть з випадкових початкових умов (приблизно половина зайнятих пунктів) і виконуйте

ітерації, поки не буде досягнуто сталого стану. Для цього може знадобитися декілька сотень ітерацій, залежно від розміру Вашої решітки.

Додатково: почніть з дещо відмінними початковими умовами (відмінність в одному пункті) і визначте, чи відчутно залежить кінцева структура від початкових умов, тобто чи є система хаотичною.

3. Змодельуйте двовимірну дифузійно-обмежену агрегацію (DLA). Це приклад випадкового фрактала.

Додатково: застосуйте метод box-counting, щоб оцінити об'ємну розмірність створеної Вами моделі.

4. Побудуйте графік траєкторії однієї з мурах Лангтона, управління якою здійснюється за наведеними нижче правилами.

Почніть із квадратної сітки (хоча б 100×100), всі квадрати якої є білими. Мураха починає рух із центрального квадрата. Вона переміщається на один квадрат на схід і визначає колір квадрата, в який потрапила. Якщо вона знаходиться у білому квадраті, він зафарбовується чорним, а мураха повертає на 90° праворуч. Якщо вона потрапила в чорний квадрат, він зафарбовується білим, а мураха повертає на 90° ліворуч. Якщо вона виходить за край екрана, то повертається з протилежного боку (тобто граничні умови є періодичними). Мураха завжди дотримується цих простих правил. Побудуйте графік, який буде отримано після 10.000, 100.000 і 1.000.000 кроків.

Додатково: розташуйте на екрані, випадково або в певному порядку, декілька каменів (чорний квадрат), на які натраплятиме мураха, і простежте, як зміниться її результуюча поведінка.

Додаток Г

ГЛОСАРІЙ

1/f-«шум» – див. *антиперсистентність*.

BDS-статистика – статистика, яка заснована на кореляційному інтегралі і досліджує ймовірність того, що має місце суто випадкова система з тими ж скейлінговими властивостями, що й система, яка вивчається (див. *кореляційний інтеграл*).

Альфа – міра гостровершинності функції густини ймовірності. У нормальному розподілі альфа дорівнює 2. У випадку фрактальних розподілів альфа знаходиться між 1 і 2. Це величина, зворотна показнику Херста H .

Антиперсистентність – у методі нормованого розмаху (R/S-аналіз) антиперсистентний часовий ряд реверсує частіше, ніж ряд випадковий. Якщо значення ряду зростають у попередній період часу, найімовірніше, що вони знижуватимуться в наступний період, і навпаки. Також має назву «*рожевий шум*», або «*1/f- шум*».

Атрактор – стан, в який «встановлюється» динамічна система. Атрактор – це множина значень у фазовому просторі, в яку мігрує система в часі або після ітерацій. Атрактором може бути одна нерухома точка, сукупність регулярно відвідуваних точок, петля, складна орбіта або нескінченна кількість точок. Атрактор не обов'язково має бути одно- або двовимірним. Атрактори можуть мати таку ж велику розмірність, як кількість змінних, які впливають на систему.

Атрактор Лоренца – дивний атрактор з формою метелика. Походить з розробленої Едвардом Лоренцом метеорологічної моделі з трьома рівняннями і трьома змінними. Це один з перших вивчених дивних атракторів.

Басейн тяжіння – область у фазовому просторі, пов'язана з даним атрактором. Басейн тяжіння атрактора – це множина всіх (вихідних) точок, які рухаються до даного атрактора.

Білий шум – аудіоеквівалент броунівського руху – безладні звуки, шипіння, свист; відеоеквівалент – «снігопад» на телеекрані.

Біфуркаційна діаграма – графік, що показує критичні точки, де відбуваються біфуркації, та можливі розв'язки, які існують у цих точках; візуальне відтворення послідовності подвоєння періодів, отриманих при зміні управляючого параметра.

Біфуркація – якісна зміна в поведінці (атрактора) динамічної системи, пов'язана зі зміною управляючого параметра.

Вектор – двозначний показник, пов'язаний з точкою у фазовому просторі динамічної системи. Його напрям вказує, куди прямує система з поточної точки, а довжина – швидкість.

Векторне поле – множина всіх векторів у фазовому просторі динамічної системи. Векторне поле даної безперервної системи визначається множиною її диференціальних рівнянь.

Випадкове блукання – броунівський рух, де попередні зміни величини змінної не пов'язані з минулими або майбутніми змінами.

Волатильність – стандартне відхилення змін вартості цінного паперу.

Гіпотеза ефективного ринку (ЕМН) – гіпотеза, яка стверджує, що поточні ціни відображають усю публічну інформацію. Це означає, що жоден учасник ринку не може мати переваги перед іншим, отримуючи прибуток.

Гіпотеза когерентного ринку – гіпотеза, яка полягає в тому, що функція густини ймовірності ринку може визначатися груповими настроями і фундаментальним зміщенням. Залежно від комбінації цих двох факторів ринок може знаходитися в одному з чотирьох можливих станів: випадкового блукання, нестійкого переходу, хаосу або когерентності.

Гіпотеза фрактального ринку (ФМН) – гіпотеза, яка стверджує, що: (1) ринок складається з безлічі інвесторів з різними інвестиційними горизонтами, (2) інформаційні множини, які є важливими для кожного інвестиційного горизонту, різні. Якщо ринок встановлюється як фрактальна структура, то за відсутності характеристичної часової шкали він залишається стійким. Коли горизонти ринкових інвесторів стають однаковими, ринок втрачає стійкість, тому що кожен торгує, виходячи зі своєї інформаційної множини.

Граничні точки – точки у фазовому просторі; бувають трьох видів: атрактори, репелери і сідлові точки. Система переміщається від репелерів до атракторів. Сідлова точка є і атрактором, і репелером: вона притягує систему в певних областях, і відштовхує – до інших областей.

Граничний цикл – атрактор, який є періодичним у часі, що означає, що він періодично проходить через упорядковану послідовність станів.

Дивний атрактор – N -точковий атрактор при N , що дорівнює нескінченності. Зазвичай (можливо, й завжди) самоподібний за формою.

Динамічна система – система рівнянь, що визначає зміну певних змінних у часі. Рівняння встановлюють, яким чином визначаються (обчислюються) нові значення як функція їхнього поточного значення і управляючих параметрів. Функції (якщо вони явні) є різницевиими або диференціальними рівняннями. Динамічні системи можуть бути стохастичними або детермінованими. У стохастичній системі нові значення отримуть з розподілу вірогідності. У детермінованій системі кожне нове значення пов'язане з будь-яким поточним значенням.

Диференційне рівняння – функція, яка встановлює швидкість зміни безперервної змінної за зміни іншої змінної (у нашому випадку – часу).

Економетрія – наука про кількісні економічні прогнози.

Ентропія – рівень дезорганізації системи.

Зворотне відображення – графік значень часового ряду n щодо $n + 1$.

Ітеративна система – система, для визначення якої здійснюється ітерація однієї або більше функцій.

Ітеративна функція – функція, що застосовується для обчислення нового стану динамічної системи.

Ітерація – повторне застосування функції, за якого її вихідне значення використовується як вхідне для наступних значень.

Йосип-ефект – тенденція персистентного тимчасового ряду ($0.50 < H \leq 1.00$) мати тренди і цикли. Термін був уведений Мандельбротом, його джерело – біблійна розповідь про те, як Йосип тлумачив сон фараона про сім урожайних і сім неврожайних років).

Комплексність – вивчення того, як складні системи можуть генерувати просту поведінку. Прикладом комплексності може служити синхронізація біологічних систем, починаючи від світляків і закінчуючи нейронами.

Кореляційна розмірність – оцінка фрактальної розмірності за допомогою вимірювання ймовірності того, що дві випадково вибрані точки знаходитимуться в межах певної відстані одна від одної, і дослідження зміни цієї ймовірності за зміни відстані. Білий «шум» заповнюватиме весь простір, оскільки його складові є некорельованими, а його кореляційна розмірність дорівнює тій розмірності, в якій він розміщений. Внутрішньозалежна система триматиметься завдяки своїм кореляціям і зберігатиме свою розмірність, в якій би розмірності вкладення вона не розміщувалася і як би остання не перевищувала фрактальну розмірність системи.

Критичні рівні – величини управляючих параметрів, за яких змінюється природа нелінійної динамічної системи. Така система може біфуркувати або здійснювати перехід від стійкого стану до турбулентності. Прикладом може служити соломинка, яка переламала спину верблюдові.

Лінійна функція – рівняння прямої лінії (лінійне рівняння), яке має форму $y = tx + b$, де y змінюється «лінійно» разом з x . У цьому рівнянні t визначає нахил лінії, а b відображає перетин з віссю y ; значення y при x , що дорівнює нулю.

Марківська залежність – умова, за якої спостереження у часовому ряду залежать від попередніх спостережень у «сусідньому» періоді.

Марківська залежність швидко зникає, тоді як довготривалі ефекти, на зразок залежності Херста, розпадаються протягом довгого часу.

Метод нормованого розмаху (R/S-аналіз) – метод аналізу, розроблений Херстом для визначення ефекту довготривалої пам'яті та, частково, броунівського руху. Вимірює збільшення відстані, що покривається точками при зростанні часового масштабу. Для броунівського руху ця відстань зростає пропорційно кореню квадратному з часу. Ряд, який збільшується з іншою швидкістю, не є випадковим.

Нелінійна динаміка – наука, що вивчає динамічні системи, зміна яких визначається нелінійними функціями.

Нелінійна функція – функція, яка не є лінійною; у буде нелінійною функцією x , якщо x множить на іншу змінну (непостійну) або на себе (тобто збільшує ступінь).

Ной-ефект – тенденція персистентного часового ряду ($0.50 < H < 1.00$) до різких переривчастих змін. Нормальний розподіл передбачає непереривчасті зміни в системі. Проте часовий ряд, який демонструє статистику Херста, може раптово змінити рівень скиданням величини вгору або вниз. Мандельброт увів цей термін з огляду на біблійну розповідь про потоп.

Нормальний розподіл – добре відома крива, яка має форму дзвону. Відповідно до центральної граничної теореми функції густини ймовірності великої кількості незалежних, ідентично розподілених чисел ця крива наблизатиметься до нормального розподілу. В сім'ї фрактальних розподілів нормальний розподіл існує тільки тоді, коли альфа дорівнює 2, або, іншими словами, показник Херста дорівнює 0.50. Отже, нормальний розподіл є окремим випадком і, до того ж, в аналізі часових рядів досить рідкісним.

Орбіта (траєкторія) – послідовність положень (шлях) системи в її фазовому просторі; шлях від початкової точки (початкові умови) у напрямку до атрактора.

Параметр порядку – в нелінійній динамічній системі – змінна, яка виступає як макрозмінна (комбінація змінних), що підсумовує окремі змінні, здатні впливати на систему. У керованому експерименті, що включає, наприклад, теплову конвекцію, температура може бути управляючим параметром. У великих складних системах вона може виступати як параметр порядку, оскільки підсумовує сонячні ефекти, тиск повітря та інші атмосферні змінні. – Див. **управляючі параметри**.

Персистентність – у R/S-аналізі персистентним рядом називається такий ряд, який схильний дотримуватися трендів. Отже, якщо значення ряду збільшувалися в попередньому періоді, є ймовірність того, що вони продовжуватимуть зростати і в наступному періоді. Персис-

тентний часовий ряд має довгу пам'ять, тому в ньому мають місце довготривалі кореляції між поточними подіями і подіями майбутніми. Називається також чорним «шумом».

Подвоєння періоду – зміна в динаміці, за якої N -точковий атрактор замінюється $2N$ -точковим атрактором.

Показник Ляпунова – значення експоненти, коефіцієнт часу, який відображає швидкість (ступінь) відхилення динамічних орбіт. Він є мірою чутливості до початкових умов.

Показник Херста (H) – міра зміщення в частково броунівському русі: $H = 0.50$ – для броунівського руху; $0.50 < H \leq 1.00$ – для персистентного або трендостійкого ряду; $0 < H \leq 0.50$ – для антиперсистентної або такої, що збільшується до середнього значення системи. Величина, зворотна показнику Херста, яка дорівнює альфі – характеристичному показнику в стійкому розподілі Парето. Фрактальна розмірність часового ряду $D = 2 - H$.

Початкова умова (початковий стан) – початкова точка динамічної системи.

Простір станів (фазовий простір) – абстрактний простір, що використовується для представлення поведінки системи. Його розміри є змінними системи. Отже, точка у фазовому просторі визначає можливий стан системи.

Рекурсивний процес – у нашому випадку терміни «рекурсивний» та «ітеративний» є синонімами. Отже, рекурсивні процеси – це ітераційні процеси, а рекурсивні функції є ітераційними функціями.

Репелер – один з видів граничної точки; точка у фазовому просторі, від якої віддаляється система.

Рівновага – стійкий стан системи. – Див. *атрактор*.

Ризик – у сучасній теорії портфеля цінних паперів ризик вимірюється як стандартне відхилення прибутковостей цих паперів.

Різницева рівняння – функція, що встановлює зміну змінної від однієї дискретної точки в часі до іншої.

Рожевий «шум» – див. *антиперсистентність*.

Розмірність вкладення – наступні елементи набору даних з n елементів, опрацьовуються як точки в n -розмірному просторі. Кажуть, що точки належать розмірності вкладення N , для $N = 1, 2, 3, 4$ і т. д.

Розмірності системи – множина змінних системи.

Розподіл Парето (Парето–Леві) – див. *фрактальний розподіл*.

Самоподібність – нескінченне вкладення структури при всіх масштабах. Строга самоподібність є характеристикою форми, що проявляється, коли підструктура має однотипну схожість з верхньою структурою.

Сідлова точка – точка, як правило, в тривимірному просторі, яка є і атрактором і репелером: вона притягує в одному вимірі і відштовхує – в іншому.

Складна система – протяжні в просторі і / або в часі нелінійні системи, що характеризуються спільними властивостями, притаманними системі в цілому, і відмінними від власної поведінки її складових.

Стан – точка в просторі станів, яка позначає поточне положення (статус) динамічної системи.

Сучасна теорія портфеля (МРТ) – узагальнююча назва для методів кількісного аналізу портфеля ризикових активів, заснованих на очікуваному прибутку або середньому очікуваному прибутку і ризику або стандартному відхиленні портфеля цінних паперів. Відповідно до МРТ інвестори мали б віддавати перевагу портфелю з найвищим очікуваним прибутком при заданому рівні ризику.

Теорія складності – теорія, яка вивчає процеси з великою кількістю агентів, які здаються незалежними і можуть спонтанно самоорганізовуватися в когерентну систему.

Тор – аттрактор, що складається з N незалежних коливань. Тор з двома коливаннями, побудований у фазовому просторі, нагадує кільце.

Точковий аттрактор – у нелінійній динаміці – аттрактор, який стискає всі орбіти у фазовому просторі до однієї точки або вектора значень. По суті, системи, які наближаються до стійкого стану при одній рівноважній величині, матимуть точковий аттрактор. Маятник, демпфований тертям, завжди зупиниться, а отже, його фазовий простір завжди стискатиметься в точку, де координата і швидкість дорівнюють нулю. – Див. **аттрактор, фазовий простір**.

Управляючий параметр – параметр у рівняннях динамічної системи. Якщо управляючі параметри будуть змінюватися, то й динамічна система – теж змінюватиметься. Зміни за межами певних значень можуть призводити до біфуркацій.

Фазова картина – сукупність усіх траєкторій від усіх можливих початкових точок у фазовому просторі динамічної системи.

Фазовий простір (простір станів) – абстрактний простір, що використовується для представлення поведінки системи. Його розміри є змінними системи. Отже, точка у фазовому просторі визначає можливий стан системи. Точки, фактично досягнуті системою, залежать від її ітеративної функції та початкових умов (початкової точки).

Фрактал – неправильна форма із самоподібністю. Фрактал має нескінченну детальність і не може бути диференційованим. «Там, де є хаос, турбулентність і нерегульованість, діє фрактальна геометрія» (Брігс і Піт, 1989).

Фрактальна розмірність – показник геометричного об'єкта, який може набувати дробових величин. Термін «фрактальна розмірність» спочатку використовувався як синонім до «хаусдорфової розмірності», а в наш час вживається як більш загальний термін для вимірювання того, як швидко збільшуються довжина, площа або об'єм при зменшенні масштабу (Пейтген, Юргенс і Сауре, 1992).

Фрактальний розподіл – функція густини ймовірності, яка статистично самоподібна; це означає, що в різних інтервалах часу статистичні характеристики залишаються однаковими.

Фрактальний «шум» – «шум», який не повністю незалежний від попередніх величин. – Див. *частково броунівський рух, $1/f$ -«шум», білий «шум»*.

Хаос – поведінка динамічної системи, яка: а) має дуже велике (можливо, нескінченне) число атракторів і б) чутлива до початкових умов.

Хаусдорфова розмірність (розмірність Хаусдорфа) – показник геометричного об'єкта, який може набувати дробових величин. – див. *фрактальна розмірність*.

Центральна гранична теорема – закон великих чисел, який стверджує, що якщо об'єм вибірки незалежних, однаково розподілених випадкових чисел наближається до нескінченності, її функція густини ймовірності наближається до нормального розподілу.

Часовий ряд – множина вимірювань поведінки у часі.

Частково броунівський рух – зміщене випадкове блукання. На відміну від стандартного броунівського руху, шанси зміщуються в той чи інший бік. Це схоже на підкидання несиметричної кістки.

Чутливість до початкових умов – властивість хаотичних систем. Динамічна система є чутливою до початкових умов, коли дуже незначні відмінності в початкових значеннях призводять до дуже різної поведінки. Система є чутливою до початкових умов, якщо орбіти близьких початкових точок розходяться.

Додаток Д

ІНТЕРНЕТ-АДРЕСИ СТОРІНОК З ТЕМАТИКИ НАВЧАЛЬНОГО ПОСІБНИКА

WWW-адреса сторінки	Стислий зміст
http://sprott.physics.wisc.edu/phys505/	Topics in Physics Chaos and Time-Series Analysis. Навчальна програма університету штату Вісконсін. ПОВНИЙ КУРС (15 ЛЕКЦІЙ) з хаосу і нелінійної динаміки. Незамінний сайт для самостійного навчання
http://sprott.physics.wisc.edu/	Центральна сторінка Вісконсінського університету, присвячена фракталам і хаосу. Обширна колекція посилань
http://www.industrialstreet.com/chaos/metalink.htm	Chaos Metalink Homepage. Підручники з хаотичної динаміки, наукові публікації, фрактальна музика, безплатне програмне забезпечення. Обширна колекція посилань
http://www.brint.com/Systems.htm	Complexity, Complex Systems & Chaos Theory Organizations as Self-Adaptive Complex Systems. Найкраща в Інтернеті колекція зі складних систем і теорії хаосу. Велика кількість публікацій і посилань на наукові журнали
http://www.PrimaSounds.com/index.html	Опис фрактальної музики та її властивостей. Філософська школа, присвячена аспектам сприйняття хаосу; обширне поле діяльності для нових напрямів наукових досліджень у галузі теорії хаосу і музики
http://spanky.triumf.ca/www/spanky.html	Фрактальна база даних фірми Spanky. Програми (Fractint), публікації, посилання
http://www.vanderbilt.edu/AnS/psychology/cogsci/chaos/workshop/WorkshopF.html	Basic Concepts in Nonlinear Dynamics and Chaos. Основні поняття нелінійної динаміки і хаосу. Галереї, посилання, підручник

WWW-адреса сторінки	Стислий зміст
http://www-chaos.umd.edu/	Chaos at Maryland. Університет штату Меріленд. Сторінка присвячена загальним питанням теорії хаосу. Підручники з хаотичної динаміки. Дослідження, наукові публікації, книги. Галерея хаосу, мережні конференції. Безплатне програмне забезпечення. Обширна колекція посилань
http://www.springer-ny.com/nst/	Журнал «Нелінійна наука сьогодні». Цікаві статті та посилання
http://sprott.physics.wisc.edu/pubs.htm	Books and Publications J. З. Sprott. Книги і публікації Дж. Спротта (Університет штату Вісконсін). Основні теми: дивні атрактори; питання програмування нелінійної динаміки; дослідження хаотичних процесів у плазмі. Посилання на програмне забезпечення і фрактальну галерею
http://asa.aip.org/index.html	Сторінка Акустичної спілки Америки. Праці з фрактальної музики, посилання, колекція музики, інформація про конференції
http://math.bu.edu/DYSYS/dysys.html	Сторінка Університету Бостона, присвячена динамічним системам. Інтерактивні підручники і статті про фрактали і динамічні системи, колекція JAVA-апплетів
http://vip.cs.utsa.edu/flames/overview.html	UTSA: Combustion Chaos Group. Група хаотичної динаміки Техаського університету, Сан-Антоніо. Експериментальні дослідження, моделювання, наукові публікації. Дослідження турбулентних систем, біфуркаційних систем і спеціальних питань теорії хаосу

WWW-адреса сторінки	Стислий зміст
http://www.bgu.ac.il/chaos/	Персональна сторінка Володи-мира Готнара, Єрусалимський університет. Публікації про хаотичні явища в галузі хімії та психології
http://www.cs.colorado.edu/~lizb/Home.html	Персональна сторінка Ліз Бредлі, співробітниці Центру з вивчення хаосу, штат Колорадо, департамент прикладної математики. Публікації, курс лекцій у форматі PS
http://mitpress.mit.edu/e-journals/Computer-Music-Journal/	Журнал комп'ютерної музики. Статті, звукові файли, колекція посилань
http://membrane.com/chaos/index.html	Фрактальна і сучасна музика. Приклади, посилання

Додаток Є

ЕЛЕКТРОННИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

В умовах входження України, відповідно до Болонського процесу, в світовий освітній простір дистанційне навчання передбачає інтеграцію і широке використання світових культурних і освітніх цінностей. Дистанційне навчання на базі комп'ютерних телекомунікацій стає частиною інформаційно-освітньої культури людини ХХІ століття. Тому в рамках дисципліни «Нелінійний аналіз економічних систем» був розроблений мультимедійний курс.

В даному курсі представлений весь необхідний матеріал для вивчення і викладання спецкурсу (рис. Є1).

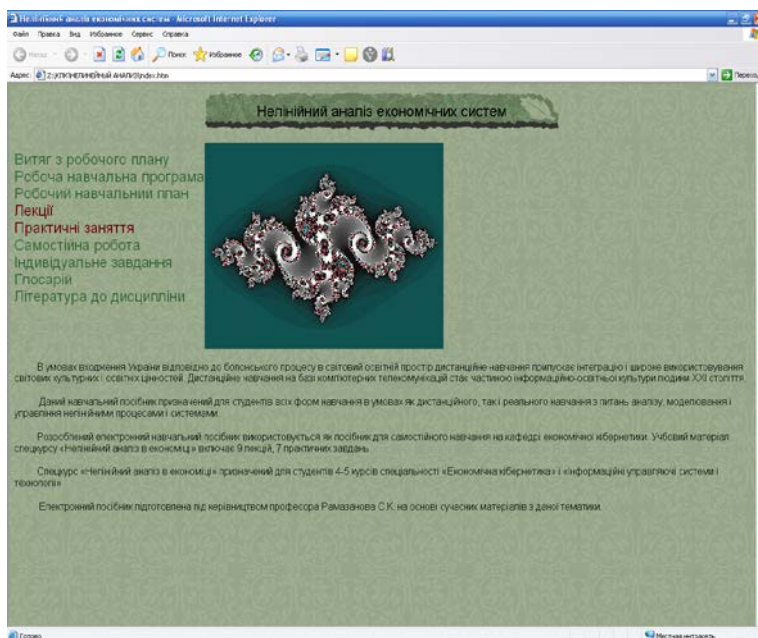


Рис. Є1. Главная страница

У мультимедійний курс крім супровідної нормативної документації входять 9 лекцій, розраховані на 28 академічних годин. Також в курсі представлені матеріали для проведення практичних робіт, а саме 7 практичних занять з прикладами і завданнями. В даному спецкурсі передбачений матеріал для самостійної роботи студента, глосарій. Для

проведення контролю якості засвоєного матеріалу передбачені контрольні завдання.

Розроблений електронний навчальний посібник використовується як посібник для самостійного навчання на кафедрі економічної кібернетики.

Електронний посібник підготовлено під керівництвом професора Рамазанова С.К. на основі сучасних матеріалів з даної тематики.

З питань отримання мультимедійного курсу звертатися за адресою e-mail: rsk@ec.snu.edu.ua.